ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLVII, Disp. 1ª, 1911-1912.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

DISTRIBUZIONE DELLE SEDUTE

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

nell'anno 1911-912

divise per Classi

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali	Classe di Scienze morali, storiche e filologiche
1911 - 19 Novembre	1911 - 26 Novembre
» - 3 Dicembre	» - 10 Dicembre
» - 17 »	» - 24 »
» - 31 »	1912 - 7 Gennaio
1912 - 14 Gennaio	» - 21 »
» - 28 »	» - 4 Febbraio
» - 11 Febbraio	» - 18 »
» - 25 »	» - 3 Marzo
» - 10 Marzo	» - 17 »
» - 24 »	» - 31 »
» - 14 Aprile	» - 21 Aprile
» - 28 »	» - 5 Maggio
» - 12 Maggio	» - 19 »
» - 26 »	» - 9 Giugno
» - 16 Giugno	» - 23 »

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

VOLUME QUARANTESIMOSETTIMO

1911-912

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei Reali Principi.
1912

ELENCO

DEGLI

ACCADEMICI RESIDENTI, NAZIONALI NON RESIDENTI STRANIERI E CORRISPONDENTI

AL 31 DICEMBRE 1911.

NB. — *La prima data è quella dell'elezione, la seconda quella del R. Decreto che approva l'elezione.*

PRESIDENTE

Boselli (S. E. Paolo), P.° Segretario di S. M. per l'Ordine Mauriziano e Cancelliere dell'Ordine della Corona d'Italia, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza della R. Università di Genova, già Professore nella R. Università di Roma, Professore Onorario della R. Università di Bologna, Presidente dell'Istituto Storico Italiano, Socio corrispondente della Classe di scienze morali della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio Corrispondente dell'Accademia dei Georgofili, Presidente della Società di Storia Patria di Savona, Socio onorario della Società Ligure di Storia Patria, Socio onorario dell'Accademia di Massa, Socio della R. Accademia di Agricoltura, Corrispondente dell'Accademia Dafnica di Acireale, Presidente Onorario della Società di Storia Patria degli Abruzzi in Aquila, Membro del Consiglio e della Giunta degli archivi, Presidente del Comitato Centrale della Società " Dante Alighieri „, Presidente del Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico di Torino, Presidente del Consiglio Superiore della Marina Mercantile, Membro del Consiglio del Contenzioso diplomatico, Deputato al Parlamento nazionale, Presidente del Consiglio provinciale di Torino, Gr. Cord. ✻ e ♕, Gr. Cord. dell'Aquila Rossa di Prussia, dell'Ordine di Alberto di Sassonia, dell'Ord. di Bertoldo I di Zähringen (Baden), e dell'Ordine del Sole Levante del Giappone, Gr. Uffiz. O. di Leopoldo del Belgio, Uffiz. della Cor. di Pr., della L. d'O. di Francia, e C. O. della Concezione del Portogallo. — *Torino, Piazza Maria Teresa,* 3.

Eletto alla carica il 24 aprile 1910 — 12 maggio 1910.

Vice-Presidente

Camerano (Lorenzo), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali, Professore di Anatomia comparata e di Zoologia e Direttore dei Musei relativi nella R. Università di Torino, Presidente del Club Alpino Italiano, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro della Società Zoologica di Francia, Socio corrispondente del Museo Civico di Rovereto, della Società Scientifica del Cile, della Società Spagnuola di Storia naturale, Socio straniero della Società Zoologica di Londra, Socio onorario della Società scientifica del Messico, Socio onorario della Società zoologica italiana, Socio Onorario dell'Accademia dei Zelanti di Acireale, ✠, Comm. ✠. — *Torino, Museo Zoologico della R. Università, Palazzo Carignano.*
Eletto alla carica il 29 maggio 1910 — 23 giugno 1910.

Tesoriere

Parona (Carlo Fabrizio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore del Museo di Geologia e di Paleontologia della R. Università di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, e Corrispondente dell' I. R. Istituto Geologico di Vienna, Membro del R. Comitato Geologico, ecc., Cav. ✠. — *Torino, Museo Geologico della R. Università, Palazzo Carignano.*
Rieletto alla carica 27 novembre 1910 — 15 dicembre 1910.

CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Direttore

Naccari (Andrea), Dottore in Matematica, Professore di Fisica sperimentale nella R. Università di Torino, uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania e dell'Accademia Pontaniana, Uffiz. ✠, Comm. ✠. — *Torino, Via Sant'Anselmo, 6.*
Rieletto alla carica il 22 gennaio 1910 — 23 gennaio 1911.

Segretario

Segre (Corrado), Dottore in Matematica, Professore di Geometria superiore nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze (dei XL), Membro onorario della Società Filosofica di Cambridge, Socio straniero dell'Accademia delle Scienze del Belgio e di quella di Danimarca, Socio corrispondente della Società Fisico-Medica di Erlangen, dell'Accademia delle Scienze di Bologna, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, ✠. — *Torino, Corso Vittorio Eman.*, *85*.

Eletto alla carica il 19 giugno 1910 — 17 luglio 1910.

ACCADEMICI RESIDENTI

Salvadori (Conte Tommaso), Dottore in Medicina e Chirurgia, Vice-Direttore del Museo Zoologico della R. Università di Torino, Professore di Storia naturale nel R. Liceo Cavour di Torino, Socio della R. Accademia di Agricoltura di Torino, della Società Italiana di Scienze naturali, dell'Accademia Gioenia di Catania, Membro della Società Zoologica di Londra, dell'Accademia delle Scienze di Nuova York, della Società dei Naturalisti in Modena, della Società Reale delle Scienze di Liegi, della Reale Società delle Scienze naturali delle Indie Neerlandesi e del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Membro effettivo della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, Socio straniero della *British Ornithological Union*, Socio Straniero onorario del *Nuttall Ornithological Club*, Socio Straniero dell'*American Ornithologist's Union*, e Membro onorario della Società Ornitologica di Vienna, Membro ordinario della Società Ornitologica tedesca, Uffiz. ✠, Cav. dell'O. di S. Giacomo del merito scientifico, letterario ed artistico (Portogallo). — *Torino, Via Principe Tommaso, 17.*

29 Gennaio 1871 - 9 febbraio 1871. — Pensionato 21 marzo 1878.

D'Ovidio (Enrico), Senatore del Regno, Dottore in Matematica, Professore ordinario di Algebra e Geometria analitica nella R. Università di Torino, incaricato di Geometria analitica e proiettiva e Direttore del R. Politecnico di Torino, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio ordinario non residente della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio dell'Accademia Pontaniana, delle Società matematiche di Parigi e Praga, Comm. ✱, e ✠. — *Torino, Corso Sommeiller, 16.*

29 Dicembre 1878 - 16 gennaio 1879. — Pensionato 28 novembre 1889.

Naccari (Andrea), *predetto.*

5 Dicembre 1880 - 23 dicembre 1880. — Pensionato 8 giugno 1893.

Camerano (Lorenzo), *predetto.*
10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Segre (Corrado), *predetto.*
10 Febbraio 1889 - 21 febbraio 1889. — Pensionato 8 ottobre 1898.

Peano (Giuseppe), Dottore in Matematica, Professore di Calcolo infinitesimale nella R. Università di Torino, Socio della “ *Sociedad Cientifica* „ del Messico, Socio del Circolo Matematico di Palermo, della Società matematica di Kasan, della Società filosofica di Ginevra, corrispondente della R. Accademia dei Lincei, ♔. — *Torino, Via Barbaroux, 4.*
25 Gennaio 1891 - 5 febbraio 1891. — Pensionato 22 giugno 1899.

Jadanza (Nicodemo), Dottore in Matematica, Professore di Geodesia teoretica nella R. Università di Torino e di Geometria pratica nel R. Politecnico, Socio dell'Accademia Pontaniana di Napoli, del Circolo matematico di Palermo, dell'Accademia Dafnica diAcireale e della Società degli Ingegneri Civili di Lisbona, Membro effettivo della R. Commissione Geodetica italiana, Uff. ♔. — *Torino, Via Madama Cristina, 11.*
3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 17 ottobre 1902.

Foà (Pio), Senatore del Regno, Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore di Anatomia Patologica nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, ecc., ecc., ✻, Comm. ♔. — *Torino, Corso Valentino, 40.*
3 Febbraio 1895 - 17 febbraio 1895. — Pensionato 9 novembre 1902.

Guareschi (Icilio), Dottore in Scienze naturali, Professore e Direttore dell'Istituto di Chimica Farmaceutica e Tossicologica nella R. Università di Torino, Direttore della Scuola di Farmacia, Socio della R. Accademia di Medicina e della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena, Socio onorario della Società di Farmacia di Torino, Membro anziano del Consiglio Sanitario Provinciale, Cittadino Onorario di Crespellano (Bologna), Socio onorario dell'Associazione chimico-farm. toscana, Membro corrispondente dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro corrispondente della Società di Farmacia di Parigi, Socio della *Deutsche Gesellschaft b. Geschichte d. Medizin und Naturwissenschaften*, Membro della Società Chimica di Berlino, della *Berliner Gesellschaft f. Gesch. d. Naturwiss.*, ecc., Comm. ♔, ⚒. — *Torino, Corso Valentino, 11.*
12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896. — Pensionato 28 maggio 1903.

Guidi (Camillo), Ingegnere, Professore ordinario di Statica grafica e scienza delle costruzioni e Direttore dell'annesso Laboratorio sperimentale dei materiali da costruzione nel R. Politecnico in Torino, Uff. ✻ e ♔. — *Torino, Corso Valentino, 7.*
31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 11 giugno 1903.

Fileti (Michele), Dottore in Chimica, Professore ordinario di Chimica generale nella R. Università di Torino, Uff. ♔. — *Torino, Via Bidone, 36.*
31 Maggio 1896 - 11 giugno 1896. — Pensionato 10 marzo 1904.

Parona (Carlo Fabrizio), *predetto.*
15 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 21 gennaio 1909.

Mattirolo (Oreste), Dottore in Medicina, Chirurgia e Scienze naturali, Professore ordinario di Botanica e Direttore dell'Istituto botanico della R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di Medicina, Presidente della R. Accademia di Agricoltura di Torino, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, dell'Accademia delle Scienze del R. Istituto di Bologna, della Società Imperiale di Scienze naturali di Mosca, della *Royal Botanical Society* di Edinburgh, della Società Veneto-Trentina, ecc., Comm. ✠. — *Torino, Orto Botanico della R. Università (al Valentino).*
10 Marzo 1901 - 16 marzo 1901. — Pensionato 15 dicembre 1910.

Grassi (Guido), Professore ordinario di Elettrotecnica e Direttore della scuola Galileo Ferraris nel R. Politecnico di Torino, Socio ordinario della R. Accademia di Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia Pontaniana e del R. Istituto d'incoraggiamento di Napoli, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione, Membro della Commissione superiore Metrica al Ministero di Agricoltura, Ind. e Comm., Membro del Consiglio Superiore dei servizi elettrici al Ministero delle Poste e Telegrafi, Comm. ✠. — *Torino, Via Cernaia, 40.*
9 Febbraio 1902 - 23 febbraio 1902. — Pensionato 30 novembre 1911.

Somigliana (nob. Carlo), Dottore in Matematiche, Professore ordinario di Fisica matematica e incaricato di Meccanica razionale nella R. Università di Torino, rappresentante dell'Accademia nel Consiglio amministrativo del R. Politecnico di Torino, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, e corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro del Consiglio Superiore della Pubblica Istruzione. — *Corso Vinzaglio, 10.*
5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Fusari (Romeo), Dottore in Medicina e Chirurgia, Professore ordinario di Anatomia umana, descrittiva e topografica e Direttore dell'Istituto anatomico della R. Università di Torino, Socio dell'Accademia di Medicina di Torino, Corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Fondatore della Società medico-chirurgica di Pavia, Onorario dell'Accademia delle Scienze mediche e naturali di Ferrara, ✠. — *Via Baretti, 45.*
5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Balbiano (Luigi), Dottore in chimica e Professore ordinario di Chimica organica nel R. Politecnico di Torino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, Socio della R. Accademia di medicina di Roma, Socio onorario delle Società di Farmacia di Torino, di Parigi e di Liegi, Cav. Uff. ✻. — *Via Po, 22.*
15 maggio 1910 — 12 giugno 1910.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Volterra (Vito), Senatore del Regno, Dottore in Fisica, Dottore onorario in Matematiche della Università Fridericiana di Christiania, Dottore onorario in scienze della Università di Cambridge, Dottore onorario in Filosofia della Università di Stockholm, Dottore onorario in Fisica della Clark University di Worcester, Mass, Professore di Fisica matematica, incaricato di Meccanica celeste e Preside della Facoltà di Scienze fisiche, matematiche e naturali nella R. Università di Roma,uno dei XL della Società Italiana delle Scienze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico corrispondente della R. Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, Socio onorario dell'Accademia Gioenia di Scienze naturali di Catania, Membro nazionale della Società degli Spettroscopisti italiani, Membro straniero della Società Reale di Londra, Socio corrispondente nella Sezione di Geometria dell'Accademia delle Scienze di Parigi, Membro straniero nella classe di matematica pura della Reale Accademia Svedese delle scienze, Membro straniero dell'Accademia nazionale delle Scienze (Stati Uniti d'America Washington), Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Gottinga. Membro corrispondente dell'Accademia Imperiale delle scienze di Pietroburgo, Socio corrispondente della Società medico-fisica di Erlangen, Membro dell'Accademia Imperiale Leopoldina Carolina di Halle, Membro onorario della Società Matematica di Londra, Membro onorario della Società matematica di Kharkow, Membro onorario della Società matematica di Calcutta, Membro onorario della Società di Scienze fisiche e naturali di Bordeaux e Membro corrispondente della Società Scientifica di Buenos Aires, Vice-Presidente del Comitato Talassografico Italiano, ✠, ♕. — *Roma, Via in Lucina, 17.*
3 Febbraio 1895 - 11 febbraio 1895.

Fergola (Emanuele), Senatore del Regno, Professore emerito nella R. Università di Napoli, Socio ordinario residente della R. Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, Membro della Società italiana dei XL, Socio della R. Accademia dei Lincei e dell'Accademia Pontaniana, Socio ordinario del R. Istituto d'incoraggiamento alle Scienze naturali, Socio corrispondente del R. Istituto Veneto, Gr. Uffiz. ✱, Gr. Croce ♕. — *Portici, Corso Garibaldi, 11, Villa Nava*
12 Gennaio 1896 - 2 febbraio 1896.

Bianchi (Luigi), Professore di Geometria analitica nella R. Università di Pisa, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei e della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL; Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche di Napoli, dell'Accademia delle

Scienze dell'Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere in Milano, ✱, ✠, ✚. — *Pisa, Via Manzoni, 3.*

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Dini (Ulisse), Senatore del Regno, Professore di Analisi Superiore nella R. Università di Pisa e incaricato di Analisi infinitesimale, Direttore della R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Socio della R. Accademia dei Lincei e Presidente della Società Italiana detta dei XL, Corrispondente dell'Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna e del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere e del R. Istituto Veneto di Scienze, lettere ed arti, Socio ordinario non residente dell'Accademia delle Scienze fisiche e matematiche della Società Reale di Napoli nella Sezione di Scienze matematiche, Socio onorario della R. Accademia di scienze, lettere ed arti di Modena, dell'Accademia di scienze naturali di Catania e della R. Accademia di scienze, lettere ed arti degli Zelanti di Acireale, Membro del Consiglio Direttivo del Circolo matematico di Palermo, Socio della Società italiana per il progresso delle scienze (Roma), della R. Società delle scienze di Gottinga, Membro straniero della *London mathemat. Society*, Dottore onorario delle Università di Christiania e di Glasgow, Comm. ✱, Gr. Uff. ✠, ✚. — *Via S. Martino, 32. Pisa.*

13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Golgi (Camillo), Senatore del Regno, Membro del Consiglio superiore di Sanità, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei di Roma, Dottore in Scienze *ad honorem* dell'Università di Cambridge, Membro onorario dell'Università Imperiale di Charkoff, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Membro della Società per la Medicina interna di Berlino, Membro onorario della Imp. Accademia Medica di Pietroburgo, della Società di Psichiatria e Neurologia di Vienna, Socio corrispondente onorario della *Neurological Society* di Londra, Membro corrispondente della *Société de Biologie* di Parigi, Membro dell'*Academia Caesarea Leopoldino-Carolina*, Socio della R. Società delle Scienze di Gottinga e delle Società Fisico-mediche di Würzburg, di Erlangen, di Gand, Membro della Società Anatomica, Socio nazionale della R. Accademia delle Scienze di Bologna, Socio corrispondente dell'Accademia di Medicina di Torino, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente dell'Accademia Medico-fisica Fiorentina, della R. Accademia delle Scienze mediche di Palermo, della Società Medico-chirurgica di Bologna, Socio onorario della R. Accademia Medica di Roma, Socio onorario della R. Accademia Medico-chirurgica di Genova, Socio corrispondente dell'Accademia Fisiocritica di Siena, dell'Accademia Medico-chirurgica di Perugia, della *Societas medicorum Svecana* di Stoccolma, Membro onorario dell'*American Neurological Association* di New-York, Socio onorario della *Royal Microscopical Society* di Londra, Membro corrispondente della R. Accademia di Medicina del Belgio, Membro onorario della Società freniatrica italiana e dell'Asso-

ciazione Medico-Lombarda, Socio onorario del Comizio Agrario di Pavia, Professore ordinario di Patologia generale e di Istologia nella R. Università di Pavia, Membro effettivo della Società Italiana d'Igiene e dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Membro onorario dell'Università di Dublino, Socio corrispondente della Società medica di Batavia, Membro straniero dell'Accademia di Medicina di Parigi, Membro onorario dell'Imperiale Società degli alienisti e neurologi di Kazan, Socio emerito della R. Accademia medico-chirurgica di Napoli, Socio corrispondente dell'Imp. Accademia delle Scienze di Vienna, Socio onorario della R. Società dei Medici in Vienna, Cav. ✠, ♔, Comm. ✻.
13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Lorenzoni (Giuseppe), Dottore negli Studi d'Ingegnere civile ed Architetto, Professore di Astronomia nella R. Università e Direttore dell'Osservatorio astronomico di Padova, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, uno dei XL della Società italiana delle Scienze, Socio effettivo del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze ed Arti di Modena, Membro della Società Imperiale dei Naturalisti di Mosca, ✻, Comm. ✠. — *Padova, Osservatorio astronomico.*
5 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

ACCADEMICI STRANIERI

Klein (Felice), Professore nell'Università di Gottinga. — 10 Gennaio 1897 - 24 gennaio 1897.

Haeckel (Ernesto), Professore nella Università di Jena. — 13 Febbraio 1898 - 24 febbraio 1898.

Darboux (Giovanni Gastone), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Poincaré (Giulio Enrico), Membro dell'Istituto di Francia (Parigi). — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Helmert (Federico Roberto), Direttore del R. Istituto Geodetico di Prussia, Potsdam. — 14 Giugno 1903 - 28 giugno 1903.

Noether (Massimiliano), Professore nell'Università di Erlangen. — 15 maggio 1910 - 12 giugno 1910.

Baeyer (v. Adolfo), Professore nell'Università di München. — Id. id.

Thomson (John Joseph), Professore nell'Università di Cambridge. — Id. id.

Suess (Edoardo), Professore nell'I. R. Università di Vienna. — Id. id.

CORRISPONDENTI

Sezione di Matematiche pure.

Tardy (Placido), Professore emerito della R. Università di Genova (Firenze). — 16 Luglio 1864.
Cantor (Maurizio), Professore nell'Università di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.
Schwarz (Ermanno A.), Professore nella Università di Berlino. — 19 Dicembre 1880.
Bertini (Eugenio), Professore nella Regia Università di Pisa. — 9 Marzo 1890.
Jordan (Camillo), Professore nel Collegio di Francia, Membro dell'Istituto (Parigi). — 12 Gennaio 1896.
Mittag-Leffler (Gustavo), Professore a Stoccolma. — 12 Gennaio 1896.
Picard (Emilio), Professore alla Sorbonne, Membro dell'Istituto di Francia, Parigi. — 10 Gennaio 1897.
Castelnuovo (Guido), Prof. nella R. Università di Roma. — 17 Aprile 1898.
Veronese (Giuseppe), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Padova. — 17 Aprile 1898.
Zeuthen (Gerolamo Giorgio), Professore nella Università di Copenhagen. — 14 Giugno 1903.
Hilbert (Davide), Prof. nell'Università di Göttingen. — 14 Giugno 1903.
Enriques (Federico), Professore nell'Università di Bologna. — 15 maggio 1910.
Guccia (Gio. Batt.), Professore nell'Università di Palermo. — Id. id.

Sezione di Matematiche applicate, Astronomia e Scienza dell'ingegnere civile e militare.

Ewing (Giovanni Alfredo), Professore nell' Università di Cambridge. — 27 Maggio 1894.
Celoria (Giovanni), Senatore del Regno, Astronomo all'Osservatorio di Milano. — 12 Gennaio 1896.
Pizzetti (Paolo), Professore nella R. Università di Pisa. — 14 Giugno 1903.
Cerulli (Vincenzo), Direttore dell' Osservatorio Collurania, Teramo. — 15 maggio 1910.
Darwin (Sir Giorgio H.), Professore di Astronomia al Trinity College, Cambridge. — Id. id.
Boussinesq (Valentino), Membro dell' Istituto, Professore nell'Università di Parigi. — Id. id.
Levi-Civita (Tullio), Professore nella R. Università di Padova. — 15 maggio 1910.

Sezione di Fisica generale e sperimentale.

Blaserna (Pietro), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.
Roiti (Antonio), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 12 Marzo 1882.
Righi (Augusto), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Bologna. — 14 Dicembre 1884.
Lippmann (Gabriele), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 15 Maggio 1892.
Rayleigh (Lord Giovanni Guglielmo), Professore nella *Royal Institution* di Londra. — 3 Febbraio 1895.
Pacinotti (Antonio), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Pisa. — 17 Aprile 1898.
Röntgen (Guglielmo Corrado), Professore nell'Università di München. — 14 Giugno 1903.
Lorentz (Enrico), Professore nell'Università di Leiden. — 14 Giugno 1903.
Battelli (Angelo) Professore nell'Università di Pisa. — 15 maggio 1910.
Garbasso (Antonio), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.
Neumann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — Id. id.
Zeeman (P.), Professore nell'Università di Amsterdam. — Id. id.
Cantone (Michele), Professore nell'Università di Napoli. — Id. id.

Sezione di Chimica generale ed applicata.

Paternò (Emanuele), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 2 Gennaio 1881.
Körner (Guglielmo), Professore nella R. Scuola superiore d'Agricoltura in Milano. — 2 Gennaio 1881.
Lieben (Adolfo), Professore nell'Università di Vienna. — 15 Maggio 1892.
Fischer (Emilio), Professore nell'Università di Berlino. — 24 Gennaio 1897.
Ramsay (Guglielmo), Professore nell'Università di Londra. — Id. id.
Schiff (Ugo), Professore nel R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento in Firenze. — 28 Gennaio 1900.
Dewar (Giacomo), Professore nell'Università di Cambridge. — 14 Giugno 1903.
Ciamician (Giacomo), Senatore del Regno, Professore nell'Università di Bologna. — 14 Giugno 1903.
Ostwald (Dr. Guglielmo), Gross Bothen (Sachsen). — 5 Marzo 1905.
Arrhenius (Svante Augusto), Professore e Direttore dell'Istituto Fisico dell'Università di Stoccolma. — 5 Marzo 1905.
Nernst (Walter), Professore nell'Università di Berlino. — 5 Marzo 1905.
Haller (Albin), Membro dell'Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — 15 Maggio 1910.
Willstätter (Richard), Professore nell'Università di Zürich. — Id. id.
Engler (Carlo), Professore nella Scuola superiore tecnica di Karlsruhe. — Id. id.
Meyer (Ernesto v.), Professore nella R. Scuola superiore tecnica in Dresda. — Id. id.

Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia.

Strüver (Giovanni), Professore nella R. Università di Roma. — 30 Novembre 1873.
Rosenbusch (Enrico), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 25 Giugno 1876.
Zirkel (Ferdinando), Professore nell'Università di Bonn. — 16 Gennaio 1881.
Capellini (Giovanni), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Bologna. — 12 Marzo 1882.
Tschermak (Gustavo), Professore nell'Università di Vienna. — 8 Febbraio 1885.
Geikie (Arcibaldo), Direttore del Museo di Geologia pratica, Londra. — 3 Dicembre 1893.
Groth (Paolo Enrico), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.
Taramelli (Torquato), Professore nella R. Univ. di Pavia. — 28 Gennaio 1900.
Liebisch (Teodoro), Professore nell'Università di Gottinga. — Id. id.
Bassani (Francesco), Professore nella R. Univ. di Napoli. — 14 Giugno 1903.
Issel (Arturo), Professore nella R. Università di Genova. — Id. id.
Goldschmidt (Viktor), Professore nell'Univ. di Heidelberg. — 5 Marzo 1905.
Suess (Francesco Edoardo), Professore nella I. Università di Vienna. — 5 Marzo 1905.
Haug (Emilio), Professore nell'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.
Lacroix (Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — 15 Maggio 1910.
Kilian (Carlo), Professore nell' Università di Grenoble. — Id. id.

Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale.

Saccardo (Andrea), Professore nella R. Università di Padova. — 8 Febbraio 1885.
Pirotta (Romualdo), Professore nella R. Univ. di Roma. — 15 Maggio 1892.
Strasburger (Edoardo), Professore nell'Univ. di Bonn. — 3 Dicembre 1893.
Goebel (Carlo), Professore nell'Università di Monaco. — 13 Febbraio 1898.
Penzig (Ottone), Professore nell'Università di Genova. — Id. id.
Schwendener (Simone), Professore nell'Univ. di Berlino. — Id. id.
Wiesner (Giulio), Professore nella I. R. Univ. di Vienna. — 14 Giugno
Klebs (Giorgio), Professore nell'Università di Halle. — Id. id.
Belli (Saverio), Professore nella R. Università di Cagliari. — Id. id.
Baccarini (Pasquale), Professore nell' Istituto di Studi superiori in Firenze. — 15 Maggio 1910.
Mangin (Luigi), Membro dell' Istituto di Francia, Professore al Museo di Storia naturale di Parigi. — Id. id.

Sezione di Zoologia, Anatomia e Fisiologia comparata.

Sclater (Filippo **Lutley**), Segretario della Società Zoologica di Londra. — 25 Gennaio 1885.
Chauveau (G. B. Augusto), Membro dell'Istituto di Francia, Professore alla Scuola di Medicina di Parigi. — 1° Dicembre 1889.

Waldeyer (Guglielmo), Professore nell'Università di Berlino. — Id. id.

Guenther (Alberto), Londra. — 3 Dicembre 1893.

Roux (Guglielmo), Professore nell'Università di Halle. — 13 Febbraio 1898.

Minot (Carlo Sedgwick), Professore nell' " Harvard Medical School „ di Boston Mass. (S. U. A.). — 28 Gennaio 1900.

Boulenger (Giorgio Alberto), Assistente al Museo di Storia Naturale di Londra. — 28 Gennaio 1900.

Marchand (Felice), Professore nell'Università di Leipzig. — 14 Giugno 1903.

Weismann (Augusto), Professore nell'Università di Freiburg i. Br. (Baden). — 5 Marzo 1905.

Lankester (Edwin Ray), Direttore del *British Museum of Natural History*. — 5 Marzo 1905.

Dastre (Alberto Giulio), Membro dell' Istituto di Francia, Professore nell'Università di Parigi. — 5 Marzo 1905.

Ramôn y Cajal (Santiago), Professore nell' Università di Madrid. — 15 Maggio 1910.

Metchnikoff, Vice Direttore dell' Istituto Pasteur in Parigi. — Id. id.

Kossel (Albrecht), Professore nell'Università di Heidelberg. — Id. id.

Ehrlich (Paolo), Professore, Direttore dell'Istituto sperimentale di terapia in Frankfurt a. M. — Id. id.

CLASSE DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Direttore.

Manno (Barone D. Antonio), Senatore del Regno, Membro e Segretario della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria, Membro del Consiglio degli Archivi e dell'Istituto storico italiano, Commissario di S. M. presso la Consulta araldica, Bibliotecario e Conservatore del Medagliere di S. M. (Incaricato), Dottore *honoris causa* della R. Università di Tübingen, Gr. Uffiz. ✻ e Gr. Cord. ✠, Balì Gr. Cr. d'on. e devoz. del S. M. O. di Malta, decorato di Ordini stranieri. — *Torino, Via Ospedale, 19.*
Rieletto alla carica il 24 aprile 1910 - 12 maggio 1910.

Segretario.

De Sanctis (Gaetano), Dottore in Lettere, Professore di Storia antica nella R. Università di Torino, Socio ordinario della Società Archeologica italiana e della Pontificia Accademia romana di Archeologia, Socio onorario della Associazione archeologica romana, ✠. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 44.*
Rieletto alla carica il 24 aprile 1910 - 12 maggio 1910.

ACCADEMICI RESIDENTI

Rossi (Francesco), Dottore in Filosofia, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei in Roma, ✠. — *Torino, Via Gioberti, 30.*
10 Dicembre 1876 - 28 dicembre 1876. — Pensionato 1° agosto 1884.

Manno (Barone D. Antonio), *predetto.*
17 Giugno 1877 - 11 luglio 1877. — Pensionato 28 febbraio 1886.

Carle (Giuseppe), Senatore del Regno, Dottore aggregato alla Facoltà di Giurisprudenza e Professore di Filosofia del Diritto nella R. Università di Torino, Socio Nazionale della R. Accademia dei Lincei, ✠, Uff. ✻, Comm. ✠. — *Torino, Piazza Statuto, 15.*
7 Dicembre 1879 - 1° gennaio 1880. — Pensionato 4 agosto 1892.

Graf (Arturo), Professore di Letteratura italiana nella R. Università di Torino, Membro della Società Romana di Storia patria, Socio onorario della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo, Socio corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova, dell'Ateneo di Brescia, della R. Accad. dei Lincei, ecc., Comm. ✻ e ✠. — *Torino, Via Bricherasio, 11.*
15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 20 maggio 1897.

Boselli (Paolo), *predetto.*
15 Gennaio 1888 - 2 febbraio 1888. — Pensionato 13 ottobre 1897.

Cipolla (Conte Carlo), Dottore in Filosofia, Professore emerito nella R. Università di Torino, Prof. di Storia moderna nel R. Istituto di Studi Superiori in Firenze, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio effettivo della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Accademia delle Scienze di Monaco (Baviera), del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti e della R. Deputazione Storica toscana, Comm. ✠. — *Firenze, Via Lorenzo il Magnifico, 8.*

15 Febbraio 1891 - 15 marzo 1891. — Pensionato 4 marzo 1900.

Allievo (Giuseppe), Dottore aggregato in Filosofia, Professore di Pedagogia e Antropologia nella R. Università di Torino, Socio onorario della R. Accademia delle Scienze di Palermo, dell'Accademia di S. Anselmo di Aosta, dell'Accademia Dafnica di Acireale, della Regia Imperiale Accademia degli Agiati di Rovereto, dell'Arcadia, della R. Accademia di Lucca, dell'Accademia degli Zelanti di Acireale e dell'Accademia cattolica panormitana, Uff. ✱, Gr. Uff. ✠. — *Torino, Piazza Statuto, 18.*

13 Gennaio 1895 - 3 febbraio 1895. — Pensionato 20 giugno 1901.

Renier (Rodolfo), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore di Storia comparata delle Letterature neolatine nella R. Università di Torino, Socio attivo della R. Commissione dei testi di lingua; Socio non residente dell'I. R. Accademia degli Agiati di Rovereto; Socio corrispondente del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Deputazione Veneta di Storia patria, di quella per le Marche, di quella per l'Umbria, di quella per l'Emilia e di quella per le Antiche Provincie e la Lombardia, della Società storica abruzzese e della Commissione di Storia patria e di Arti belle della Mirandola, della Deputazione municipale ferrarese di storia patria, della R. Accademia Virgiliana di Mantova, dell'Accademia di Verona, della R. Accademia di Padova, dell'Ateneo Veneto e di quello di Brescia; Membro della Società storica lombarda e della Società Dantesca italiana; Socio onorario dell'Accademia Etrusca di Cortona, della R. Accademia di scienze e lettere di Palermo, dell'Accademia Cosentina e dell'Accademia Dafnica di Acireale, Uffiz. ✱, Comm. ✠. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 90.*

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 30 ottobre 1906.

Pizzi (Nobile Italo), Dottore in Lettere, Professore di Persiano e Sanscrito nella R. Università di Torino, Socio corrispondente della Società Colombaria di Firenze, Dottore onorario dell'Università di Lovanio, Socio corrispondente dell'Ateneo Veneto, dell'Accademia Petrarchesca di Arezzo, dell'Accademia Dafnica di Acireale, dell'Accademia dell'Arcadia di Roma, ✱, ✠. — *Torino, Corso Vittorio Emanuele, 16.*

8 Gennaio 1899 - 22 gennaio 1899. — Pensionato 16 giugno 1907.

Chironi (Dott. Giampietro), Senatore del Regno, Professore ordinario di Diritto Civile nella R. Università di Torino, Direttore della R. Scuola superiore di studi applicati al Commercio in Torino, Dottore aggregato della Facoltà di Giurisprudenza nella R. Università di Cagliari, Membro del Consiglio superiore dell'Istruzione pubblica, del Consiglio superiore per l'Istruzione commerciale, agricola, industriale, della Commissione

Reale per la riforma del Diritto privato, Socio corrispondente dell'Accademia di Legislazione di Tolosa (Francia), dell'Associazione internazionale di Berlino per lo studio del Diritto comparato, dell'Accademia Americana di Scienze sociali e politiche, ✻. Comm. ✠. — *Torino, Via Monte di Pietà, 26.*

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900. - Pensionato 29 agosto 1909.

De Sanctis (Gaetano), *predetto.*

21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

Ruffini (Francesco), Dottore in Leggi, Rettore della R. Università di Torino, Membro corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Professore di diritto ecclesiastico, ✻, Comm. ✠. — *Torino, Via Principe Amedeo, 22.*

21 Giugno 1903 - 8 luglio 1903.

Stampini (Ettore), Dottore in Lettere ed in Filosofia, Professore ordinario di Letteratura latina e Direttore della Biblioteca della Facoltà di Filosofia e Lettere nella R. Università di Torino, Presidente del Circolo di Milano per le ispezioni delle scuole medie, Socio corrispondente della R. Accademia Peloritana, dell'Ateneo di Brescia e dell'Accademia Virgiliana di scienze, lettere ed arti di Mantova, Direttore della Rivista di Filologia e d'Istruzione classica, Decorato della Medaglia del Merito Civile di 1ª Classe della Repubblica di S. Marino, Uff. ✻, Comm. ✠. — *Piazza Vittorio Emanuele I, 10.*

20 Maggio 1906 - 9 giugno 1906.

D'Ercole (Pasquale), Dottore in Filosofia, Professore di Filosofia teoretica nella R. Università di Torino, Membro della Società Filosofica di Berlino, Socio corrispondente della R. Accademia delle Scienze morali e politiche di Napoli, Uff. ✻, Comm. ✠. — *Corso Siccardi, 26.*

17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Brondi (Vittorio), Dottore in Legge, Professore di Diritto amministrativo e Scienza dell'Amministrazione nella R. Università di Torino, Membro del Consiglio Superiore di assistenza e beneficenza pubblica, Socio corrispondente onorario del Circolo di Studi sociali di Firenze, ✻, Comm. ✠. — *Torino, Via Montebello, 26.*

17 Febbraio 1907 - 19 Aprile 1907.

Sforza (Conte Giovanni), Vice-Presidente della R. Deputazione di Storia patria di Modena, per la Sotto-Sezione di Massa e Carrara, Socio effettivo di quelle delle antiche Provincie e della Lombardia, di Parma e Piacenza, e della Toscana, Socio onorario della R. Deputazione Veneta di Storia patria, Corrispondente della R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti di Modena, dell'Ateneo di Brescia e della Società Ligure di Storia patria, Socio ordinario non residente della R. Accademia Lucchese, Socio onorario della R. Accademia di Belle Arti di Carrara, Membro d'onore dell'*Académie Chablaisienne* di Thonon-les-Bains, Membro aggregato dell'*Académie des Sciences, Belles Lettres et Arts de Savoie*, Socio delle R. Commissione per i testi di lingua, Membro della Commissione Araldica Piemontese, della Società di Storia patria di Vignola, della Commissione municipale di Storia patria e belle arti della Mirandola, della

Commissione senese di Storia patria e della Società storica di Carpi, Corrispondente della R. Accademia Valdarnese del Poggio in Montevarchi, della Società Georgica di Treia e della Colombaria di Firenze, Consigliere del Comitato Piemontese per la Storia del Risorgimento italiano, ecc., ecc., Presidente onorario della R. Accademia dei Rinnovati di Massa, Soprintendente del R. Archivio di Stato di Torino, Gr. Uff. dell'Ordine del Medjidiè, Uff. ✻ e Comm.. ⚜. — *Via S. Dalmazzo, 24.*

17 Febbraio 1907 - 19 aprile 1907,

Einaudi (Luigi), Dottore in legge, Professore di Scienza delle finanze e Diritto finanziario della R. Università di Torino ed incaricato di economia e legislazione industriale nel R. Politecnico di Torino, Membro della Regia Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie e la Lombardia, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e di quella dei Georgofili. — *Via Giusti, 4.*

10 Aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Baudi di Vesme (Alessandro dei conti), Dottore in Legge, Direttore della R. Pinacoteca di Torino, Vice Presidente della Regia Deputazione sovra gli Studi di Storia patria per le antiche provincie. — *Via dei Mille, 54.*

10 Aprile 1910 - 1° maggio 1910.

Schiaparelli (Ernesto), Dottore in lettere, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei, del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Membro onorario dell'Istituto Khediviale egiziano e della Società Asiatica di Francia, della Società di Archeologia biblica di Londra, Direttore del R. Museo di Antichità di Torino, ✻, Comm. ⚜.

10 Aprile 1910 - 1° maggio 1910.

ACCADEMICI NAZIONALI NON RESIDENTI

Villari (S. E. Pasquale), Senatore del Regno, Socio dell'Istituto Storico di Roma, Presidente del Consiglio degli Archivi, Professore di Propedeutica Storica e Presidente della Sezione di Filosofia e Lettere nell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio residente della R. Accademia della Crusca, Presidente della R. Accademia dei Lincei, Socio nazionale della R. Accademia di Napoli, della R. Accademia dei Georgofili, della Pontaniana di Napoli, Presidente della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, Socio di quella per le provincie di Romagna, Socio straordinario del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, della R. Accademia di Baviera, Socio straniero dell'Accademia di Berlino, dell'Accademia di Scienze di Gottinga, della R. Accademia Ungherese, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Scienze morali e politiche), Dott. on. in Legge della Università di Edimburgo, di Halle, Dott. on. in Filosofia dell'Università di Budapest, Professore emerito della

R. Università di Pisa, Cav. dell'Ordine supremo della SS. Annunziata, Gr. Uffiz. ✻ e Gr. Cord. ♔, Cav. ✠, Cav. del Merito di Prussia, Membro del Consiglio dell'Ordine Civile di Savoia e del Consiglio dell'Ordine dei Ss. Maurizio e Lazzaro, ecc.

16 Marzo 1890 - 30 marzo 1890.

Comparetti (Domenico), Senatore del Regno, Professore emerito dell' Università di Pisa e dell'Istituto di Studi superiori, pratici e di perfezionamento in Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, della R. Accademia delle Scienze di Napoli, Socio corrispondente dell'Accademia della Crusca, del R. Istituto Lombardo e del R. Istituto Veneto, Membro della Società Reale pei testi di lingua, Socio straniero dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) e corrispondente della R. Accademia delle Scienze di Monaco, di Vienna, di Copenhagen e di Pietroburgo, Dottore *ad honorem* delle Università di Oxford e di Cracovia, Uff. ✻, Comm. ♔, Cav. ✠. — *Firenze, Via Lamarmora, 20.*

20 Marzo 1892 - 26 marzo 1892.

D'Ancona (Alessandro), Senatore del Regno, già Professore di Letteratura italiana nella R. Università e già Direttore della Scuola normale superiore in Pisa, Membro della Deputazione di Storia patria per la Toscana, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Socio corrispondente dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles Lettres), della R. Accademia di Copenhagen, dell' Accademia della Crusca, del R. Istit. Lombardo di Scienze e Lettere, del R. Istituto Veneto, della R. Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti di Napoli e della R. Accademia di Lucca, Doct. Philosoph. (honoris causa) dell'Università di Berlino, Cav. della Legione d'Onore, Cav. ✠, Gr. Uff. ✻, Comm. ♔. — *Firenze, Piazza Savonarola, 2.*

20 Febbraio 1898 - 3 marzo 1898.

Savio (Sacerdote Fedele), Professore di Storia ecclesiastica nella Pontificia Università Gregoriana, Membro della R. Deputazione sovra gli studi di Storia patria per le Antiche Provincie e la Lombardia, Socio della Società Storica Lombarda. — *Roma, Via del Seminario, 120.*

20 Maggio 1900 - 31 maggio 1900.

Scialoja (Vittorio), Senatore del Regno, Dottore in Leggi, Professore ordinario di Diritto romano nella R. Università di Roma, Professore onorario della Università di Camerino, Socio corrispondente della R. Accademia dei Lincei e della R. Accademia di Napoli, di Bologna, di Modena e di Messina, Socio onorario della R. Accademia di Palermo, ecc., Gr. Uffiz. ✻, ♔. — *Roma, Piazza Grazioli, 5.*

29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Rajna (Pio), Dottore in Lettere, Dottore " honoris causa „ dell'Università di Giessen, Professore ordinario di lingue e letterature neo-latine nel R. Istituto di Studi superiori di Firenze, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei, Accademico residente della Crusca, Socio Urbano della Società Colombaria, Socio onorario della R. Accademia di Padova, della Società Dantesca americana, della " New Language Association

of America „, della " Société néophilologique „ dell'Università di Pietroburgo, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della Società Reale di Napoli, della R. Accademia di Palermo, della R. Accademia delle Scienze di Berlino, della R. Società delle Scienze di Göttingen, dell'Istituto di Francia (Académie des Inscriptions et Belles-Bettres), della Società Reale di Scienze e Lettere di Göteborg, dell'Accademia R. Lucchese e della R. Deputazione di Storia Patria per la Toscana, ✠, Uff. ✱, Comm. ♔. — *Firenze, Piazza d'Azeglio, 13.*
29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Kerbaker (Michele), Dottore in lettere, Professore di Storia comparata delle lingue classiche e incaricato di Sanscrito nella R. Università di Napoli, Socio ordinario della R. Accademia dei Lincei, Socio residente della Società Reale di Napoli, della R. Accademia Pontaniana, Membro della Società Asiatica italiana di Firenze, Socio corrispondente del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, Comm. ✱ e ♔. — *Napoli, Vomero, Via Scarlatti, 60.*
26 Marzo 1905 - 27 aprile 1905.

Guidi (Ignazio), Dottore, Professore di Ebraico e di Lingue semitiche nella R. Università di Roma, Socio e Segretario della Classe di scienze morali, storiche e filologiche della R. Accademia dei Lincei, ✠, Uff. ✱, ♔, C. O. St. P. di Svezia. — *Roma, Botteghe Oscure, 24.*
12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Pigorini (Luigi), Direttore dei Musei Preistorico e Kircheriano, Professore nella R. Università di Roma, Socio nazionale della R. Accademia dei Lincei. — *Via del Collegio Romano, 26.*
12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

ACCADEMICI STRANIERI

Meyer (Paolo), Membro dell' Istituto, Professore nel Collegio di Francia, Direttore dell'*École des Chartes* (Parigi). — 4 Febbraio 1883 - 15 febbraio 1883.

Maspero (Gastone), Membro dell'Istituto, Professore nel Collegio di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893 - 16 marzo 1893.

Brugmann (Carlo), Professore nell'Università di Lipsia. — 31 Gennaio 1897 - 14 febbraio 1897.

Bréal (Michele Giulio Alfredo), Membro dell'Istituto di Francia (Accademia delle Iscrizioni e Belle Lettere) (Parigi). — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Wundt (Guglielmo), Professore nell'Università di Lipsia. — 29 Marzo 1903 - 9 aprile 1903.

Foerster (Wendelin), Professore nell' Università di Bonn, Comm. ✱. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Duchesne (Luigi), Membro dell' Istituto di Francia, Direttore della Scuola Francese in Roma. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

Saleilles (Raimondo), Professore nell'Università di Parigi. — 12 Aprile 1908 - 14 maggio 1908.

CORRISPONDENTI

Sezione di Scienze Filosofiche.

Pinloche (Augusto), Prof. nel Liceo Carlomagno di Parigi. — 15 Marzo 1896.
Chiappelli (Alessandro), Prof. nella R. Università di Napoli. — 15 Marzo 1896.
Masci (Filippo), Professore nella R. Università di Napoli. — 14 Giugno 1903.
Zuccante (Giuseppe), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 Maggio 1908.

Sezione di Scienze Giuridiche e Sociali.

Schupfer (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Roma. — 14 Marzo 1886.
Gabba (Carlo Francesco), Prof. nella R. Univ. di Pisa. — 3 Marzo 1889.
Buonamici (Francesco), Senatore del Regno, Prof. nella R. Università di Pisa. — 16 Marzo 1890.
Dareste (Rodolfo), dell'Istituto di Francia (Parigi). — 26 Febbraio 1893.
Bonfante (Pietro), Prof. nella R. Università di Pavia. — 21 Giugno 1903.
Toniolo (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Pisa. — 10 Giugno 1906.
Brandileone (Francesco), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Brini (Giuseppe), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Fadda (Carlo), Prof. nella R. Università di Napoli. — Id. id.
Filomusi-Guelfi (Francesco), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.
Polacco (Vittorio), Prof. nella R. Università di Padova. — Id. id.
Stoppato (Alessandro), Prof. nella R. Università di Bologna. — Id. id.
Simoncelli (Vincenzo), Prof. nella R. Università di Roma. — Id. id.

Sezione di Scienze storiche.

Birch (Walter de **Gray**), del Museo Britannico di Londra. — 14 Marzo 1886.
Chevalier (Canonico Ulisse), Romans. — 26 Febbraio 1893.
Bryce (Giacomo), Londra. — 15 Marzo 1896.
Patetta (Federico), Prof. nella R. Università di Torino. — 15 Marzo 1896.
Venturi (Adolfo), Professore nella R. Università di Roma. — 31 Maggio 1908.
Luzio (Alessandro), Direttore del R. Archivio di Stato in Mantova. — Id. id.

Sezione di Archeologia ed Etnografia.

Lattes (Elia), Membro del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere (Milano). — 14 Marzo 1886.
Poggi (Vittorio), Bibliotecario e Archivista civico a Savona. — 2 Gennaio 1887.
Palma di Cesnola (Cav. Alessandro), Membro della Società degli Antiquari di Londra (Firenze). — 3 Marzo 1889.
Mowat (Roberto), Membro della Società degli Antiquari di Francia (Parigi). — 16 Marzo 1890.

Barnabei (Felice), Roma. — 28 Aprile 1895.
Gatti (Giuseppe), Roma. — 15 Marzo 1896.
Orsi (Paolo), Professore, Direttore del Museo Archeologico di Siracusa. — 31 Maggio 1908.
Patroni (Giovanni), Professore nella R. Università di Pavia. — Id. id.

Sezione di Geografia.

Dalla Vedova (Giuseppe), Professore nella R. Università di Roma. — 28 Aprile 1895.
Bertacchi (Cosimo), Professore nella R. Università di Palermo. — 21 Giugno 1903.

Sezione di Linguistica e Filologia orientale.

Marre (Aristide), Vaucresson (Francia). — 1° Febbraio 1885.
Amélineau (Emilio), Professore nella *École des Hautes Études* di Parigi. — 28 Aprile 1895.
Salvioni (Carlo), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 31 Maggio 1908.
Lasinio (Fausto), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.
Parodi (Giacomo Ernesto), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — Id. id.
Schiaparelli (Celestino), Professore nella R. Università di Roma. — Id. id.
Teza (Emilio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.

Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia.

Del Lungo (Isidoro), Socio residente della R. Accademia della Crusca (Firenze). — 16 Marzo 1890.
Novati (Francesco), Professore nella R. Accademia scientifico-letteraria di Milano. — 21 Giugno 1903.
Rossi (Vittorio), Professore nella R. Università di Padova. — id. id.
Boffito (Giuseppe), Professore nel Collegio delle Querce in Firenze. — id. id.
D'Ovidio (Francesco), Senatore del Regno, Professore nella R. Università di Napoli. — id. id.
Biadego (Giuseppe), Bibliotecario della Civica di Verona. — id. id.
Cian (Vittorio), Professore nella R. Università di Pavia. — id. id.
Vitelli (Gerolamo), Professore nel R. Istituto di studi superiori e di perfezionamento in Firenze. — 31 Maggio 1908.
Flamini (Francesco), Professore nella R. Università di Pisa. — Id. id.
Gorra (Egidio), Professore nella R. Università di Padova. — Id. id.
Fraccaroli (Giuseppe), Professore. Milano. 26 Febbraio 1911.
Sabbadini (Remigio), Professore nella R. Accademia scientifico letteraria di Milano. Id. id.
Zuretti (Carlo Oreste), Professore nella R. Università di Palermo. — Id. id.

MUTAZIONI

AVVENUTE

nel Corpo Accademico dal 31 Dicembre 1910
al 31 Dicembre 1911.

ELEZIONI

SOCI

Sforza (Giovanni). . } Eletti nell'adunanza del 15 gennaio 1910 della
Carle (Giuseppe) . . } Classe di Scienze morali, storiche e filologiche a delegati della Classe nel Consiglio di Amministrazione dell'Accademia.

Naccari (Andrea). Rieletto alla carica triennale di Direttore della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali nell'adunanza del 22 gennaio 1911 e epprovata la elezione con R. Decreto 5 febbraio 1911.

Fraccaroli (Giuseppe). Professore a Milano.
Sabbadini (Remigio). Professore nell'Accademia scientifico letteraria in Milano.
Zuretti (Carlo Oreste). Professore nell'Università di Palermo.

Eletti Soci corrispondenti nella Sezione di Filologia, Storia letteraria e Bibliografia della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche nell'adunanza del 26 febbraio 1911.

Renier (Rodolfo) . . } Eletti nell'adunanza della Classe di Scienze morali,
Graf (Arturo) . . . } storiche e filologiche del 26 marzo 1911, per com-
Sforza (Giovanni). . } porre la Commissione del premio Gautieri per la Letteratura (triennio 1908-1910).

MORTI

12 Gennaio 1911.

Jellinek (Giorgio), Socio straniero della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

1° Marzo 1911.

Hoff (Giacomo Enrico van't). Socio straniero della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

24 Marzo 1911.

Dareste (Rodolfo), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze giuridiche e sociali).

7 Maggio 1911.

Cavalli (Ernesto), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche matematiche e naturali (Sezione di Matematiche applicate).

13 Maggio 1911.

Bonatelli (Francesco), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze filosofiche).

7 Giugno 1911.

Tocco (Felice), Socio nazionale non residente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche.

31 Luglio 1911.

Gloria (Andrea), Socio corrispondente della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche (Sezione di Scienze storiche).

24-25 Settembre 1911.

Michel-Levy (Augusto), Socio corrispondente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Mineralogia, Geologia e Paleontologia).

10 Novembre 1911.

Spezia (Giorgio), Socio nazionale residente della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali.

10 Dicembre 1911.

Hooker (Sir Joseph **Dalton**), Socio corrispondente della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali (Sezione di Botanica e Fisiologia vegetale).

PUBBLICAZIONI PERIODICHE RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

Dal 1° Gennaio al 31 Dicembre 1911.

NB. Le pubblicazioni notate con * si hanno in cambio:
quelle notate con ** si comprano: e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

* **Aix en Provence.** Université. Annales: Faculté de Droit, T. III, (1909); IV, Nos. 1-2 (1910). —Faculté de Lettres, T. IV, (1910), Nos. 1-2.

* **Alba Pompeia.** Società di Studi storici ed artistici: Rivista bimestrale, anno III, N. 5, 6; IV, 1-2.

Albany (N. Y.) Report to the Governor of the Advisory Board of Consulting Engineers, 1910.

America. American Philological Association. Transactions, 1909, vol. XL.

— American (The) Urological Association: Transactions; Ninth Annual Meeting at St. Louis Missouri June 6th and 7th 1910.

* **Amsterdam.** Royale Académie des sciences. Verhandelingen Afd. Natuurkunde, 2e Sect., Dl. XV, N. 2; XVI, 1-3; — Verhandelingen Afd. Letterkunde, N. R., Dl. X, 3; XI, 1-4. — Verslage van de gewone Vergaderingen der Wisen Natuurkundig Afd. van 29 mai-24 december 1909 tot 29 april 1910; Dl. XVIII. — Proceedings of Section of Science, vol. XII, Jaarboek, 1909. — Prijsvers Pomponia Graecina: De Siciliae et Calabriae excidio Carmen; Comoedia.

* **Angers.** Société d'Études Scientifiques; Bulletin. Nouv. Sér., XXXIXe an., 1909.

* **Baltimore.** Johns Hopkins University. American Journal of Mathematics, vol. XXXII, Nos. 3, 4; XXXIII, 1, 2. — American Chemical Journ., vol. XLIII, 6; XLIV; XLV, 1-4. — American Journal of Philology, vol. XXI, 2-3; XXII, 1. — Historical and Political Science, Ser. XXVIII, Nos. 1, 2, 4; Circular, 1910, Nos. 5-10; 1911, 1-3.

— Johns Hopkins Hospital. Reports, vol. XVI; 8°.

— Peabody Institute: Forty-Fourth Annual Report, June 1, 1911.

* **Barcelona.** R. Academia de Ciencias y Artes. Nómina del Personal académico, año Acc. 1910-1911. — Boletín, III época, vol. III, N. 2. — Memorias, III época, vol. VIII, N. 24-31; X, 1-2.

Basel. Universität. Festschrift zur Feier des 450 jährigen Bestehens. Herausgegeben von Rektor und Regenz. Basel, 1910, 1 vol. 8°. — Tesi N. 128, 1909-10, 1910-11.

* **Bassano**. Museo Civico. Bollettino, anno VII (1910), N. 4; VIII, 1-3.

* **Batavia**. Bataviaasch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen. Tijdschrift voor indische Taal. Land en Volkenkunde. Deel LII, Afl. 3-6; LIII. — Verhandelingen, Deel LVIII, Stuk 3, 4; LIX, 1-2 1ª parte. — Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandisch Indie, Deel LXIX. — Notulen, van de algemeene en directievergaderingen, Deel XLVIII, Afl. 3 en 4; XLIX, 1, 2.

— K. Magnetisch en Meteorologisch Observatorium. Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indie. Eev en dertigste Jaargang 1909, Deel I, Dagelijksche Regenval; II. Uitkomsten.

* **Bergen**. Bergens Museums Aarbog, 1910, 1911, 1-2 det hefte. — Aarsberetning, 1910. — An Account of the Crustacea of Norway: vol. V, Copepoda pts. XXXI-XXXVI.

* **Berkeley**. University of California: Publications: Chronicle, an Official Record, vol. XII, 2-4; XIII. — Library Bulletin, N. 17. — American Archaeology and Ethnology, vol. V, N. 4, 5; VII, 5; VIII, 6; IX, 2. — Botany, vol. IV, 2-10. — Economics, vol. II. — Geology, vol. V, 27-29; VI, 1-4; Modern Philology, vol I, N. 4; II, N. 1. — Physiology, vol. IV, 1-4. — Zoology, vol. VI, 7-14; VII, 1-6. — Memoirs, vol. II.

* **Berlin**. K. Preussische Akademie der Wissenschaften. Abhandlungen: Physikalisch-Mathematische Classe, Jahrgang 1910. Philosophisch-historische Classe, Jahrgang 1910. Sitzungsberichte, 1910, N. XLI-XLIV; 1911, I-XXXVIII.

— Association Géodésique internationale: Comptes-rendus des séances de la seizième conférence générale: II Vol. Reports spéciaux et Rapports sur les travaux du Bureau central en 1908, 1909 et 1910, avec 17 cartes et planches. Berlin, 1911, 4°.

** — Historische Gesellschaft. Jahresberichte der Geschichtswissenschaft, XXXI Jahrgang, 1908.

* **Bern**. Naturforschende Gesellschaft. Mitteilungen. 1910, Nr. 1740-1769.

* **Beyrouth**. Université de St.-Joseph. Al-Machriq. Revue catholique orientale mensuelle de Sciences, Lettres et Arts. Ann. XIV (1911), N. 1-12.

Biella. Biblioteca Municipale. Catalogo, 1° Suppl. (dal 1° gennaio 1908 al 31 dicembre 1910); Biella, 1911, 4°.

* **Bologna**. R. Accademia delle Scienze dell'Istituto. Classe di Scienze fisiche. Memorie, Ser. VI, t. VII (1909-1910), e Supplemento. — Rendiconto, N. S., vol. XIV (1909-1910).

* — Società Medico-Chirurgica e Società Medica. Bullettino, Ser. VIII, vol. VIII, fasc. 10-12, IX, X, vol. XI, fasc. 1, 11.

* — Biblioteca Comunale. L'Archiginnasio. An. V, 1910, N. 6; VI, 1-5.

* **Bordeaux**. Société des sciences physiques et naturelles. Mémoires, 6e sér. T. V, 1er Cahier. Procès-verbaux des Séances, an. 1909-1910. — Observations météorologiques, 1909.

Bordeaux. Faculté des Lettres et Universités du Midi. Bulletin hispanique, T. XIII (1911). — Revue des études anciennes, T. XIII (1911). — Bulletin italien, T. XI (1911).

* **Boston**. American Academy of Arts and Sciences. Vol. XLV, Nos. 16-21; XLVI, 1-17.

— Massachusetts General Hospital. Publications, vol. III (1910), N. 2. — Medical and Surgical Papers.

* **Brescia**. Ateneo. Commentari per l'anno 1910.

* **Brooklyn**, N. Y. Museum of Brooklyn Institute of Arts and Sciences. Science Bulletin, vol. I, N. 17. Index, vol. I.

* **Bruxelles**. Académie Royale de Belgique. Annuaire, 1911. — Bulletin des sciences, 1910, N. 7-12; 1911, 1-7. — Mémoires, Collect. in-8°, 2e Sér., T. II, fasc. 7-8, T. III, 1. — Mémoires, Collect. in-4°, 2e Sér., T. II, fasc. 4, III, fasc. 2-4. — Tables générales du recueil des Bulletins, 3e sér., T. XXXI-XXXVI. — Biographie nationale, T. XX, 3 fasc.

* — Société d'Archéologie. Annuaire, T. XXII, 1911. — Annales, T. XXIV (An. 1910), livr. 1-4, XXV (An. 1911), 1.

* — Musée Royal d'Histoire naturelle de Belgique. Mémoires: M. Leriche, Les poissons oligocènes de la Belgique, An. 1910, 4°. — R. Kidston, Les végétaux houillers recueillis dans le Hainaut Belge, 1909. — J. Lambert, Description des Échinides crétacés de la Belgique, 1910. — R. H. Traquair, Les Poissons wealidiens de Bernissart, 1910.

* — Observatoire Royal de Belgique. Annuaire astronomique pour 1911-1912. — Annuaire météorologique pour 1911. — Annales, Nouv. sér., Annales astronomiques, T. XII, fasc. 2; XIII, 1. — Physique du Globe, T. V, fasc. 1.

* — Société des Bollandistes. Analecta Bollandiana, T. XXIX, fasc. 4; XXX, fasc. 1-3.

* — Société Royale de Botanique de Belgique: Catalogue de la Bibliothèque Collective réunie au Jardin Botanique de l'État dressé par P. van Aerdschot, I. — Bulletin, T. XLVII (1910), fasc. 1-4.

* — Société Entomologique de Belgique. Mémoires, T. XVIII. — Annales, T. LIV.

* — Société Géolog. de Belgique. Annales, T. XXXVI, 4e liv.; XXXVII, 1-3. — Mémoires, T. II, 2e et dernière livr.

* — Société Belge de Géologie, de Paléontologie et d'Hydrologie. Bulletin: Mémoires, T. XXIV, 1910, fasc. 1-4. — Nouveaux Mémoires, sér. in 4°, Mémoire N. 3, 1910. — Procès-Verbal, T. XXIV, 20 avril-20 décembre 1910; XXV, 17 janvier-23 mai 1911.

* — Société Royale Zoologique et Malacologique de Belgique. Annales, T. XLIV (1909); XLV (1910).

* **București**. Academia Română: Analele: Partea administrativa și desbaterile, Ser. II, T. XXXI (1908-1909); XXXII (1909-1910). — Memoriile secțiunii historice, Ser. II, T. XXXI (1908-1909), XXXII (1909-1910). — Memoriile secțiunii literare, Ser. II, T. XXXII (1909-1910). — Memoriile secțiunii științifice, Ser. II, T. XXXI (1908-1909); XXXII (1909-

1910). — Indice Alfabetic al cuprinsului volumelor, XXI-XXX. — Discursuri de receptiune, XXXII, XXXIII. — Documente privitoare la Istoria Românilor, vol. XIII. — Din vieata poporului Român culegeri și studii, IV-VIII, X. — Publicațiunile fondului Vasile Adamach, T. II (1901-1906); IV (1906-1910). — Dr. Gr. Antipa, Fauna Ichtiologică a României. — C. Litzica, Catalogul manuscriptelor grecești. — D. Da Lezze, Historia turchesca (1300-1514). — N. Petrescu-Comnen, Studiu asupra interventiunii Statului intre capital și muncă. — J. Bianu și N. Hodos, Bibliografia românească veche 1508-1530, T. II, fasc. V (1796-1806); VI (1806-1808). — Istoria Romana de Titus Livius traducere de Nd. Locusteanus și I. S. Petrescu, T. IV, Cart. XXXI-XL.

* **București**. Societății de Științe. Buletinul. Anul XIX (1910), N. 6; XX (1911), 1-5.

— Institutul Meteorologic: Buletinul Lunar al Observatiunilor Meteorologice din România, Anul. XVI-XVIII, 1907-1909.

Budapest. Kgl. Ungarische Geologische Reichsanstalt der Länder der ungarischen Krone. Erläuterungen, Blatt: Zone 22, Kol. XXIX (1:75000); 25, XXV (1:75000); Mitteilungen, XVII. Bd., 2 Heft; XVIII, 1, 2; XIX, 1. Jahresbericht, 1908. — Publikation: Detaillierte Mitteilungen über die auf dem Gebiete des ungarischen Reiches befindlichen Steinbrüche; von Fr. Schafarzik. — Chemische Analyse der Trinkwässer Ungarns; von J. Toth.

* — Ungarische geologische Gesellschaft. Földtani közlöny (Geologische Mitteilungen), XL kötet (1910), 7-12 füzet; XLI (1911), 1-8.

* **Buenos Aires**. Museo Nacional. Anales, Ser. III, T. XIII, XIV; 8°.

* — Sociedad Científica Argentina. Anales, T. LXIX, Entrega 5-6; LXX, LXXI, LXXII, 1-2.

— Dirección General de Estadística de la Provincia. Boletín mensual, an. X (1909), N. 113; XI (1910), 114-118; XII (1911), 119-123.

— Oficina Meteorológica Argentina: Anales. Observaciones de las Islas Orcadas en el Año 1904. — Climate of the Argentine Republic.

* — Bulletin mensuel de Statistique municipale de la Ville: an. XXIV^e^, 1910, octobre-décembre, N. 10-12; XXV^e^, 1911, 1-10.

* **Caire**. Université Égyptienne: Bulletin de la Bibliothèque. Section des langues européennes, 1^e^ ann. (1910), 5 et 6 fasc.; 2^e^ ann. (1911), 1-2. — Règlement de la Faculté des lettres. Communication de S. A. le prince Amed Fouad Pacha, Président et Recteur.

* **Calcutta**. Geological Survey of India. Records, vol. XL, p. 1-4. — Memoirs, Palaeontologica Indica, Ser. XV, vol. IV, fasc. 3.

* — Asiatic Society of Bengala. Bibliotheca Indica. Collection of Oriental Works, n. ser., N. 1201, 1203-1213, 1217, 1218, 1220. — Memoirs, vol. II, N. 10, 11; III, 1. — Journal and Proceedings, vol. V, N. 1, 11; VI, 1-6.

— Board of Scientific Advice for India. Annual Report for the year 1909-10.

— Imp. Department of Agriculture. Report on the Progress of Agriculture in India for 1909-10, Calcutta, 8°.

* **Cambridge**. Cambridge Philosophical Society. Proceedings, vol. XVI, p. 1-4. — Transactions, vol. XXI, N. 15, 16.

* — Museum of Comparative Zoology at Harvard College. Bulletin, vol. LIV, 1-6. — Memoirs, XXVI, N. 7; XL, 1, 3; XLI, 1-2. — Annual Report of the Curator 1909-1910; 1911-1912.

* **Cape-Town**. R. Society of South-Africa. Transactions, vol. II (1910), p. 1-2.

* **Catania**. Accademia Gioenia di scienze naturali. Atti, An. 1910, ser. V, vol. III. — Bollettino delle sedute, 1910, fasc. 14; 1911, 15-18.

* — Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie, vol. XXXIX (1910); vol. XL (1911), 1-11.

* **Chambéry**. Société Savoisienne d'histoire et d'archéologie. Mémoires et Documents, T. XLIII, XLIX, L, LI.

* **Charleroi**. Société Paléontologique et Archéologique. Documents et Rapports, T. XXXI.

* **Cherbourg**. Société Nationale des sciences naturelles et mathématiques. Mémoires, T. XXXVII.

* **Chicago**. Field Museum of Natural History. — Geological Ser., vol. III, N. 8. — Ornithological Ser., vol. I, N. 6. — Zoological Ser., vol. VII, N. 9-11; X, 3, 4. — Report Series, vol. IV, N. 1.

— John Crerar Library. 16° Annual Report, 1910; 8°.

* **Christiania**. Videnskabs-Selskabet: Skrifter: I. Mathematisk-Naturvidenskabelig Klasse 1909, 1910. Forhandlinger Aar 1909, 1910.

* **Cincinnati**. Lloyd Library of Botany, Pharmacy and Materia Medica: Bulletin, N. 14,15 — Mycological Notes, N. 36. — Old Species Ser., N. 1. — Polyporoid issue, N. 1-3. — Synopsis of the genus Hexagona; Synopsis of the sections Microporus, Tabacinus and Funales of the genus Polystictus. — Bibliographical Contributions, N. 2, april 1911.

* **Cividale del Friuli**. Memorie storiche Forogiuliesi, 1910, An. VI, fasc. 1; 1911, Ann. VII, 1. — Statuto della Società storica Friulana.

* **Concarneau**. Laboratoire de Zoologie et Physiologie maritimes. Travaux scientifiques, T. II, fasc. 1-7.

* **Copenhague**. Académie R. des sciences et des lettres de Danemark. Bulletin, 1910, N. 6; 1911, 1-5. — Mémoires, 7e sér., Section des Sciences, T. VI, N. 6-8; VIII, 5-6. — Section des Lettres, T. IX, 1; XI, 1, 2.

* **Cracovie**. Académie des Sciences. Bulletin international. — Classe des sciences mathématiques et naturelles, Sér. A, Sciences mathématiques, 1910, 8-10; 1911, 1-9; Sér. B, Sciences naturelles, 1910, N. 7B-10B; 1911, 1-8. — Classe de philologie, d'histoire et philosophie, 1910, Nos. 3-10; 1911, 1-5. — Catalogue of Polish scientific literature, T. X, 1910, zeszyt. 1-4; Rozprawy wydział filologiczny, Ser. II, T. XX, zeszyt. 2; Ser. III, T. III. — Rozprawy wydziału matematyczno-przyrodniczeco, T. X. A (1910); Nanki matematyczno-fizyczne, Ser. III, T. X. B (1910); Nanki biologiczne, Ser. III. Materyały do etnologii i antropologii ludów azyi Scodkowej, J. Talko-Hryncewicz, 1 vol. 8°. — Metoda Hegla i zasady filozofii Speculaty-wnej, Adam Zółtowski, 1 vol. 8°. — Bohdan Zaleski 1802-1831, Josef Tretiak, 1 vol. 8°. — Warszawa przed wybuchem pow-

stania 17 Kwietnia 1794 roku, — Waclaw Tokarz, 1 vol. 8°. — Studya do historyi muzyki w Polsce. Wplywy wloskie w muzyce polskiej. Czesć I, 1540-1640, Dr. Z. Jachimecki, 1 vol. 8°. — Slownik gwar Poliskich ulozvt, J. Karlowicz.

De Bilt (Utrecht). Institut Météorologique Royal des Pays-Bas. Mededeelingen en Verhandelingen, 11, N. 102.

* **Delft**. Bibliotheek der Technische Hoogeschool: Tesi di laurea.

* **Dijon**. Académie des Sciences, Arts et Belles Lettres. Mémoires, 4ᵉ sér. T. XI (1907-1910).

* **Dorpat**. Imp. Universitatis Jurievensis (olim Dorpatensis) Acta et Commentationes, T. XVIII, 1910.

* **Dublin**. Royal Irish Academy. Proceedings, vol. XXXI, 1, 2, 4, 5, 10, 22, 24, 35-39, 51, 52, 65; vol. XXIX, Sect. A, No. 1-4; Sect. B, 1-5; Sect. C, 1-8.

— Royal Dublin Society. Scientific Proceedings, vol. XII (N. S.) N. 37; XIII (N. S.) N. 1-11. — Economic Proceedings, vol. II, Nos. 3, 4.

* **Edinburgh**. Royal Society of Sciences. Proceedings, vol. XXX, p. 7; XXXI, p. 1-4; Transactions, vol. XLIV, p. 1 and 2; XLVII, p. 3-4. — General Index to volumes XXXV-XLVI (1889-1908).

— Edinburgh Geological Society. Transactions, vol. IX, p. V.

* — Royal Physical Society, vol. XVIII, N. 3.

* **Erlangen**. Physikalisch-medizinische Sozietät. XLII. Bd., 1910.

* **Firenze**. Accademia della Crusca. Vocabolario, vol. X, fasc. 3° ed ultimo. Atti, 1909-1910.

* — R. Accademia economico-agraria dei Georgofili. Atti, serie 5ª, vol. VII, disp. 4; VIII, 1ª-4ª.

— R. Istituto di Studi superiori pratici e di perfezionamento. Sezione di scienze fisiche e naturali. — Osservatorio di Arcetri: Osservazioni astronomiche fatte all'equatoriale nel periodo 25 gennaio 1909-1910, fasc. 20. — Raccolte plantoniche fatte dalla R. Nave "Liguria „, vol. II, fac. 1-2. — Osservazioni cristallografiche su l' Ematite dell' isola d' Elba del Dr. E. Grill. — Ciottoli di rocce cristalline nell'eocene di Mosciano presso Firenze. Studio geologico-petrografico del prof. Dr. Alessandro Martelli. — Di una nuova specie di *Hylochoerus*. L'*Hylochoerus* Giglioli per il Dr. E. Balducci.

— Biblioteca Nazionale centrale. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa, 1911, Gennaio (N. 121)-Ottobre (130).

* **Frankfurt a. M**. Senckenbergische Naturforschende Gesellschaft. Abhandlungen, Bd. XXXI, Heft 1; XXXIII, 1-3. — Berichte, 41, Heft 3, 4.

* **Freiburg i. B**. Naturforschende Gesellschaft. Berichte, XVIII. Bd., 2; XIX, 1.

* **Gap**. Société d'Études des Hautes-Alpes. Bulletin, XXIXᵉ Ann., 3ᵉ Sér., 1ʳ-4ᵉ trim. 1910; 1ʳ, 1911.

* **Genève**. Société de Physique et Histoire naturelle. Compte rendu des Séances, XXVII, 1910. — Mémoires, vol. XXVI, fasc. 4; XXXVII, fasc. 1-2.

— Observatoire. Résumé météorologique de l' année 1910 et le Grand Saint-Bernard; par R. Gautier. — Le retour du froid en juin à Genève

et au Gran Saint-Bernard; par R. Gautier et H. Duaime. — Observations météorologiques faites aux fortifications de St-Maurice pendant l'année 1910; par R. Gautier et H. Duaime.

* **Genova**. Società di letture e conversazioni scientifiche. Rivista ligure di scienze, lettere ed arti. An. XXXVII (1910), fasc. 6; XXXVIII (1911), 1-5.

* **Giessen**. Universität. Tesi di Lauree, N. 206, Ann. 1909-1910; N. 204, 1910-1911.

* **Göttingen**. Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften. Matematisch-physikalische Klasse: Abhandlungen, N. F., Bd. VIII, 1-2; IX, 1-3. — Nachrichten 1910, N. 5-6; 1911, 1-4. — Philologisch-historische Klasse: Abhandlungen, N. F., Bd. XII, 3. — Nachrichten, 1910, 3-4; 1911, 1-3, Beiheft. — Geschäftliche Mitteilungen, 1910, 2; 1911, 1.

* **Granville**. Scientific Laboratories of Denison University. Bulletin, vol. XVI, Art. 1-7.

* **Habana**. Academia de Ciencias médicas, físicas y naturales (Revista científica), Anales, T. XLVII, 1910, septiembre-diciembre; 1911, enero-febrero.

* **Halle**. Kaiserliche Leop. Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher. Abhandlungen, 92, 93. Bd.— Leopoldina, XLVI. Heft, Jahrg. 1910·

* **Harlem**. Société hollandaise des sciences. Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles. Sér. II, T. XV, livr. 5. — Sciences exactes, Ser. III, T. I, livrs. 1-2. — Sciences naturelles, Ser. III, T. I, livrs. 1-2.

* — Fondation de P. Teyler van der Hulst. Archives du Musée Teyler, Ser. II, vol. XII, 2e part. — Verhandelingen van Teyler godgeleerd Genootschap N. S. Dl. 17.

* **Heidelberg**. Naturhistorisch-medicinischer Verein. Verhandlungen, N. F., Bd. XI, 1-2.

— Università, Tesi di Laurea, Ann. 1908-1909, N. 254; 1909-1910, 255; 1910-1911, 418.

* **Helsingfors**. Société des Sciences de Finlande. Acta, T. XXXVIII, Minnestal, XL, 7, 8. — Öfversigt: A. Matematik och naturvetenskaper; B. Humanistika; C. Redogörelser och forhandlinger, T. LIII (1910-1911). — Bidrag: H. *70*, 1, 2; *72*, N. 2-5; *73*, 1.

— Meteorologisches Jahrbuch für Finnland. Meteorologische Zentralanstalt, Bd. IV, 1904. — Niederschlags Beobachtungen in Finnland im Jahre 1909. — Schnee- und Eisverhältnisse in Finnland im Winter 1902-1903.

Hermannstadt. Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften. Verhandlungen und Mitteilungen, LX. Bd., Jahrg. 1910; LXI (1911), Heft 1-3.

* **Jena**. Medizinisch-Naturwissenschaftliche Gesellschaft. Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft, N. F., XL, 1-4.

* **Kasan**. Société Physico-Mathématique. Bulletin, 2e Sér., T. XVI, 3.

Karlsruhe. Technische Hochschule. Tesi N. 30, 1909-10; 24, 1910-1911.

Kiel. Commission zur wissenschaftlichen Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Wissenschaftliche Meersuntersuchungen, N. F., IX. Bd. Abt. Helgoland, Heft. 2; X, Heft. 1; N. F., XII. Bd. Abt. Kiel; XIII, Abt. Kiel.

Kodaikánal and **Madras**. Observatories. Annual Report of the Director... for 1910, Madras, 1911.

— Observatory. Bulletin, No. XXIII-XXIV.

Königsberg. Physikalisch-ökonomische Gesellschaft. Schrift. LI. Jahrg. 1910; Generalregister zu den Jahrgängen 26-50, 1885-1909.

Kyōto. Imp. University: College of Sciences and Engineering. Memoirs, vol. II, N. 12-14; III, 1-6.

La Plata. Observatorio astronómico de la Universidad Nacional. Velocidad de propagación de las ondas sísmicas.

* **Lawrence**. University of Kansas. Bulletin. Sciences Bulletin, vol. V, Nos. 1-11.

* **Leipzig**. K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften. Mathematisch-physische Klasse: Abhandlungen, XXXII. Bd., N. 2-4. — Berichte, 1910, N. 2-7; 1911, 1-6. — Philologisch-historische Klasse. — Abhandl., XXVIII. Bd., N. 3-8; XXIX, 1-3; Berichte, 1910, Bd. LXII, N. 6-11; LXIII, 1-5.

— Fürstlich Jablonowskische Gesellschaft. Jahresbericht, 1911. — Preisschriften. XVI. der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Sektion; XL: J. Plemelj Potentialtheoretische Untersuchungen.

* — Verein für Erdkunde; Mitteilungen... für das Jahr 1910. — Gesellschaft für Erdkunde: Wissenschaftliche Veröffentlichungen, VII. Bd.

Léopol. Société Polonaise pour l'avancement des sciences. Bulletin, X, 1910.

Lisboa. Academia de Sciencias de Portugal. Trabalhos, 1ª Ser., T. II, 1ª p.

— Academia de Sciencias de Portugal: Estatutos e Regulamento general. — Elementos para um Projecto de reforma politica e administrativa propostos pela Academia. — Nota das principaes communicações realizadas e dos problemas postos a concurso na Academia etc. desde 16 abril de 1906 até 28 de março de 1911.

* **Lisbonne**. Société Portugaise des sciences naturelles. Bulletin, vol. III, suppl. 2; IV, fasc. 2.

* **London**. R. Institution of Great Britain. Proceedings, vol. XIX, p. 1ª; II, N. 102-103.

* — Royal Society. Year-Book, 1911. Proceedings: Ser. A, vol. 84, N. A. 573-574; 85, A. 575-582; 86, 583. — Ser. B, vol. 83, N. B. 563-567; 84, B. 568-573. — Transactions: Ser. A, Containing papers of a mathematical or physical character, vol. 210. — Ser. B, Containing papers of biological character, vol. 201.

— Royal Society. International Catalogue of scientific Literature. **A**. Mathematics, 8 annual issue; **B**. Mechanics, 8; **C**. Physics, 8; **D**. Chemistry, 7; **E**. Astronomy, 8; **F**. Meteorology, 8; **G**. Mineralogy, 8; **H**. Geology, 8; **J**. Geography, 8; **K**. Palaeontology, 8; **L**. General Biology, 8; **M**. Botany, 7, 8, 2 vol.; **N**. Zoology, 9; **O**. Anatomy, 8; **P**. Anthropology, 7; **Q**. Physiology, 7.

* — British Association for the Advancement of science. Report of the eightieth Meeting, Sheffield, 1910, august 31 - september 7.

* — R. Astronomical Society. Monthly Notices, vol. LXXI, N. 1-9; LXXII,

N. 1. — Memoirs, vol. LIX, part 5ª; LX, p. 1-2. — General Index to the Monthly Notices, vol. LIII to LXX, 1892-1910. — General index to illustrations in the Memoirs, vols. I-LIX and the Monthly Notices, vols. I to LXX, 1822-1910. — Appendix: List of Comets 1892-1910.

* **London**. Chemical Society. Proceedings, vol. XXVI, N. 379 and Index, XXVII, N. 280-294. — Journal, 1910, December, and Suppl. Number containing Title-pages, contents, and Index; 1911, January-December.

* — Geological Society. Geological literature during the Year ended December 31st, 1909. List, 1911. — Quarterly Journ., vol. LXVII, p. 1ª (265), 3ª (267). — Geological Literature... during the year ended Dec. 31st., 1910. — Charter and Bye Laws.

* — Linnean Society. List 1911-1912. — Transactions, Botany, vol. XVII, p. 15. — Zoology, vol. X, p. 10; XI, p. 6, 7; XIII, p. 4; XIV, p. 1. — Journal, Botany, volume XXXII, 212; XXXIX, N. 273-275. — Zoology, vol. XXXI, N. 208; XXXII, N. 211. — Proceedings, 123rd Session. From November 1910 to June 1911.

* — Royal Society of Literature. Transactions, 2nd ser., vol. XXX, p. 2-4. — Report and List of Fellows, 1911.

* — Royal Microscopical Society. Journal 1910, Part 6; 1911, p 1-6.

* — London Mathematical Society. Proceedings, vol. IV, p. 2-7; V-VIII; IX, p. 1-7; X, 1-5.

* — British Museum (Natural History). Catalogue of the Fresh-Water Fishes of Africa, vol. II (1911). — Handbook of the Tsetse-Flies. — Catalogue of the Lepidoptera, Text, Plates, vol. X. — Flora of Jamaica, vol. I. — Monograph of the British Lichens.

* — Zoological Society. Proceedings, 1910, part 4; 1911, 1-4. — Transactions, vol. XVIII, p. 4-5.

* **Louvain**. Université catholique. Publications Académiques de l'année 1910-1911: Annuaire 1911. — Programme des cours de l'année académique 1910-1911. — A. Szembek, Les associations économiques des paysans polonais sous la domination prussienne. Bruges, 1910. — E. Savoy, L'apprentissage en Suisse. Louvain, 1910. — G. Sarti, Le partecipanze agrarie nella provincia di Ferrara. Bologna, 1910. — V. Claes, O. M. Cap., Le contrat collectif de travail. Sa vie juridique en Allemagne. Bruxelles, 1910. — G. Sarti, Saggio sulla legislazione agraria in Italia. Bologna, 1910. — I. Sinzot, Les traités internationaux pour la protection des travailleurs. Louvain, 1911. — P. Van Hissenhoven, Les grains et le marché d'Anvers. Anvers, 1910. — F. J. Zwierlein, Religion in New Netherland. Rochester, 1910. — G. Goossens, Étude sur les États de Limbourg et des pays d'Outre-Meuse pendant le premier tiers du xviiiᵉ siècle. Kerkrade, 1910. — P. Delannoy, La juridiction ecclésiastique en matière bénéficiale sous l'ancien régime en France, t. I. Bruxelles, 1910. — F. Callaey, O. M. Cap., L'idéalisme franciscain spirituel au xivᵉ siècle, Étude sur Ubertin de Casale. Louvain, 1911. — H. Siret, La vraie "Belgique au Travail". Bruxelles, 1910.

Lucca. R. Archivio di Stato: Primo contributo alla conoscenza delle filigrane nelle carte antiche di Lucca, esposto da L. Volpicella. Lucca, 1911; 4°.

* **Lund**. Universitas Lundensis: Acta, Nova Series, 1910, T. VI, Medicin samt matematiska och naturvetenskapliga ämnen; id. Teologi, juridik och humanistisko ämnen.

* **Lyon**. Académie des Sciences, Belles-Lettres et Arts: Sciences et Lettres. Mémoires, 3e Sér., T. XI.

* — Diocèse de Lyon. Bulletin historique, XII an. (1911), N. 67-71.

* — Société d'Agriculture, Sciences et Industrie. Annales, 1909.

* — Société Linnéenne. Annales, An. 1910, Nouvelle Série, T. LVII.

* — Université. Annales: Nouvelle Série, I. Sciences, Médecine, fasc. 25-30. II. Droit, Lettres, fasc. 21, 22.

* **Madrid**. R. Academia de Ciencias exactas, físicas y naturales. Anuario, 1911. — Revista, T. VIII, N. 11, 12; T. IX, N. 5-12.

* — Real Academia de la Historia. Boletín, T. LVII, cuad. 4-6; LVIII, LIX, 1-4.

* **Mantova**, R. Accademia Virgiliana. Atti e Memorie, N. Ser., vol. III, p. 2, 1910.

* **Marseille**. Faculté des Sciences. Annales, T. XIX.

* **Messina**. R. Accademia Peloritana. Atti, vol. XXIV, fasc. 1° (1909-1910).

* **México**. Sociedad Científica " Antonio Alzate ". Memorias y Revista, T. XXVII, N. 11-12; XXVIII, 1-8.

— Observatorio Meteorológico Magnético Central de México. Boletín mensual: 1906, Enero-Julio; 1907, Enero-Junio; 1909, Octubre-Diciembre; 1910, Enero-Marzo, Julio-Diciembre; 1911, Enero-Julio.

— Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya. Anuario para el año 1911 (Año XXXI); 16°.

* **Milano**. Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti, Ser. II, vol. XLIII, fasc.i 17-20; XLIV, 1-14.

* — Società Italiana di scienze naturali e Museo Civico di storia naturale. Memorie, vol. VII, fasc. 1. — Atti, vol. XLIX, fasc. 2-3; L, 1-3.

— Civici Musei Artistico ed Archeologico e Civica Galleria d'arte moderna. Bollettino, An. V, N. 5.

* — R. Osservatorio Astronomico di Brera. Pubblicazioni, N. XLVI, XLVIII. — Anno bisestile 1912: Articoli generali del Calendario ed Effemeridi del Sole e della Luna per l'orizzonte di Milano (con appendice).

— Università Commerciale Luigi Bocconi: Annuario per l'anno scolastico 1909-1910, An. VIII.

* — Municipio della città. Bollettino statistico mensile, An. XXVI, 1910, novembre-dicembre; 1911, gennaio-ottobre. — Riassunto dei Bollettini statistici mensili dell'anno 1910.

* **Modena**. Regia Accademia di scienze, lettere ed arti. Memorie, Ser. III, vol. IX, 1910; 4°.

* — Società dei Naturalisti e Matematici. Atti, Ser. IV, vol. XII, An. LIII, 1910.

Monaco. Musée Océanographique. Bulletin, N. 185-190, 1910; 191-219, 1911.

* **Moncalieri**. Osservatorio del Real Collegio Carlo Alberto. Osservazioni meteorologiche, 1910, novembre-dicembre; 1911, gennaio-novembre. — Osservazioni sismiche, N. 1910, 9, 10; 1911, 1, 9.

Montevideo (Uruguay). Instituto Nacional Físico-Climatológico. Año de 1910, vol. VIII, N. 85-90 (Enero-Julio).

***Montpellier**. Académie des sciences et lettres. Bulletin mensuel, 1911, N. 1-12. — Mémoires de la Section de Médecine, 2e Sér., T. IIIe.

* **Moscou**. Société Impériale des Naturalistes. Bulletin, An. 1909, N. Sér., T. XXIII, an. 1910, 1-3. — Nouveaux Mémoires, T. XVII (XXVII), livrs. 2.

* — Meteorologisches Observatorium der K. Universität. Beobachtungen angestellt ..... im Jahre 1908, 1909. — Meteorologische Beobachtungen im Moskau im Jahre 1908, 1909.

* **München**. K. Bayerische Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-physikalische Klasse. Sitzungsberichte, Jahrg. 1910, 5-15. u. Schlussheft., 1911, Heft. 1-2. — Abhandlungen, XXIV Bd., 3 Abhandl., XXV, 4-7. — Beiträge zur Naturgesch. Ostasiens: I suppl. Bd., 9-10 Abhandl.; II suppl. Bd., 2-6 Abhandl.; IV suppl. Bd., 1-2 Abhandl. — Carl von Voit, Gedächtnisrede gehalten in der öffentlichen Sitzung 9 März 1910. — Philosophisch-philologische und historische Klasse Sitzungsberichte, Jahrg. 1910, 3-14 und Schlussheft. Jahrg. 1911, 1-12. — Abhandlungen, XXV Bd., 2-4 Abhand. — Wissenschaftliche Richtungen und philosophische Probleme im dreizehnten Jahrhundert; von G. v. Hertling. Die Kunstpflege der Wittelsbacher; von S. v. Riezler.

* — Ornithologische Gesellschaft in Bayern, Verhandl., 1909, Bd. X.

* **Nancy**. Académie de Stanislas. Mémoires (1909-1910), 6e Sér., T. VII.

* **Nantes**. Société des sciences naturelles de l'Ouest de la France. Bulletin. 2e Sér., T. IX, 4e trimestre 1909; T. X, 1er et 4e trimestres 1910.

* **Napoli**. Società Reale. Annuario 1911. — R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche: Atti, Ser. 2a, vol. XIV; Rendiconti, Ser. 3a, vol. XVI, fasc. 10-12; XVII, 1-6. — Accademia di scienze morali e politiche. Rendiconto delle tornate e dei lavori, An. XLIX (1910). — Accademia di Archeologia, Lettere e Belle Arti. Memorie, vol. I, 1911. — Rendiconto, N. S., An. XXIV, Gennaio-Dicembre 1910.

* — Accademia Pontaniana. Atti, vol. XL.

* — R. Istituto d'Incoraggiamento. Atti, Ser, 6a, vol. LXII, 1910.

— Società dei Naturalisti. Bollettino, vol. XXIV (1910). — Onoranze e festeggiamenti nel 1° Centenario della morte di Filippo Cavolini. Suppl. al vol. XXIV.

— R. Osservatorio di Capodimonte. Osservazioni meteoriche fatte negli anni 1907-1909. — Riassunto delle osservazioni meteorologiche fatte negli anni 1907 e 1908. — Variazioni della declinazione magnetica osservate negli anni 1905 e 1906. — Determinazioni assolute dell'inclinazione magnetica eseguite negli anni 1907-1909. — Determinazioni assolute della componente orizzontale della forza magnetica terrestre fatte negli anni 1898-1903. — Posizioni meridiane del pianeta Marte durante l'opposizione dell'anno 1909. — Osservazioni meridiane del pianeta Marte durante l'opposizione dell'anno 1909.

* — Zoologische Station zu Neapel. Mittheilungen, XX Bd., 2 Heft.

* **Neuchâtel.** Société Neuchâteloise des sciences naturelles. Bullet., T. XXXVII, An. 1909-1910.

* **New-York.** New-York Academy. Annals, vol. XIII, pts. 2, 3; XIV; XV, 1-3, a. Appendix, pt. 1; XVI; XVII; XVIII; XIX; 1900-1909; 8°. — Memoirs, vol. II, pts. 1, 3, 4, 1899-1905; 4°.

* — American Mathematical Society. Bulletin, vol. XVII, N. 3-10; XVIII, 1-3. — Transactions, vol. XII (1911), N. 1-4. — Annual Register, 1911.

— The Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching. Academic and Industrial efficiency. Bulletin, 5. — Fifth Annual Report of the President and of the Treasurer, 1910.

* — Lyceum of natural history. Annals, vol. I (February 1825), N. 8; vol. II, pp. 259-356 and N. 12-14 (1828).

* — New York Public Library. Astor Lenox and Tilden foundations. Bulletin, 1910, N. 12; 1911, 1-12.

Oberlin (Ohio). Wilson Ornithological Club. Wilson (The) Bulletin, vol. XXII, N. 3-4; XXIII, 1-2.

Odessa. Observatoire météorologique et magnétique de l'Université Impériale. 1909. Annuaire.

* **Ottawa.** Royal Society of Canada. Proceedings and Transactions, 3e Ser., vol. IV.

— Ministère des Mines. Division de la Commission Géologique. Rapport sommaire pour l'année civile 1908. Les terrains houillers de la Maniloba, Saskatkewan, Alberta et de l'est de la Colombie britannique. — Reconnaissance géologique d'une portion des districts d'Algoma et de la baie du Tonnerre. — Rapport sur la région située au nord du Lac Supérieur, etc.

— Department of Mines (Geological Survey Branch). Memoirs, N. 12-P. Contribution to Canadian Palaeontology, vol. II, p. 3. — Summary Report... for the Calendar Year 1910.

— Department of Mines (Mines Branch). Preliminary Report on the Mineral production of Canada during the Calendar Year 1910. — Chrysotile-Asbestos, its occurrence, exploitation, milling and uses. 2nd Edition, 1910. — Annual Report of the Division of mineral resources and Statistics of the Mineral production of Canada during the Calendar Year 1909. — Report on the Molybdenum ores of Canada. — Report on the Gypsum deposits of the Maritime Provinces. — Bulletin, N. 4-5.

* **Oxford.** Radcliffe Observatory. Results of Meteorological observations in the six Years 1900-1905. Oxford, 1911; 1 vol. 8°.

* **Padova.** R. Accademia di scienze, lettere ed arti. Atti, N. Ser., vol. XXVII (1910-1911).

* — Accademia scientifica veneto-trentino-istriana. Atti, Serie 3a, An. III.

* — Museo Civico. Bollettino, An. XIII (1910), N. 1-4.

* — R. Università degli Studi. Annuario per l'anno accademico 1910-1911, Padova, 1911; 8°.

* **Palermo.** Società di scienze naturali ed economiche. Giornale, vol. XXVIII.

* — Circolo Matematico. Rendiconti, T. XXXI (1911), fasc. 1-3; XXXII, 1-3.

Supplemento, vol. V, N. 5-6; vol. VI (1911), N. 1-6. — Annuario, 1911. — Indice dei Rendiconti. T. I-XXXII (1887-1911). — Indice del Supplemento. Vol. I-VI (1906-1911).

* **Paris.** Ministère de l'Instruction Publique et des Beaux-Arts. " Musée Guimet „. Annales (Bibliothèque d'études), T. XXI. — Les Chrétiens et l'Empire romain. — Lucien de Samosate.

— Ministère de l'Instruction Publique. Catalogue des Thèses et Écrits académiques, T. V^e (Années scolaires 1904-1909), fasc. XXVI^e (Année scolaire 1909-1910).

— Ministère de l'Instruction et des Beaux-Arts. Inventaire sommaire des Archives communales et départementales antérieures à 1790: *Bouches-du-Rhône*, Répertoire numérique de la Sér. V (Cultes); Sér. G, 1^e fasc., Archevêché d'Aix; Sér. U (Justice). — *Cher*, Répertoire numérique de la Sér. Q (Domaines), 1^e et 2^e partie. — *Côte d'Or*, Ville de Dijon, T. V, Sér. B (suppl.). Registres Paroissiaux d'État Civil. — *Doubs*, Répertoire numérique de la Sér. V (Cultes). Ville de Clerval. — *Drôme*, Archives civiles, Sér. E, T. VIII. — *Lozère*, Répertoire numérique, Sér. C (Administration provinciale), Sér. Q (Domaines). — *Meuse*, Répertoire numérique de la Sér. T (Instruction publique, sciences et arts); Sér. S (Travaux publics); Sér. V (Cultes). — *Puy-de-Dôme*, Ville de Clermont-Ferrand. Fonds de Montferrand, T. 1^er, Archives civiles, Sér. C, T. V^e. — *Ille-et-Vilaine*, Ville de Saint-Malo. Archives communales postérieures à 1790, Période révolutionnaire. — *Seine-Inférieure*, Archives civiles, Sér. C et D. — *Seine-et-Marne*, Répertoire numérique de la Sér. V (Cultes). — *Somme*, Archives ecclésiastiques, Sér. G, T. VI. — *Vosges*, Archives anciennes de la Ville d'Épinal, 5 fasc., Sér. DD, EE, FF, GG, HH et II. — *Ardennes*, Archives civiles, Sér. C, D et F (T. III, 2^e part.), Sér. Q (Domaines). — *Doubs*, Ville de Montbéliard. Archives hospitalières. Répertoire numérique de la Sér. Y (Établissements de répression). Répertoire numérique de la Sér. U (Justice). — *Gers*, Archives civiles, Sér. A et B, 1^e partie, Sénéchaussée d'Armagnac. — *Hautes-Alpes*, Sér. E, Articles 1 à 249, Mandement et Marquisat de Savine. — *Lozère*, Répertoire numérique, Sér. O (Administration Communale); Sér. P (Finance). — *Marne*, Répertoire numérique de la Sér. V (Cultes). — *Meuse*, Répertoire numérique de la Sér. N (Administration et Comptabilité départementale); id. de la Sér. R (Guerre et Affaires Militaires). — *Orne*, Archives ecclésiastiques, Sér. H (Table Alphabétique). — *Saône-et-Loire*, Archives civiles, Sér. F, 1^e partie. — *Savoie*, Archives Communales. Arrondissement d'Albertville. — *Seine-et-Oise*, Archives de la Révolution, Sér. L (Art. 1-113). — *Tarn-et-Garonne*, Archives civiles, Sér. A (Fonds d'Armagnac). Répertoire numérique de la Sér. Q (Domaines Nationaux).

* — Ministère des Travaux Publics, des Postes et des Télégraphes. Annales des Mines, X^e Sér., T. XVII, livr. 6; XVIII, livrs. 7-12 (1910); XIX, livrs. 1-10 (1911).

* — Bureau International des poids et mesures. Travaux et Mémoires, T. XIV.

Paris. Institut de France. Annuaire pour 1911.

* — Société des Antiquaires de France. Bulletin, 3-4e trimestre 1910; 1e-3e trimestre 1911. — Mémoires, Sér. 7e, T. X, 1910. — Mettensia VI, Mémoires et documents, fasc. 2.

* — Société de Géographie. La Géographie. Bulletin, XXI (1910), 4-6; XXII (1910), 1-6; XXIII (1911), 1-5.

* — Société Géologique de France. Bulletin, 4e Sér., T. VIII (1908), N. 7-9; T. IX (1909), 1-8; X, 1-6.

* — Société Mathématique de France. T. XXXIX, fasc. 1-3.

* — Musée National d'histoire naturelle. Bulletin, 1909, N. 8; 1910, 1-7; 1911, 1, 2.

* — Société Philomathique. Bulletin, Xe Sér., T. II, N. 4-6; III, 1-3.

* — École Polytechnique. Journal, IIe Sér., XIVe, XVe cahiers.

* — Société de Spéléologie. Bulletins et Mémoires, T. VIII, N. 61-64

* — Société Zoologique de France. Mémoires, 1909, T. XXII. Bulletin, T. XXXV.

* **Pavia**. Società Pavese di Storia patria. Bollettino, An. XI, fasc. 1-3.

* **Perugia**. R. Deputazione di Storia patria per l'Umbria. Bollettino, An. XVII, fasc. 1.

* — Università degli Studi. Facoltà di Giurisprudenza, Annali, Ser. III, 1910, vol. VIII, fasc. 1-2. — Facoltà di Medicina, Ser. III, vol. VIII, fasc. 3-4; Ser. IV, vol. I, fasc. 1-3.

Philadelphia. Academy of Natural Sciences. Journal, 2nd Ser., vol. XIV, p. 2. — Proceedings, vol. LXII, p. 2-3.

* — American Philosophical Society. Proceedings, vol. XLIX, N. 194-195, 197; L, 198.

* **Pinerolo**. Biblioteca Municipale Alliaudi e Museo Civico. Bollettino annuale, An. 1910.

* **Pisa**. Società Toscana di scienze naturali. Atti. — Memorie, vol. XVI. — Processi verbali, vol. XX, 1-3, adunanze del 13 novembre 1910, 15 gennaio-7 maggio 1911.

* — R. Scuola Normale superiore. Annali. Filosofia e Filologia, vol. XXII.

— Annali delle Università toscane, T. XXX, 1911; 4°.

* — R. Università. Annuario per l'anno accademico 1910-1911.

* **Portici**. R. Scuola Superiore di Agricoltura. Annali, Ser. 2a, vol. IX, 1910.

Porto. Academia Polytechnica. Annaes scientificos, vol. V, 4; VI, 1-3.

Potsdam. Zentralbureau der Internationalen Erdmessung. Veröffentlichungen, N. F., N. 22, Resultate des internationalen Breitendienstes, Bd. IV, von Th. Albrecht u. B. Wanach, 1 vol.; 4°. — Comptes rendus des séances de la seizième Conférence générale de l'Association Géodésique Internationale, III vol., Rapport spécial sur les mesures relatives de la pesanteur, Berlin, 1911; 4°.

— Königl. Preuss. Geodätisches Institut. Veröffentlichung, N. F., 46, 47, 48, 49, II Heft, 50, 51.

Poulkovo. Observatoire Central Nicolas. Publications de l'Observatoire, vol. VII, N. 1 et XV. — Publications de la Commission pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg, T. I, Géodesie, III sect.. D. réseau principal des triangles.

* **Prag.** K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften. Jahresbericht für das Jahr 1910. — Sitzungsberichte. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe, 1910. — Ladislav Pračka. Untersuchungen über den Lichtwechsel älterer Veränderlichen Sternen nach den Beobachtungen von Prof. Dr. V. Safařtk, vol. 1. Sterne des A. G. Kataloges von 0^h bis $5^h 6^m$ A. R.
— K. K. Sternwarte. Magnetische und Meteorologische Beobachtungen... im Jahre 1910.

* **Praze.** České Akademie Císaře Františka Josefa pro vědy, slovenost a umění. Almanach, Ročn. XXI. — Rozpravy, Třida I, Císlo 42, 43; Rozpravy, Třida II (Mathem.-přirodnicka), Ročnik XIX; Rozpravy, Třida III, Císlo 33-35. — Bulletin international. Résumé des travaux présentés. Classe des sciences mathématiques, naturelles et de la médecine, XVe An. (1910). — Sbirka pramenův ku poznáni literárního zivola v čechách na Moravě a v Slezsku, Skupina I, Rada I, Cislo 9, 14. — Sborník filologicky, Ryčn. I. — Bibliographie Ceské Historie, Svazek 1, 2. — Die Handschriften der Graf Nostitz'schen Majoratsbibliothek in Prag. — Lysistrate, Komoedie Aristofanova.

Pretoria. Transvaal Observatory. Annual Report of the Meteorological Department, 1910; 4°.

Princeton. Princeton University Observatory. Contribution from the Princeton University. — Observatory N. 1, 1911; 4°.

Pusa. Agricultural Research Institute and College. Report 1909-10 (Including Report of the Imperial Cotton Specialist). — Memoirs of the Department of Agriculture in India. Botanical Ser., vol. IV, 1-2; VIII, 6. Chemical Ser., vol. I, N. 10, T. II, 1.

Reims. Académie Nationale. Travaux, T. CXXII, An. 1908-1909; T. CXXIII, An. 1909-1910.

* **Rennes.** Société Scientifique et Médicale de l'Ouest. Bulletin, XIXe année (1909-1910), T. XVIII, N. 4; XIX, 1-4; XXI, 1.

* **Riga.** Naturforscher-Verein. Arbeiten, N. F., 2 Heft. — Korrespondenzblatt, LIII.

* **Rio de Janeiro.** Bibliotheca Nacional. Annaes, 1906, vol. XXVIII; 1907, vol. XXIX. — Catalogo da collecção Cervantina: Relatorio que ao Sr. Dr. A. Tavares de Lyra Ministro da Justiça e Negocios interiores apresentou em 15 de Fevereiro de 1907 o Director Dr. M, Cicero Peregrino de Silva. — Relatorio apresentado ao Presidente da Republica dos Estados Unidos do Brazil pelo Ministro da Justiça e Negocios interiores Dr. A. Tavares de Lyra em Março 1910.

* — Observatorio. Annuario 1909-1910; 1911. — Boletim mensal. 1907 Julho-Dezembro; 1908 Janeiro-Dezembro. — Codigo mnemo-telegraphico com applicação á Meteorologia pelo Eng. N. Duarte.

Roma. Parlamento. Inchiesta Parlamentare sulle condizioni dei contadini nelle provincie meridionali e della Sicilia: vol. I; vol. III, tomo II; vol. VII, tomo I e II; vol. VIII. — Sicilia. Schema della relazione della Sotto-Giunta parlamentare.

* — Senato del Regno. Bollettino delle pubblicazioni di recente acquisto, 1910, An. VII, N. 2-6.

* **Roma**. Camera dei Deputati. Raccolta degli Atti delle Assemblee del Risorgimento, 15 vol. in-8°.

* — Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio. Atti della Commissione d'inchiesta per le industrie bacologica e serica, vol. 1, 3, 4, 5. — Annali dell'Industria e del Commercio, 1910. — Il regime delle Tare in Italia e all'estero, 1 vol. in-8°. — Statistica delle cause di morte nell'anno 1908. — Catalogo della Biblioteca. Suppl. VII, An. 1909. — Atti della Commissione per lo studio della produzione e del commercio delle lane in Italia, vol. 3°. — Caldaie e recipienti a vapore sottoposti alla sorveglianza del Ministero. Notizie statistiche al 1° gennaio 1911. Roma, 1911; 8°. — Movimento della popolazione secondo gli Atti dello Stato Civile nell'anno 1909. Roma, 1911; 8°. — Usi mercantili italiani (Parte Seconda: Uve e Vini), Roma, 1911; 8°. — Catalogo della Biblioteca. Suppl. VIII, An. 1910.

— Ministero delle Finanze. Ufficio Trattati e Legislazione doganale. Bollettino di legislazione e statistica doganale e commerciale, An. XXVII, 1910, settembre-dicembre; An. XXVIII, 1911, gennaio-agosto. — Statistica del commercio speciale di importazione e di esportazione, 1910, novembre-dicembre; 1911, gennaio-ottobre. — Movimento della navigazione del Regno d'Italia nell'anno 1909, vol. I, II (1910). — Relazione sulla amministrazione delle Gabelle per l'esercizio 1909-1910. — Movimento commerciale del Regno d'Italia nell'anno 1910, Parte I.

* — Ministero di Grazia e Giustizia e dei Culti. Atti della Commissione per la Statistica giudiziaria e notarile. Relazioni e verbali delle discussioni della Sessione del dicembre 1909. Roma, 1910; 8°. — Statistica della criminalità per l'anno 1907. — Notizie complementari alla statistica giudiziaria penale. Roma, 1911; 4°.

* — R. Accademia dei Lincei. Annuario 1911. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Memorie, Ser. V, vol. VIII, fasc. 7-17. — Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Memorie, Ser. V, vol. XIV, fasc. 5-6. — Notizie degli scavi di antichità, Ser. V, vol. VII, fasc. 9-12; vol. VIII, 1-4. — Rendiconto dell'Adunanza solenne del 4 giugno 1911.

* — Pontificia Accademia Romana dei nuovi Lincei. Atti, Anno XLIV (1910-1911), Sessione I-IV, 18 dicembre 1910–11 giugno 1911. — Memorie, vol. XXVIII.

— Società degli Agricoltori italiani. Bollettino quindicinale, 1910, An. XV, N. 24; 1911 (An. XVI), N. 1-24.

* — R. Comitato Geologico d'Italia. Bollettino, An. 1910, vol. XLI, fasc. 3-4; 1911, XLII, 1-2. — Memorie descrittive della Carta geologica d'Italia, vol. XIV. Testo e atl. in 8°.

* — Biblioteca Nazionale centrale Vittorio Emanuele, An. 1910, Ser. III, N. 19964-23080.

— Biblioteca Angelica (*Olim Cœnobii Sancti Augustini de Urbe*). Catalogus codicum manuscriptorum praeter graecos et orientales. — Tomus prior complectens codices ab instituta bibliotheca ad A. 1870; 1 vol. 4°.

— Institut international d'Agriculture. Bulletin du Bureau des Institutions économiques et sociales, An. II, N. 1.

* **Roma**. R. Ufficio centrale di Meteorologia e Geodinamica. Annali, vol. XX (1898), P. 3ª, Osservazioni delle Stazioni Termo-udometriche; vol. XXX (1908), P. 1ª, Memorie.

* **Rovereto**. I. R. Accademia di Scienze, Lettere ed Arti degli Agiati. Atti, Ser. III, vol. XVI (1910), fasc. 3-4; XVII, 1-2.

Saint-Louis Mo. Missouri Botanical Garden. Twenty-first annual Report, 1910.

* **St-Pétersbourg**. Comité Géologique. Bulletins, 1909, N. 9-11; 1910, 1-4. — Mémoires, Nouv. Sér., livrs. 56, 57, 59.

* — Académie Imp. des sciences. Bulletin, 1910, N. 18; 1910, N. 1-18. — Mémoires, Ser. VIIIᵉ, vol. XVII, N. 7; XVIII; XIX; XX, 1-11; XXI, 1-3, 6; XXV, 1-8.

* — Musée Géologique Pierre le Grand. Travaux, T. III (1909), 5; IV (1910), 1-7; V (1911), 1.

* — Société Physico-Chimique russe. Journal, T. LII, 9; LIII, 1-8.

* **San Francisco**. California Academy of Sciences. Proceedings, 4ᵉ Ser., vol. I, p. 7-288.

Sassari. R. Università degli Studi. Annuario per l'anno scolastico 1910-1911.

— Studi Sassaresi. An. VII, Sez. II, fasc. 4°.

* **Siena**. R. Accademia dei Fisiocritici. Atti, Ser. V, vol. II, N. 7-10.

* — Circolo Giuridico della R. Università. Studi Senesi, Ser. II, vol. II, fasc. 5; III, 1-2.

* — R. Università degli Studi. Annuario accademico 1910-1911.

Stettin. Gesellschaft für Pommersche Geschichte und Altertumskunde. Monatsblätter, 23. Jahrg. 1909 (dono del prof. G. Piolti).

* **Stockholm**. Académie Royale des Sciences. Handlingar (Mémoires), Bd. XLV, N. 8-12; XLVI, XLVII, 1. — Arkiv för Matematik, astronomi och fisik, Bd. VI, 2-4; VII, 1-2. — Arkiv för kemi, mineralogi och geologi, Bd. III, 6; IV, 1-2. — Arkiv för botanik, Bd. X, 1-4. — Arkiv för zoologi, Bd. VII, 1. — Meridiangradmätning vid Sveriges västra kust af P. G. Rosén. — Les prix Nobel en 1908-1910. — Årsbok (Annuaire), Ar. 1910, Bilaga 2, 3; 1911. — K. Svenska Fregatten Eugenies resa Omkring Jorden under befäl af C. A. Virgin åren 1851-1853, Häft. 15, 16. — Accessions-katalog, 23 (1908); 24, 25 (1909-1910). — Meddelanden fråu K. Vetenskaps Akademiens Nobelinstitut, Bd. II, Häft. 1. — Meteorologiska Iakttagelser i Sverige, Bd. 52.

Stonyhurst. Stonyhurst College Observatory. Results of Meteorological and Magnetical Observations 1910.

Strassburg. Internationale Kommission für wissenschaftliche Luftschiffahrt. Veröffentlichungen. 1909, N. 1-11.

— K. Universität. Tesi 122.

Stuttgart. Verein für vaterländische Naturkunde in Württemberg. Jahreshefte, 67. Jahrg. 1911; Beilage zu Jahreshefte, 67. Jahrg. 1911.

* **Svizzera**. Commission Géologique Suisse. Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse, 2ᵉ Sér. livrs. XX avec Atlas, XXIII, XXV, XXIX, XXXIII; Cartes spéciales N. 55, 59, 60 (livr. XXX).

Svizzera. Catalogue des écrits académiques Suisse, 1910-1911, Basel, 1911; 8°.
— Société Helvétique des sciences naturelles. Nouveaux Mém., vol. XLV.
— Actes, 93e Session du 4 au 7 septembre 1910, Basel, 2 vol.
* **Sydney.** Royal Society of New South Wales. Journal and Proceedings, 1909, vol. XLIII, part 3-4; 1910, XLIV, p. 1-4; XLV, p. 1.
Tananarive. Académie Malgache. Bulletin, vol. VII, 1910; VIII, 1911.
Teddington. National Physical Laboratory. Report for the Year 1910.
* **Tōkyō.** Imperial University. Calendar 2560-70; (1909-1910).
* — Imperial University College of Sciences. Journal, vol. XXVII, art. 15-20; XXVIII, 1-7; XXX, 1.
— Imperial Earthquake Investigation Committee. Bulletin, vol. IV, 2; V, 1.
Torino. R. Accademia di Agricoltura. vol. LIII, 1911.
* — R. Accademia di Medicina. Giornale, An. LXXIII (1910), N. 8-12; LIV (1911), 1-10.
* — R. Università. Annuario 1910-1911.
— Musei di Zoologia ed Anatomia comparata della R. Università. Bollettino, Vol. XXV, 1910.
* — R. Politecnico. Annuario dal 1906 al 1911.
* — Club Alpino italiano. Rivista, 1910, vol. XXIX, N. 12; 1911, XXX, N. 1-11.
* — Società Meteorologica italiana. Bollettino bimensile, Serie III, vol. XXX, N. 3-12.
— Osservatorio della R. Università. Annuario astronomico pel 1912. Torino, 1912; 8°.
— Consiglio Provinciale. Atti, An. 1910; 8°.
* — Municipio. Bollettino statistico dell' Ufficio d' Igiene e di Sanità, Anno XXXIX, 1910 settembre-dicembre, N. 9-13; XL, 1911, 1-5. — Atti del Municipio, Anno 1909, vol. 58. — La vita amministrativa del comune nel quinquennio 1903-1908, vol. III. — Statistica demografica-sanitaria e Servizi dell'Ufficio d'Igiene per l'anno 1909.
— Associazione " Pro-Torino ". Pro-Torino, pubblicazione mensile illustrata, an. VI (1910), N. 12; an. VII (1911), N. 1-6.
* — Istituto giuridico della R. Università: V. Manzini, Il patto compromissorio e l'azione civile nascente da reato, Milano, 1910; 8°. — C. Nicolari, Il *Precarium* nel diritto romano, Torino, 1911; 8°. — M. Ricca-Barberis, Il diritto di togliere del possessore ed il diritto di far togliere del proprietario, Palermo, 1910; 8°. — Id., Sulle spese per i frutti pendenti al principio ed alla fine dell'usofrutto, Weimar; 8°. — N. Stolfi, Crestomazia dei casi giuridici in uso accademico, Salerno, 1911; 8°. — G. Ambrosini, Trasformazione delle persone giuridiche, I, Torino, 1910; 1 vol. 8°.
— Camera di Commercio. Statistica delle industrie del Distretto camerale, vol. II, Torino, 1911; 8°.
— Cassa di Risparmio. La Cassa di Risparmio di Torino negli anni di Esercizio 1905-1910, 1 vol. f°. — Resoconto dell'anno 1911, 1 fasc. f°.
— Scuola Professionale degli orefici. Relazione della Direzione. Anno scolastico 1910-1911, Torino, 1911; 4°. — Relazione del suo compiuto trentacinquesimo di fondazione sociale, Torino, 1911; 4°.

* **Toronto**. University of Toronto Studies. Review of historical publications relating to Canada, vol. XV (1910).

Tortosa. Observatorio del Ebro. Boletín mensual, vol. I (1910), N. 2-12; II, 1911, N. 1-3.

* **Toulouse**. Université. Annales du Midi. Revue de la France méridionale, XXII^e Année, N. 86, Avril 1910; XXIII, Janvier-Avril 1911, Nos. 89-90.

* — Faculté des sciences de l'Université. Annales, 2^e Sér., T. X (1908), fasc. 8; 3^e Sér., T. I (1909), fasc. 2-4.

* — Faculté des lettres. Bibliothèque méridionale, 1^e Sér., T. XII-XIV; 2^e Sér., IX, X, XIII.

* **Udine**. Civica Biblioteca e Museo. Bollettino, An. V, N. 1-3.

* **Upsala**. Bibliothèque de l'Université. Bref och Skrifvelser af och till Carl von Linné, Del. V, 1 vol., 8°. — Results of the Swedish Zoological Expedition to Egypt and the White Nile, 1901, under the Direction of L. A. Jägerskiold, Part IV.

* — Université. Observatoire météorologique. Bullet. mensuel, vol. XLII, 1910.

* — Regiae societatis scientiarum Upsaliensis. Nova Acta, ser. IV, vol. II, fasc. 2°.

* — K. Vetenskaps Societetens Tvåhundraårsminne, 1910; 4°.

* — Arbeten utgifna med understöd af Wilhelm Ekmans Universitetsfond, N. 9, 10; 4°.

— K. Humanistika Vetenskaps-Samfundet. Skrifter, Bd. XI.

* **Urbana**. Illinois State Laboratory of Natural History. Bulletin, vol. VIII, Index, IX, art. 1-4.

Valle di Pompei. Calendario del Santuario di Pompei, 1911-1912.

Venezia. R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Atti, an. 1910-11, T. LXX, Ser. 8^a, Disp. 1-9. — Osservazioni meteorologiche e geodinamiche eseguite nell'anno 1908 nell'Osservatorio del Seminario patriarcale.

— R. Biblioteca Nazionale di S. Marco. Catalogo dei Codici Marciani italiani a cura della Direzione, vol. II (Classe IV e V) redatto da Carlo Fratti e A. Segarizzi. Modena, 1911, 1 vol. 8°.

* — R. Magistrato alle Acque. Ufficio Idrografico. Pubblicazioni, N. 22, 28, 29, 31, 32, 34, 35. — Livellazioni di precisione, N. 14-17, 19, 20, 22, 23, 25, 29, 30, 31, 49, 50, 54. — Bollettino: Parte I (*a*), Servizio meteorologico: Dati orari osservati a Venezia per cura dell'Osservatorio del Seminario Patriarcale, centrale della Rete del Magistrato, 1910, settembre-dicembre; 1911, gennaio-giugno. — Parte I (*b*), Servizio meteorologico: Dati osservati nelle stazioni meteorologiche della rete del Magistrato, 1910, settembre-dicembre; 1911, gennaio-giugno. — Parte II. Servizio pluviometrico e idrometrico: Totali decadici della pioggia caduta e altezze idrometriche meridiane, 1910, marzo-dicembre; 1911, gennaio-aprile. — Parte III, Servizio mareografico: Dati orari e dati di alta e bassa marea, 1910, maggio-dicembre; 1911, gennaio-aprile. — Sull'antica idrografia veneta. Saggio di Antonio Averone.

* **Vercelli**. Società Vercellese di Storia ed Arte. Archivio. Memorie e Sunti. An. II, 1910, N. 3-4; III, 1911, 1.

* **Verona**. Accademia d'Agricoltura, scienze, lettere, arti e commercio. Atti e Memorie, Serie IV, vol. XI. — Osservazioni meteoriche dell'anno 1910.
* — Museo civico. Madonna Verona. Bollettino, An. IV, 1910, fasc. 16; V, 17-19.
* **Vicenza**. Museo Civico. Bollettino, 1910, fasc. 3-4.
* — Accademia Olimpica. Atti, Nuova Ser., vol. II (1909-1910).
* **Warszawa**. Towarzystwa Naukowego Warszawskiego (Société scientifique de Varzovie). Sprawozdania (Comptes rendus des Séances), 1910, Rok III, Zeszyt 8-9; 1911, Rok IV, 1-7. — Prace II. Wydziat nauk antropologicznych, spotecznych, historyl i filozofil, N. 4-5. — Prace III. Wydziat nauk matematycznych i przyrodniczych, N. 3.

Washington. Library of Congress. Report of the Librarian of Congress and Report of the Superintendent of Library Building and Grounds for the fisical Year ending June 30, 1910. — Publications of the Library issued since 1897, January, 1911.

* — Smithsonian Institution. United States National Museum. Bulletin, 71, 73-75. — Contributions from the United States National Herbarium, vol. XIII, p. 3-9; XIV, p. 1-2; XV. — Proceedings, vol. XXXVII. — Report on the progress and condition for the Year ending June 30, 1910.
* — Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology. Bulletin, 37, 45, 49. — Handbook of American Indian Languages, part I. — Handbook of American Indians North of Mexico. In two parts. Part 2.
* — Smithsonian Institution. Smithsonian Miscellaneous Collections, vol. LI, N. 4; LIII, 6, 7; LVI, 1, 5-10, 11-15, 17; LVII, 1, 8. — Annual Report of the Board of Regents... Showing the operations, expenditures and condition of the Institution in the Year ending June 30, 1909. — Opinions rendered by the international Commission on Zoological nomenclature. Opinions 1 to 29.
* — Carnegie Institution. Publications, Nos. 83, 86, 88, 109, 113-115, 118-120, 124, 126-149.
* — Washington Academy of Sciences. Journal, vol. I, N. 1-4.

— U. S. Geological Survey. Department of Interior. Bulletins, Nos. 381, 398, 406, 407, 415, 417, 419, 420, 422, 425-430, 432-435, 437, 440, 442, 444. — Water Supply Papers, Nos. 237, 239, 240, 241, 243-255, 260, 262, 264. — Professional Paper, N. 68. — Geologic Atlas of the United States, fol. 160-173. — Thirty-first Annual Report of the Director... to the Secretary, 1910.

* — Department of Commerce and Labor. Bureau of Standards, Bulletin, vol. VI, N. 4; VII, 1-3. — Bulletin of the Bureau of Labor, N. 89-90 (1910). — Annual Report of the Commissioner-General of immigration to the Secretary... for the fiscal year ended June 30, 1910. — March immigration Bulletin. — Report of the Superintendent of the Coast and Geodetic Survey showing the Progress of the Work from July 1, 1909, to June 30, 1910.
* — U. S. Naval Observatory. Synopsis of the Report of the Superintendent, for the fiscal Year ending June 30, 1910.

— Mount Weather Observatory. Bulletin, vol. I, p. 3.

Wien. Kaiserliche Akademie der Wissenschaften. Almanach, 1910. — Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, Sitzungsberichte, CXIX. Bd. 1910; Abth. I, Heft. 5-10; CXX. Bd. 1911, Abth. I, 1-6; Abth. II *a*, Heft. 4-10; Abth. II *b*, Heft. 7-10; Abth. III, Heft. 4-10; CXX. Bd. 1911, Abth. I, 1-5; Abth. II *a*, Heft. 1-6; Abth. II *b*, Heft. 1-4. — Philosophisch-historische Klasse, Sitzungsberichte, CLXIII. Bd., Abth. 3; CLXIV, 5, 6; CLXV, 1, 2, 4, 5, 6; CLXVI, 1, 4, 6; CLXVII, 1, 2, 4, 5, 6; CLXVIII, 1, 4. — Denkschriften, Bd. LIV, LXXXV, LXXXVI. — Archiv für österreichische Geschichte, C. Bd., Hälfte 2; CI, 2.

* — K. K. Geologische Reichsanstalt. Verhandlungen, 1910, N. 13-18; 1911, 1-11. — Jahrbuch, Jahrg. 1910, LX. Bd., 3, 4; LXI, 1-2. — Abhandlungen, Bd. XVI, Heft 3; XX, 3; XXI, 2; XXII, 1.

* — K. K. Zoologisch-Botanische Gesellschaft. Verhandlungen, Jahrg. 1910, LX. Bd.

— Oesterreichische Kommission für die internationale Erdmessung. Verhandlungen-Protokolle über die am 4. Dezember 1909 und am 7 Juni 1910 abg. Sitzungen.

* **Würzburg**. Physikalisch-medicinische Gesellschaft. Sitzungsberichte, 1910, N. 1-5; 1911, 1-7. — Verhandlungen, N. F., Bd. XL, N. 8; XLI, 1-7.

* **Zagreb**. Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. Ljetopis, 1910, Rad, Razredi hist.-filolog. i filozofičko-juridički, (Knjiga 184), 75; (186), 76; (187), 77. — Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena, Kňiga XV, Svezak 2; XVI, 1. — Diplomatički zbornik (Codex diplomaticus) Kratjcvine Hrvatske, Dalmacije i Slavonije Svezak VIII Listine godina 1301-1320. — Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika, Sv. 29, 6 šestoga dijela i Mjesto-Moračice. — Statute primorskih gradova i općina.

— Kr. Hrvatsko-Slavonsko-Dalmatinskoga Zemaljskoga Arkiva. Vjesnik-Godina, XII, Sveska, 3-4; XIII, 1-4. — Historia et praesens Status Archivi regnorum Croatiae, Slavoniae et Dalmatiae Zagabriae. Zagabriae, 1910; 8°.

* — Società Archeologica Croata. Vjesnik, N. S., Sveska XI, 1910-1911.

* **Zürich**. Naturforschende Gesellschaft. Vierteljahrsschrift, 55. Jahrg., 1910, 3-4 Heft.

PERIODICI 1911.

* **Acta** mathematica. Zeitschrift herausgegeben von G. Mittag-Leffler. Stockholm; 4°.

** **Almanacco** italiano. Piccola enciclopedia popolare della vita pratica. Firenze; 16°.

** **Annalen** der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.

** **Annales** de biologie lacustre publiées sous la direction du dr. E. Rousseau.

** **Annales** de Chimie et de Physique. Paris; 8°.

** **Annales** scientifiques de l'École Normale supérieure. Paris; 4°.

* **Annals** and Magazine of Natural History. London; 8°.

** **Annals** of Mathematics, second series. Charlottesville; 4°.
** **Antologia** (Nuova). Rivista di scienze, lettere ed arti. Roma; 8°.
** **Archiv** für Entwickelungsmechanik der Organismen. Leipzig; 8°.
** **Archiv** für Protistenkunde. Jena; 8°.
** **Archives** des Sciences physiques et naturelles, etc. Genève; 8°.
** **Archivio** storico italiano. Firenze; 8°.
* **Archivio** storico lombardo. Milano; 8°.
* **Archivio** storico sardo. Edito dalla Società storica sarda. Cagliari; 8°.
* **Archivio** storico per la Sicilia orientale. Catania, 8°.
* **Archivum** Franciscanum historicum. Ad Claras Aquas; 8°.
* **Ateneo** veneto. — Rivista mensile di scienze, lettere ed arti. Venezia; 8°.
** **Athenaeum** (The). Journal of English and Foreign Literature, Science, the Fine Arts, Music and the Drama. London; 4°.
* **Beiblätter** zu den Annalen der Physik und Chemie. Leipzig; 8°.
** **Berliner** philologische Wochenschrift. Berlin; 8°.
** **Bibliografia** italiana. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Milano; 8°.
** **Bibliographie** der deutschen Zeitschriften-Litteratur, mit Einschluss von Sammelwerken und Zeitungen. Leipzig; 4°.
Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. Firenze; 8°.
** **Bibliotheca** mathematica. Zeitschrift für Geschichte der Mathematik. Stockholm; 8°.
** **Bibliotheca** Philologica Classica. Berlin; 8°.
** **Bibliothèque** de l'École des Chartes; Revue d'érudition consacrée spécialement à l'étude du moyen âge, etc. Paris; 8°.
** **Bibliothèque** universelle et Revue suisse. Lausanne; 8°.
** **Bollettino** Ufficiale del Ministero dell'Istruzione Pubblica. Roma; 8°.
* **Brixia Sacra**. Bollettino bimestrale di Studi e documenti per la Storia Ecclesiastica bresciana. Brescia; 8°.
** **Bullettino** (Nuovo) di Archeologia cristiana. Roma; 8°.
* **Bullettino** di Archeologia e Storia dalmata. Spalato; 8°.
** **Centralblatt** für Mineralogie, Geologie und Paleontologie in Verbindung mit dem neuen Jahrbuch für Mineralogie, Geologie und Paleontologie. Stuttgart; 8°.
* **Cimento** (Il nuovo). Pisa; 8°.
Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des sciences. Paris; 4°.
* **Elettricista** (L'). Rivista mensile di elettrotecnica. Roma; 4°.
** **Ἐφημερὶς** ἀρχαιολογική. Ἐν Ἀθήναις. 4°.
Eranos. Acta philologica Suecana. Göteborg; 8°.
** **Euphorion**, Zeitschrift für Literaturgeschichte. Leipzig; 8°.
** **Fortschritte** der Physik. Braunschweig; 8°.
* **Gazzetta** chimica italiana. Roma; 8°.
* **Gazzetta** Ufficiale del Regno. Roma; 4°.
Gegenbauers Morphologisches Jahrbuch. Leipzig; 8°.
* **Giornale** del Genio civile. Roma; 8°.

** **Giornale** della libreria, della tipografia e delle arti e industrie affini. Milano; 8°.
** **Giornale** storico della Letteratura italiana. Torino; 8°.
Giornale storico della Lunigiana. La Spezia; 8°.
** **Guida** commerciale ed amministrativa di Torino. 8°.
* **Heidelberger Jahrbücher** (Neue). Heidelberg; 8°.
* **Historische** Zeitschrift. München; 8°.
* **Ion.** Zeitschrift für Electronik, Atomistik, Ionologie, Radioactivität und Raumchemie. An. I, II. London, 1909-1910; 8°.
* **Jahrbuch** über die Fortschritte der Mathematik. Berlin; 8°.
** **Jahrbuch** (Neues) für Mineralogie, Geologie und Palaeontologie, etc. 1909, I. II. Beil. Bd. VIII, 1, 2. Stuttgart; 8°.
** **Jahresberichte** der Geschichtswissenschaft im Auftrage der historischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben von E. Berner. Berlin; 8°.
* **Journal** (The American) of Science. Edit. Edward S. Dana. New-Haven; 8°.
** **Journal Asiatique**, ou Recueil de Mémoires, d'Extraits et de Notices relatifs à l'histoire, à la philosophie, aux langues et à la littérature des peuples orientaux. Paris; 8°.
** **Journal** de Conchyliologie, comprenant l'étude des mollusques vivants et fossiles. 1907; T. LVI. Paris; 8°.
** **Journal** de Mathématiques pures et appliquées. Paris; 4°.
** **Journal** des Savants. Paris; 8°.
** **Journal** für die reine u. angewandte Mathematik. Berlin; 4°.
* **Journal** of Physical Chemistry. Ithaca; 8°.
** **Mathematische** u. Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Leipzig; 8°.
** **Minerva.** Jahrbuch d. gelehrten Welt. Strassburg; 16°.
** **Modern** language notes. Baltimore; 4°.
* **Monatshefte** für Mathematik und Physik. Wien; 8°.
* **Morphologisches** Jahrbuch. Leipzig; 8°.
** **Moyen Age** (Le). Bulletin mensuel d'histoire et de philol. Paris; 8°.
** **Nature**, a weekly illustrated Journal of Science. London; 8°.
* **Nieuw Archieff** voor Wirskunde. Uitgegeven door hel Wiskundig Genootschap te Amsterdam; 8°.
** **Palaeontographica.** Beiträge zur Naturgesch. der Vorzeit. Stuttgart; 4°.
** **Petermanns** Mitteilungen aus Justus Perthes' Geographisch. Anstalt. Gotha; 8°.
** — Ergänzung. N. 159-160.
* **Physical Review** (The); a journal of experimental and theoretical physic. Published for Cornell University Ithaca. New-York; 8°.
* **Portugalia.** Materias para o estudo do povo portuguez. Porto; 8°.
* **Prace** matematyczno fizyczne. Warzawa; 8°.
* **Psychologische Studien** herausg. von W. Wundt. Neue Folge der Philosophischen Studien. Leipzig; 8°.
** **Quarterly** Journal of pure and applied Mathematics. London; 8°.
** **Raccolta** Ufficiale delle leggi e dei decreti del Regno d'Italia. 8°.
** **Revue** archéologique. Paris; 8°.
** **Revue** de la Renaissance. Paris; 8°.

* **Revue** de l'Université de Bruxelles; 8°.
** **Revue** des Deux Mondes. Paris; 8°.
** **Revue** du Mois. Paris; 8°.
** **Revue** générale des sciences pures et appliquées. Paris; 8°.
** **Revue** numismatique. Paris; 8°.
** **Revue** politique et littéraire, revue bleue. Paris; 4°.
** **Revue** scientifique. Paris; 4°.
* **Revue** semestrielle des publications mathématiques. Amsterdam; 8°.
** **Risorgimento** italiano. Rivista storica. Torino; 8°.
* **Rivista** di Artiglieria e Genio. Roma; 8°.
** **Rivista** di Filologia e d'Istruzione classica. Torino; 8°.
** **Rivista** d'Italia. Roma; 8°.
** **Rivista** di scienza. Organo internazionale di sintesi scientifica. Bologna; 8°.
** **Rivista** di filosofia, in continuazione della *Filosofia delle Scuole italiane* e della *Rivista italiana di Filosofia*, Pavia; 8°.
* **Rivista** internaz. di scienze sociali e discipline ausiliarie. Roma; 8°.
* **Rivista** italiana di Sociologia. Roma; 8°.
* **Rivista** storica benedettina. Roma; 8°.
* **Rivista** storica italiana. Torino; 8°.
Rosario (Il) e la Nuova Pompei. Valle di Pompei; 8°.
** **Science**. New-York; 8°.
* **Science Abstracts**. Physics and Electrical Engineering. London; 8°.
* **Sperimentale** (Lo). Archivio di Biologia. Firenze; 8°.
** **Stampa** (La). Gazzetta Piemontese. Torino; f°.
** **Studi** medioevali diretti da F. Novati e R. Renier. Torino; 8°.
* **Tridentum**. Rivista mensile di studi scientifici. Trento; 8°.
** **Vegetation** (Die) der Erde. Leipzig; 8°.
* **Wiskundige** Opgaven met de Oplossingen, door de leden van het Wiskundig Genootschap. Amsterdam; 8°.
** **Zeitschrift** für Gletscherkunde für Eiszeitforschung und Geschichte des Klimas. Berlin; 4°.
* **Zeitschrift** für matematischen und naturwissenschaftl. Unterricht, herausg. v. J. C. Hoffmann. Leipzig; 8°.
** **Zeitschrift** für physikalische Chemie. Leipzig; 8°.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 19 Novembre 1911.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vicepresidente Camerano, ed i Soci: Naccari, Direttore della Classe, Salvadori, D'Ovidio, Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Somigliana, Fusari e Segre, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Grassi.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Il Presidente, dato il saluto augurale per il nuovo anno accademico, rammenta le onoranze per Amedeo Avogadro, che si svolsero in Torino il 24 settembre. Ricorda che in quel giorno, alla commemorazione che ebbe luogo in questa sede accademica, intervenne S. M. Vittorio Emanuele III, Re d'Italia. Accenna all'intervento ad altre adunanze accademiche del Re Vittorio Amedeo III nel 1789, del Re Vittorio Emanuele I nel 1817, e del Re Carlo Alberto nel 1833, rilevando la felice diversità dei tempi, e notando come anche l'Accademia valse a prepararla. — Rende grazie e lode al Socio Guareschi, al quale si deve se le onoranze ad Avogadro riuscirono tanto solenni, e per ogni parte degne dell'insigne uomo; ed accenna così a quanto fece il Guareschi per raccogliere le sottoscrizioni e per l'ere-

zione del monumento, e a quanto ancora oggi egli fa per condurre a termine tutto ciò che concerne quelle onoranze. Il Presidente si intrattiene principalmente intorno al volume *Opere Scelte di Amedeo Avogadro* composto ed illustrato dal Socio Guareschi, e al discorso che questi pronunziò nel giorno della commemorazione. Conclude il Presidente presentando all'Accademia il volume delle Opere Scelte e la Medaglia Commemorativa, nella quale è in una parte il ritratto dell'Avogadro e scritto nell'altra: " Nel Centenario della sua Teoria Molecolare inaugurandosi il monumento 24 settembre 1911 „.

Il Presidente dice poi della perdita fatta dall'Accademia per la morte del Socio Spezia, pronunciando le seguenti parole:

Fu lutto gravissimo non solo per la nostra Accademia, ma per tutto il mondo della scienza, il giorno 10 di questo mese, allorchè improvvisamente si spense la vita di Giorgio Spezia, vita tutta e intieramente di scienziato e di professore.

Preghiamo il Socio Parona di commemorare l'illustre estinto ed egli saprà esporre appieno le opere di Lui che fu eminente maestro e uno dei rari cultori in Italia della Geologia chimica.

Nel dare oggi il primo annunzio di tanta perdita, io mi restringo a raffigurare nel nostro pensiero quel perfetto modello dell'uomo di scienza, sdegnoso di ogni vanità che passa e solo appassionato per le conquiste scientifiche che restano.

La sua attività scientifica, formata di esperienze proprie e di propri concetti, si iniziò nel 1871 e si chiuse, singolare coincidenza, cogli studi intorno all'avvallamento delle sponde dei laghi, studi nei quali egli palesò una nuova spiegazione e recò pratici consigli.

Parve all'Accademia dei Lincei classica la sua opera sui giacimenti zolfiferi della Sicilia, e quanti seguirono i suoi lavori conoscono come questi si volsero, con speciale predilezione, alla genesi chimica e cristallografica del quarzo e, con costanza vittoriosa d'indagini e di dimostrazioni, al congiungersi della temperatura colla pressione nei fenomeni di metamorfismo e di minerogenesi.

Tutti i giorni si somigliarono per lui, perchè da mane a sera dimorava nel suo museo, del quale ancora nel settembre scorso parlava a me con amore eloquente e quasi con paterna commozione. Dimorava valoroso e geniale sperimentatore nel suo laboratorio. Ivi inventava e sovente fabbricava ingegnosi apparecchi per le sue prove e li mostrava con giusto e schietto orgoglio all'ammirazione dei visitatori.

Ai veri studiosi era largo di aiuti e di consigli preziosi.

In lui un certo fare pronto e reciso celava un animo buono.

Pubblicò circa quaranta memorie scientifiche e tutte, tranne quattro o cinque, nei volumi della nostra Accademia. Sono scritture in generale esili di mole, ma frutto di lunghe esperienze; talune di più anni di indagini e ciascuna di esse tiene luogo notabile negli annali della scienza e tutte portano un'impronta personale.

Usò tratto tratto acerba la penna in polemiche relative alle istituzioni superiori scolastiche; ma seguì in quelle polemiche l'impulso del suo vibrante sentire e con fronte alta prese sempre di mira i potenti.

Egli amò il suo paese natìo e per esso in più incontri utilmente si adoperò.

Vedovo dal giorno in cui nacque la sua unica figlia, formò sempre con questa una consuetudine di vita mirabile d'affetti, un'anima sola. Ed ora essa, la inconsolabile figlia, come ispirata dal sentire paterno, chiede, solo possibile conforto per tanto cordoglio, di poter accorrere, infermiera pietosa, al letto dei feriti nella guerra che l'Italia oggi combatte per il diritto della civiltà.

Quintino Sella preconizzò la vita scientifica di Giorgio Spezia.

E Giorgio Spezia fu pari a quelli alti presagi per virtù di sapere, per franco sentire, per dignità di vita.

Il Segretario dà notizia delle condoglianze ricevute dall'Accademia per la morte del Socio Spezia. — Comunica che alle onoranze tributate in Berlino il 22 luglio scorso al nostro Socio corrispondente Waldeyer l'Accademia si fece rappresentare dai Soci Schwarz e Fischer. — L'Università di Minnesota ha invitato l'Accademia a farsi rappresentare alle onoranze che

si tributarono al suo Presidente George Edgar Vincent il 18 ottobre. L'Accademia incaricò il Presidente del Comitato di rappresentarla. — Il Socio Capellini ha scritto all'Accademia per ringraziarla della sua partecipazione alle onoranze recentemente tributategli.

Il Comitato per le onoranze al Prof. Carlo Reymond ha inviato in omaggio i due volumi delle Opere di questo scienziato.

Sono giunti inoltre i seguenti doni di Soci corrispondenti:

G. Koerner, *Ueber die Bestimmung des chemischen Ortes bei den aromatischen Substanzen*;

G. H. Darwin, *Scientific Papers*, vol. IV;

A. Lacroix, *Les syénites néphéliniques de l'Archipel de Los et leurs minéraux*.

Il Socio Jadanza presenta in omaggio le sue *Tavole tacheometriche sessagesimali*; e per incarico del Prof. G. Boccardi, l'*Annuario astronomico pel 1912*, pubblicato dal R. Osservatorio di Torino.

Il Socio Mattirolo, a nome del Prof. G. B. De Toni, presenta in dono varie pubblicazioni di questo scienziato, riferentisi specialmente alla Storia della Botanica.

Vengono comunicate, per la stampa negli *Atti*, le seguenti Note:

C. Mineo, *Di una applicazione del teorema di Dalby*, dal Socio Jadanza;

M. Ghiglieno, *Azione del forone sulla pirocatechina e sul pirogallolo*, dal Socio Guareschi;

T. Boggio, *Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare*, dal Socio Somigliana;

M. Bottasso, *Alcune applicazioni delle formule di Frenet*, dal Socio Peano.

Il Socio Foà presenta per la pubblicazione nei volumi delle *Memorie*, un suo lavoro intitolato: *Sulle cellule interstiziali*

del testicolo. La Classe ne approva, con voto unanime, l'accoglimento.

Pure per la pubblicazione fra le *Memorie*, vengono presentati questi altri lavori:

O. Zanotti-Bianco, *Le idee di Lagrange, Laplace, Gauss e Schiaparelli sull'origine delle Comete*, dal Socio Jadanza;

A. C. Bruni, *Studi sullo sviluppo della regione intermascellare nell'uomo,* dal Socio Fusari;

G. Colonnetti, *L'equilibrio elastico dal punto di vista energetico,* dal Socio Somigliana.

Vengono incaricati di riferire su di essi rispettivamente i Soci: Jadanza e Naccari, Fusari e Camerano, Somigliana e Guidi.

In seduta privata la Classe procede alla nomina di un membro della Giunta per il premio Vallauri in sostituzione del compianto Socio Spezia, e riesce eletto il Socio D'Ovidio.

LETTURE

Di una applicazione del teorema di Dalby.

Nota del sig. CORRADINO MINEO

Il teorema di DALBY è stato qualche volta adoperato a *dedurre*, con un semplice calcolo, la longitudine *astronomica* di un punto C rispetto a un altro punto B, quando siano noti gli azimut *astronomici* reciproci dei due punti e la latitudine *astronomica* del punto C, e sia, beninteso, *sufficientemente* piccola la distanza geodetica dei punti medesimi [1].

Crediamo però che la questione meriti un'analisi più approfondita, per vedere come e fino a qual punto il procedimento si possa ritenere legittimo.

1. Premettiamo alcune considerazioni elementari.

Sia ABC un triangolo sferico, appartenente a una sfera di raggio unitario. Indicheremo al solito con a, b, c i lati opposti agli angoli A, B, C, e intenderemo che lati e angoli siano espressi in *radianti.*

Supponiamo che il lato a sia una quantità piccola, della quale possano essere trascurate le potenze dalla *terza* in poi. Per brevità, la chiameremo una *quantità piccola di 1° ordine,* e supporremo sempre, in quel che segue, che le quantità piccole di *3° ordine* siano affatto trascurabili. Infine supporremo b e c tutti e due minori d'un quadrante, ma grandissimi rispetto ad a.

Dalla nota formola

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\epsilon = \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\sin C}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}a\operatorname{tg}\frac{1}{2}b\cos C},$$

[1] Vedi, per es., EMILIO BIANCHI, *La deviazione della verticale alla regia Specola al Collegio Romano, ecc.* (Regia Commissione geodetica italiana, 1911).

che dà l'eccesso sferico ϵ del nostro triangolo, è facile dedurre che ϵ è dell'ordine di a. Si trova infatti nella nostra approssimazione

$$\epsilon = a \operatorname{tg} \frac{1}{2} b \sin C - \frac{a^2}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} b \sin C \cos C. \tag{1}$$

Inoltre, per la relazione

$$|b - c| < a, \tag{2}$$

si vede che la differenza dei due lati b e c è pure del 1° ordine tutt'al più.

Dalla formola, poi,

$$\sin \frac{1}{2} A = \left[\frac{\cos(b-c) - \cos a}{2 \sin b \sin c}\right]^{\frac{1}{2}},$$

ricaviamo, trascurando il 3° ordine,

$$A = \frac{[a^2 - (b-c)^2]^{\frac{1}{2}}}{\sin b}; \tag{3}$$

la quale mostra che anche l'angolo A è una quantità piccola del 1° ordine, purchè, come già si è accennato, b sia abbastanza grande.

Finalmente la formola

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2}(B + C) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} A \frac{\cos \frac{1}{2}(b-c)}{\cos \frac{1}{2}(b+c)}$$

mostra che nel nostro caso è sempre

$$B + C < \pi; \tag{4}$$

e da essa ricaviamo anzi

$$B + C = \pi - A \cos \frac{1}{2}(b + c)\left[1 + \frac{(b-c)^2}{4}\right]; \tag{5}$$

dalla quale vediamo che $B + C$ differisce da π per una quantità piccola del 1° ordine.

Dalla (5) si può anco dedurre

$$\epsilon < A. \tag{6}$$

2. Ciò posto, supponiamo che b e c rappresentino le colatitudini ellissoidiche (rispetto all'ellissoide di Bessel) di due punti terrestri, che indicheremo con le stesse lettere B e C, e che l'angolo compreso A rappresenti la longitudine ellissoidica del punto C (supposto, per fissare le idee, a Est del primo punto) rispetto a B. Assumendo come verso positivo dell'arco BC quello che va da B in C, gli azimut *sferici* dell'arco BC, nei punti B e C, sono rispettivamente B e $180° - C$. Questi azimut sono notevolmente diversi dagli azimut *ellissoidici* dei punti terrestri B e C, cioè di quelli relativi al triangolo ellissoidico, ben determinato, che ha un angolo eguale ad A con vertice nel polo Nord (p. es.) dell'ellissoide di Bessel, e i lati, che lo comprendono, eguali (in ampiezza) a b e c. Siano B' e $180° - C'$ i veri azimut ellissoidici dell'arco di geodetica ellissoidica corrispondente ai due punti terrestri considerati. Le differenze $B' - B$ e $C' - C$ sono dell'ordine del quadrato dell'eccentricità. Abbiamo infatti con sufficiente approssimazione [1]

$$(7)\quad \begin{cases} B' - B = e^2 \dfrac{\sin B \sin C}{\sin A}(\cos b - \cos c) + \ldots, \\ C' - C = -e^2 \dfrac{\sin B \sin C}{\sin A}(\cos b - \cos c) - \ldots; \end{cases}$$

nelle quali abbiamo trascurato di scrivere i termini in e^4. Poichè, nel caso dell'ellissoide besseliano, la quantità e^2 espressa in arco, è di circa $23'$, di quest'ordine saranno *in generale* le differenze $B' - B$ e $C' - C$.

Nel caso, da noi supposto (n° 1), che A sia una quantità molto piccola, basterà supporre che $|b - c|$ sia *non maggiore* di A (ossia che il lato a si scosti abbastanza dal meridiano in B), perchè le differenze $B' - B$ e $C' - C$ risultino dell'ordine di e^2 o d'un ordine ancora più piccolo.

---

[1] Cfr. Andrae, *Problèmes de haute Géodésie*, 2e cahier, p. 44. — Veramente le formole citate si riferiscono al caso in cui B' e $180° - C'$ siano gli azimut delle sezioni normali reciproche dell'Ellissoide, relative ai due estremi della geodetica ellissoidica. Ma per stabilire l'ordine di grandezza delle nostre differenze $B' - B$ e $C' - C$, le (7) sono più che sufficienti.

In ogni caso, il teorema di DALBY ci dà con grande approssimazione

$$(8) \qquad (B' + C') - (B + C) = \frac{e^2 a^3 \sin 2c \sin B'}{24},$$

considerando a (espresso in radianti) come appartenente a una circonferenza di raggio eguale al semigrand'asse dello sferoide terrestre [1]. Poichè la quantità a 2° membro, anco nel caso in cui l'arco a corrisponda sull'Ellissoide di BESSEL a una lunghezza di 100 chilometri, non supera mai in arco $0''\cdot 0002$, potremo scrivere senz'altro

$$(9) \qquad B' + C' = B + C.$$

Posto ciò, consideriamo il triangolo sferico determinato (almeno in pratica) dal lato b e dagli angoli B' e C'; triangolo che designeremo con $A'B'C'$. Noi intendiamo paragonare il triangolo $A'B'C'$ col triangolo ABC, *nell'ipotesi che* $B' - B$ *e* $C' - C$ *si possano riguardare come quantità piccole di 1° ordine, cioè dello stesso ordine di* a *e* A (n° 1). Poniamo

$$(10) \qquad A' - A = \Delta A, \quad B' - B = \Delta B, \quad C' - C = \Delta C.$$

Per la (9), potremo scrivere

$$(11) \qquad \Delta C = - \Delta B.$$

Dal triangolo ABC si passa al triangolo $A'B'C'$, cambiando B in $B + \Delta B$, C in $C + \Delta C$ e lasciando invariato b; noi vogliamo appunto trovare l'incremento ΔA, che subisce l'angolo A.

Gioviamoci della nota relazione

$$(12) \qquad \sin A \sin C \cos b - \cos A \cos C - \cos B = 0,$$

che (con le dovute restrizioni) definisce implicitamente A come funzione di B, C, b. Avremo, nell'ipotesi che il 3° ordine sia affatto trascurabile e tenendo presente che $\Delta b = 0$ e $\Delta C = - \Delta B$,

$$(13) \quad \Delta A = \left(\frac{\partial A}{\partial B} - \frac{\partial A}{\partial C}\right) \Delta B + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial B^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial C^2} - 2\frac{\partial^2 A}{\partial B \partial C}\right) \Delta B^2.$$

---

[1] Veramente il teorema, espresso dalla (8), fu dimostrato dal PUCCI (*Fondamenti di Geodesia*, vol. II, cap. VIII) come corollario del teorema di DALBY; e poi dal PIZZETTI (*Gli azimut reciproci di un arco di geodetica* (Acc. Sc. Torino, vol. XXIII)), indipendentemente dal teorema di DALBY.

Or dalla (12) si deduce (con facili trasformazioni nelle quali si tenga conto delle altre relazioni per i triangoli sferici):

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial A}{\partial B} = -\sec c\,, \qquad \dfrac{\partial A}{\partial C} = -\cos a \sec c\,, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 A}{\partial B^2} = \operatorname{tg}^2 c \sec c \operatorname{ctg} B\,, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 A}{\partial C^2} = \dfrac{(\cos^2 a + \cos^2 c)\cos B + 2\cos c \cos A(\cos A \cos C \cos b - \sin A \sin C)}{\cos^3 c \sin B}\,, \\[2mm] \dfrac{\partial^2 A}{\partial B \partial C} = \dfrac{\cos a \cos B + \cos c(\cos A \cos C \cos b - \sin A \sin C)}{\cos^3 c \sin B}\,. \end{cases}$$

Da queste, trascurando le quantità piccole del 3° ordine, otteniamo

$$(15)\qquad \frac{\partial A}{\partial B} - \frac{\partial A}{\partial C} = \frac{a^2}{2}\sec c\,;$$

dunque nella (13) il coefficiente di ΔB è una quantità piccola di 2° ordine e quindi il termine in ΔB è trascurabile. Quanto al termine in ΔB^2, notiamo che nell'espressione del suo coefficiente bisognerà trascurare i termini piccoli di 1° ordine, e quindi alle espressioni rigorose di $\dfrac{\partial^2 A}{\partial C^2}$ e $\dfrac{\partial^2 A}{\partial B \partial C}$, date dalle (14), possiamo senz'altro sostituire le seguenti:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial C^2} = \frac{(1 + \cos^2 c)\cos B + 2\cos b \cos c \cos C}{\cos^3 c \sin B}\,,$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial B \partial C} = \frac{\cos B + \cos b \cos c \cos C}{\cos^3 c \sin B}\,.$$

E allora segue facilmente

$$(16)\qquad \frac{\partial^2 A}{\partial B^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial C^2} - 2\frac{\partial^2 A}{\partial B \partial C} = 0.$$

Per le (15), (16), la (13) dà quindi, nell'ipotesi del 3° ordine trascurabile,

$$(17)\qquad \Delta A = 0.$$

Notiamo subito che affinchè la (17) sussista, bisogna, oltre le ipotesi ammesse, supporre che *i punti terrestri* B *e* C *non siano molto prossimi all'equatore*; e ciò per la presenza del divisore $\cos c$ nei secondi membri delle (14).

3. Vediamo ora, sommariamente, di che ordine siano gli incrementi subiti dai lati a e c dello stesso triangolo ABC, quando i due angoli B e C ricevono gl'incrementi ΔB e ΔC.

Per avere l'incremento di a, basta partire dalla nota formola

$$\sin a \operatorname{ctg} b - \cos a \cos C - \operatorname{ctg} B \sin C = 0;$$

dalla quale, badando alla (11), si ottiene

$$\Delta a = \frac{\Delta B}{\cos c \sin B}(\sin b \cos A - \sin c) + \ldots,$$

dove abbiamo omesso il termine in ΔB^2. Nel coefficiente di ΔB potremo trascurare i termini di 2° ordine, e quindi scriveremo

$$\Delta a = \frac{(b-c)\Delta B}{\sin B} + \ldots; \tag{18}$$

dunque Δa è piccolo di 2° ordine.

In quanto a Δc, dalla

$$\sin c = \frac{\sin b \sin C}{\sin B}$$

deduciamo

$$\Delta c = -\frac{\Delta B}{\cos c \sin B}(\sin c \cos B + \sin b \cos C) + \ldots;$$

e, tenendo presente la (5), potremo scrivere, nella nostra approssimazione,

$$\Delta c = -\Delta B\left[(c-b)\operatorname{ctg} B + A \cos \frac{1}{2}(b+c) \operatorname{tg} b\right] + \ldots; \tag{19}$$

dunque anco Δc è piccolo di 2° ordine.

4. Osserviamo che preso sul lato AB del triangolo ABC, o sul suo prolungamento dalla parte di B, un punto B_1 tale che nel triangolo sferico ACB_1 risultante l'angolo in C sia eguale all'angolo C', questo triangolo ACB_1 sarà eguale, stante la (17), al triangolo $A'B'C'$. E quindi dovrà essere

$$\text{ang}\, ABC + \text{ang}\, BCA = \text{ang}\, AB_1C + \text{ang}\, B_1CA;$$

il che vuol dire che nel triangolo BB_1C l'eccesso sferico è trascurabile nella nostra approssimazione. Si può infatti dimostrare che l'eccesso sferico di BB_1C è piccolo del 3° ordine; con che si ha una conferma della (17).

5. Se come quantità piccola di 3° ordine intendiamo considerare quella, affatto trascurabile nella pratica, equivalente in arco a $0'' \cdot 01$ (circa 48×10^{-9} in radianti), allora il 1° ordine è rappresentato da circa $12' 29''$ in arco o da $0 \cdot 003634$ in radianti. In tal caso la distanza geodetica dei due punti terrestri B e C non deve superare, in numero tondo, i 23 chilometri; anzi converrà che si mantenga alquanto inferiore al detto valore affinchè la (17) si possa ammettere sicuramente, senza errore sensibile.

Pertanto possiamo concludere il seguente teorema:

Siano B *e* C *due punti dell'Ellissoide besseliano di riferimento distanti una ventina di chilometri tutt'al più e tali che l'arco* BC *si scosti abbastanza dal meridiano ellissoidico di* B *e non attraversi l'equatore. Se si costruisce un triangolo sferico* A'B'C' *in cui un lato* b' *sia eguale alla colatitudine ellissoidica del punto* C, *l'angolo opposto* B' *sia eguale all'azimut ellissoidico dell'arco di geodetica ellissoidica* BC *nel punto* B *e l'angolo* C' *sia il supplemento dell'azimut ellissoidico di* BC *nel punto* C; *allora l'angolo in* A' *del detto triangolo* A'B'C' *si potrà ritenere eguale alla longitudine ellissoidica di uno dei punti dati rispetto all'altro.*

Il teorema precedente, nelle ipotesi dichiarate, può servire al trasporto della longitudine dal punto B al punto C dell'arco BC di geodetica ellissoidica, quando si sia già eseguito il trasporto della latitudine e dell'azimut.

6. Ammettiamo ora che in uno dei punti dati, p. es. in B, la normale ellissoidica coincida con la normale geoidica, per modo che gli elementi ellissoidici del punto B siano a un tempo elementi astronomici.

Indichiamo con l_0, λ_0 rispettivamente la latitudine e la longitudine di B e con A_0 l'azimut geodetico-astronomico del secondo punto C sull'orizzonte di B. Indichiamo ancora con φ e ω la latitudine e longitudine ellissoidica del secondo punto C e con α l'azimut ellissoidico del punto B sull'orizzonte di C.

Supporremo, come si è detto (n° 2), che C sia a Est di B, e che inoltre B e C appartengano allo stesso emisfero terrestre, p. es. al boreale (n° 1).

Chiamiamo T il triangolo sferico, per noi *individuato*, che ha un lato eguale a $90° - \varphi$, l'angolo opposto eguale ad A_0 e un angolo adiacente eguale a $360° - \alpha$. Se son verificate le ipotesi del n° 5, il terzo angolo di T risulterà eguale alla differenza di longitudine ellissoidica tra i due punti B e C, o addirittura alla longitudine ellissoidica ω di C rispetto a B, se per comodità supponiamo $\lambda_0 = 0$. Il lato opposto a $360° - \alpha$, nel triangolo T, non è eguale a $90° - l_0$, ma ne differisce per quantità di 2° ordine (n° 3); e similmente il terzo lato di T, la cui misura in radianti chiameremo a, differirà per quantità del 2° ordine dalla distanza tra i due punti dati B e C.

Premesso ciò, siano ξ ed η le componenti della deviazione della verticale nel punto C; dimodochè, se con l e λ denotiamo la latitudine e la longitudine astronomica del punto C e con A l'azimut astronomico di B sull'orizzonte di C, avremo da note formole

$$(20) \qquad l = \varphi + \xi, \qquad \lambda = \omega + \eta \sec\varphi, \qquad A = \alpha + \eta \operatorname{tg}\varphi.$$

Confrontiamo ora il triangolo T con un altro triangolo sferico T', ben determinato, che ha un lato eguale a $90° - l$, l'angolo opposto eguale ad A_0 e un angolo adiacente eguale a $360° - A$. Si passa al triangolo T', dando al lato $90° - \varphi$ del triangolo T l'incremento $-\xi$, all'angolo $360° - \alpha$ l'incremento $-\eta \operatorname{tg}\varphi$ e lasciando invariato l'angolo A_0. Per calcolare l'incremento che in conseguenza subisce l'angolo ω di T, partiremo ancora (salve le notazioni) dalla relazione (12): senonchè, nello sviluppo di TAYLOR basterà ora fermarsi alle prime potenze degl'incrementi $-\xi$ e $-\eta \operatorname{tg}\varphi$.

Dalla (12) si ricava la nota formola

$$\Delta A = \sin a \sec c \sin C \,\Delta b - \sec c \,\Delta B - \cos a \sec c \,\Delta C;$$

la quale, nel caso del triangolo T, diviene *nella nostra approssimazione*

$$\Delta\omega = \frac{\xi \sin a \sin\alpha}{\sin l_0} + \frac{\eta \operatorname{tg}\varphi \cos a}{\sin l_0}.$$

Tenendo presente che ξ ed η sono quantità assai più piccole del nostro 1° ordine e che l_0 differisce da φ per una quantità di 1° ordine (n° 1), la precedente si scrive

$$(21) \qquad \Delta\omega = \eta \sec\varphi + \eta(\varphi - l_0) + \frac{a\xi \sin\alpha}{\sin\varphi},$$

dove la differenza $\varphi - l_0$ s'intende espressa in radianti.

Ora, anco essendo abbastanza distanti dall'equatore, come già si è detto (n° 2) e come del resto è ovvio, il 2° e 3° termine del 2° membro della (21) non sono sempre trascurabili nella nostra approssimazione; giacchè nel caso in cui a, $\varphi - l_0$ raggiungano, in arco, circa 12′ (n° 5), e ξ, η il valore, eccezionale senza dubbio ma non impossibile, di circa 30″, quei termini possono anche raggiungere valori superiori a 0″·1.

Ma se a e $\varphi - l_0$ non eccedono 2′, in arco, la (2) si può scrivere senz'altro, in ogni caso

$$(22) \qquad \Delta\omega = \eta \sec\varphi ;$$

e questa prova, se badiamo alla 2ª delle (20), che il terzo angolo del triangolo T' è precisamente eguale all'angolo λ, cioè alla longitudine astronomica di C rispetto a B. Di qui il teorema intravisto dal Bianchi [1], cioè: *date tutte le ipotesi precedentemente dichiarate, è possibile dedurre la longitudine astronomica d'un punto* C *rispetto a un punto* B, *quando si siano osservati gli azimut astronomici reciproci dei due punti e la latitudine astronomica del punto* C, *e s'intenda orientato in modo l'ellissoide locale di riferimento che nel punto* B *la normale ellissoidica coincida con la verticale di* B *stesso.*

Per fare del teorema un'applicazione più *larga*, bisogna o contentarsi di un'approssimazione minore di quella data da 0″·01, o sapere già che le deviazioni son piccolissime nel 2° punto C. Ma per la seconda alternativa, non potendo nulla affermare *a priori*, bisognerà inoltre conoscere (da una triangolazione) l'arco di geodetica ellissoidica BC per potere trasportare gli elementi astronomico-ellissoidici da B in C; in tal modo si avrà

(1) Memoria citata, p. 81.

quanto basta per calcolare le ξ ed η relative al punto C. Ed allora il teorema enunciato, praticamente, non giova a nulla, potendosi dedurre la longitudine astronomica di C, assai più semplicemente, con l'equazione di LAPLACE.

L'importanza del teorema potrebbe consistere in questo: che esso darebbe modo di determinare le coordinate astronomiche dei punti del Geoide, compresi in una zona di centro B e di raggio geodetico convenientemente piccolo, eseguendo *soltanto* misure di latitudine e di azimut e *non presupponendo alcun riferimento all'Ellissoide*. Ma non tutti i punti, nell'intorno di B, potrebbero esser determinati astronomicamente (n° 2), e il raggio geodetico della zona dovrebbe essere abbastanza ristretto (circa 2′ in arco).

Dentro tali limiti, peraltro, lo scopo accennato si raggiunge assai più speditamente in un altro modo. *Qualunque sia il Geoide*, noi sappiamo che l'equazione d'una geodetica qualunque di esso è

$$dA = \sin l \, d\lambda\,, \tag{23}$$

denotando l, λ, A rispettivamente la latitudine, la longitudine e l'azimut d'un punto di essa geodetica. Supponendo $\sin l$ sempre positivo lungo un certo arco, dalla (23) ricaviamo, integrando tra un punto (l_0, λ_0, A_0) e un punto (l, λ, A),

$$A - A_0 = \sin\left[l_0 + \theta\,(l - l_0)\right](\lambda - \lambda_0)\,,$$

essendo θ un numero compreso tra 0 e 1. Se nell'intervallo (l, l_0), supposto abbastanza piccolo, scegliamo un valore qualunque l_m, p. es. la media degli estremi $\left[\theta = \frac{1}{2}\right]$, potremo scrivere

$$A - A_0 = \sin l_m \,.\, (\lambda - \lambda_0)\,, \tag{24}$$

commettendo un errore più piccolo in valore assoluto di

$$|(l - l_0)\,(\lambda - \lambda_0|\,; \tag{25}$$

dimodochè potremo applicare la (24) tutte le volte che la quantità (25) è trascurabile; il che potremo sapere *a priori*, senza

alcun circolo vizioso. Se, p. es., ognuna delle differenze $|l - l_0|$, $|\lambda - \lambda_0|$ non supera in arco 100″, l'error temibile, nell'adoperare la (24), è inferiore a 0″·05. La (24) può servire appunto a calcolar λ, quando si conoscano dalle osservazioni l_0, λ_0, A_0, l e A (1).

Istituto Geodetico di Palermo, Giugno 1911.

Azione del forone sulla pirocatechina e sul pirogallolo.

Nota del Dott. MARIO GHIGLIENO.

Qualche anno fa furono pubblicate da R. Fabinyi e T. Széky (1) due interessanti note sopra la condensazione dei chetoni — e specialmente dell'acetone — colla pirocatechina e col pirogallolo, condensazione che veniva eseguita scaldando a 145° l'acetone con l'uno o con l'altro dei suddetti fenoli in presenza di acido cloridrico concentrato e di acido acetico glaciale.

La reazione avverrebbe, secondo gli autori, fra tre molecole di acetone e due del fenolo poliossidrilico, e i composti che ne risultano conterrebbero ancora tutti gli ossidrili fenolici liberi, come lo mostrò la formazione dei rispettivi derivati acetilici e benzoilici. Essi diedero col bromo, anche quando gli ossidrili erano già stati tutti sostituiti, rispettivamente un *tetra-* ed un *di-*bromoderivato di sostituzione.

---

(1) Nel caso del Bianchi, abbiamo

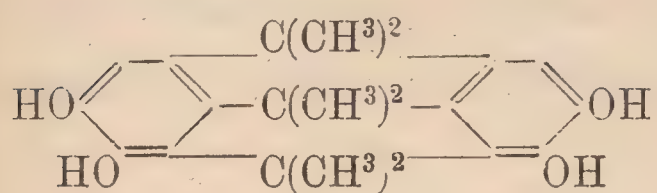
$$l_0 = 41°55'25''\cdot 56, \qquad \lambda_0 = 0, \qquad A_0 = 141°30'54''\cdot 44,$$
$$l = 41°53'53''\cdot 72, \qquad A = 141°31'58''\cdot 54.$$

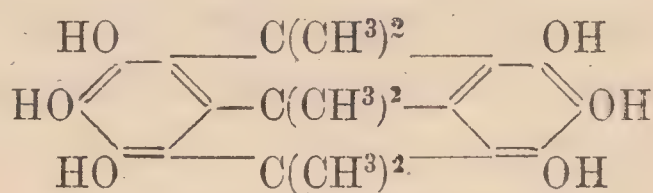
Ponendo $l_m = 41°54'39''\cdot 64$, la (24) dà

$$\lambda = 1'35''\cdot 96,$$

che è appunto il valore trovato dal Bianchi (p. 77).

(1) " Berichte ", *38* (1905), II, pag. 2307 e *38*, III, pag. 3527.

In base a questi dati i sig.ri Fabinyi e Széky attribuirono come molto probabili ai due composti di condensazione le formole seguenti:

```
       ____C(CH³)²____                  HO_____C(CH³)²_____OH
HO<  >—C(CH³)²—<  >OH             HO<  >—C(CH³)²—<  >OH
 HO‾‾‾‾‾‾C(CH³)²‾‾‾‾‾‾OH                HO‾‾‾‾‾‾C(CH³)²‾‾‾‾‾‾OH
            (I)                                  (II)
```

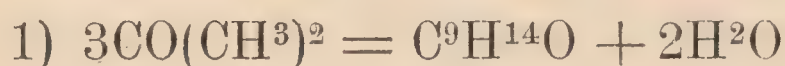
(Che dà un *tetra*-bromoderivato) (Che dà un *di*-bromoderivato)

Parve invece al prof. Guareschi che questo modo di interpretare la condensazione non fosse accettabile sia per la poca attendibilità delle formole precedenti, sia perchè nel riscaldamento a 145° dell'acetone in presenza di acido cloridrico concentrato e di acido acetico glaciale era presumibile che avesse luogo la preliminare condensazione dell'acetone in forone, il che corrisponderebbe appunto alle tre molecole di acetone che reagiscono; il forone agirebbe poi sui fenoli.

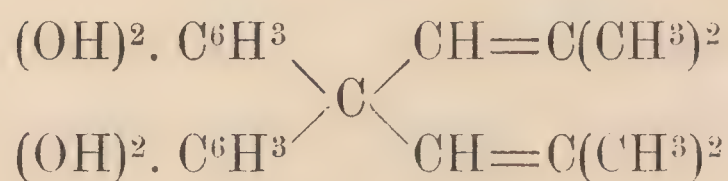
La reazione della condensazione, che Fabinyi e Széky scrissero, nel caso p. es. della pirocatechina, così:

$$2C^6H^4(OH)^2 + 3CO(CH^3)^2 = C^{21}H^{24}O^4 + 3H^2O$$

avverrebbe invece probabilmente in due fasi successive:

$$1)\ 3CO(CH^3)^2 = C^9H^{14}O + 2H^2O$$

$$2)\ C^9H^{14}O + 2C^6H^4(OH)^2 = C^{21}H^{24}O^4 + H^2O$$

e allora il composto risultante potrebbe avere semplicemente la formola:

```
(OH)². C⁶H³\      /CH=C(CH³)²
            >C<
(OH)². C⁶H³/      \CH=C(CH³)²
```

Si noti poi che colla struttura ammessa dai due autori è piuttosto difficile spiegare l'esistenza, da essi stessi constatata, dei derivati rispettivamente *tetra-* e *bi*-bromurati già accennati più sopra, i quali sussistono anche quando tutti gli ossidrili fenolici sono stati sostituiti.

Fabinyi e Széky non fecero osservazione alcuna a questo riguardo. Questa difficoltà intanto non esiste più nell'ipotesi della formazione del forone, potendo allora il bromo entrare sia per sostituzione nei nuclei benzenici — come avrebbero osservato i due autori — o sia anche per addizione sui doppi legami del forone.

Comunque, parve che valesse la pena di tentare la stessa condensazione partendo direttamente dal forone in luogo dell'acetone.

La reazione tra i fenoli polivalenti e il forone — in luogo dell'acetone e in quantità corrispondente — diede origine agli stessi prodotti ottenuti da Fabinyi e Széky, colle medesime proprietà e, in uno dei due casi, anche con ugual rendimento.

Però la reazione avviene, a quanto sembra, più facilmente, avendola eseguita scaldando in tubo chiuso semplicemente a bagno d'acqua invece che a 145°, e poi anche senz'altro in matraccio a ricadere. Nel caso del pirogallolo, se il rendimento fu notevolmente minore, potei per contro ottenere nell'analisi del prodotto dei risultati ben concordanti, il che non era riuscito agli autori citati. Questi attribuirono ciò ad una parziale ossidazione del composto durante la depurazione, mentre invece assai probabilmente si trattava di una incompleta disidratazione della sostanza o del parziale riassorbimento, dopo la disseccazione, di una molecola d'acqua di cristallizzazione di cui essi non fanno parola e che il composto tende a riprendere dall'aria con estrema avidità. Esso perde quest'acqua in modo completo solo verso i 130°-140°, e la riassorbe poi completamente restando esposto all'aria atmosferica.

Si potrebbe forse far l'obbiezione che il forone potesse scomporsi rigenerando l'acetone prima di entrare in reazione, ma questa ipotesi appare poco sostenibile se si pensa che per la idratazione del forone è necessario farlo bollire per sei ore con acido solforico *diluito* (1), mentre nel mio caso la reazione avveniva in presenza di acido cloridrico concentrato e di acido acetico glaciale e riscaldando per due ore o anche meno alla temperatura del bagno maria. E l'acido cloridrico concentrato

---

(1) Claisen, *Annalen*, *180*; pag. 20.

è quello per l'appunto che serve a trasformare, in senso inverso, l'acetone in forone.

D'altra parte anche l'osservazione già fatta riguardo alla formazione dei derivati bromurati vale indirettamente a sostenere la nostra interpretazione dei fatti osservati.

I.

Condensazione tra forone e pirocatechina.

Operai colle stesse quantità di sostanze e di solventi impiegate da Fabinyi e Széky — gr. 21 di pirocatechina, 60 di acido acetico glaciale, 45 di acido cloridrico ($d = 1,19$) e soltanto, in luogo di 10 gr. di acetone, un peso corrispondente, gr. 8, di forone cristallizzato — pure in tubo chiuso, ma scaldando a bagno d'acqua bollente invece che a 145°.

Ottenni, in modo del tutto analogo, la stessa quantità di prodotto — gr. 10,3 — con tutti i caratteri eguali a quelli descritti dai due autori (1).

All'analisi, dopo cristallizzazione dell'alcool a 80°, ebbi:

I. Da gr. 0,1064 di sostanza semplicemente asciutta all'aria, gr. 0,2872 di CO^2 e 0,0698 di H^2O;

II. Da gr. 0,1095 di sostanza seccata a 80°, gr. 0,2968 di CO^2 e gr. 0,0714 di H^2O.

	Trovato		Calcolato per $C^{21}H^{24}O^4$
	I	II	
C %	73,62	73,92	74,07
H %	7,33	7,30	7,11

Feci anche, in piccolo, un tentativo di preparazione scaldando pure per due ore a bagno maria ma semplicemente con refrigerante a ricadere e ne ottenni lo stesso prodotto e anzi sensibilmente meno colorato, però in quantità notevolmente mi-

(1) Altre tre preparazioni furono fatte nelle stesse condizioni in questo laboratorio dai dott.ri F. e G. Benati, solo variando la durata del riscaldamento da una ad otto ore, ma sempre con risultati praticamente eguali. Due analisi di questi prodotti diedero:

C %; 73,82 — 73,83; — H % = 7,10; 7,21.

nore. Se fosse vero che il forone si idrolizzasse in acetone prima di reagire, ciò sarebbe avvenuto più facilmente in questo caso in cui l'acido cloridrico si andò diluendo via via fino alla fine dell'operazione, sfuggendo in quantità considerevole dal refrigerante a ricadere. E avrebbe dovuto ottenersi perciò un rendimento maggiore, contrariamente a quanto è avvenuto di fatto.

II.

Condensazione tra forone e pirogallolo.

Eseguii questa reazione in tre modi diversi e cioè: 1° - in tubo chiuso scaldando a 145° per 45 minuti come Fabinyi e Széky; 2° - in tubo chiuso scaldando a 100° per due ore; 3° - scaldando pure per due ore a bagno maria ma in matraccio a ricadere; sfuggiva naturalmente molto acido cloridrico.

In tutti e tre i casi ottenni sempre lo stesso prodotto, con tutti i caratteri eguali a quelli indicati dai due Autori, ed anche sempre press'a poco col medesimo rendimento, ma però notevolmente minore di quello ottenuto da loro.

Anche questo rendimento così diverso, verificatosi sempre in varie altre preparazioni eseguite dai dott. F. e G. Benati, sembra mostrare che il forone reagisce veramente come tale e non come acetone, nel qual caso non ci sarebbe più ragione di tal differenza.

Nell'analisi di questo composto Fabinyi e Széky ottennero dei risultati piuttosto sconcordanti dal teorico e anche un po' tra di loro (1) e attribuirono ciò ad un principio di ossidazione durante la depurazione del composto. A quanto pare invece si trattava di ciò: che il composto, cristallizzato anche dall'acido acetico glaciale, contiene una molecola d'acqua, che perde solo con difficoltà e tende poi avidamente a riassorbire dall'aria. Essi disseccavano la sostanza per l'analisi a 110°, il che forse non bastava per scacciar tutta l'acqua, oppure questa veniva

---

(1) In due analisi dello stesso prodotto ottennero:

$$C\,\% = 66{,}85 - 67{,}21 ; \quad H\,\% = 6{,}42 - 6{,}26.$$

Teorico: 67,74 e 6,45.

in piccola parte riassorbita dal composto anidro, ciò che avviene assai facilmente.

Eseguendo il disseccamento del composto — asciutto all'aria a temperatura fra 20° e 30° — scaldando fino a 130° in corrente d'idrogeno secco, e in comunicazione con un tubo a cloruro di calcio, ottenni una perdita di peso della sostanza e un aumento del cloruro di calcio corrispondenti a 4,53 %. Calcolato per $C^{21}H^{24}O^{6} . H^{2}O = 4,62\%$.

Il composto così disseccato, lasciato all'aria, riassorbe con grande avidità e in modo completo la sua molecola d'acqua. La sostanza dell'analisi III, per es., fu prima disidratata successivamente due volte e due volte riprese dall'aria la propria acqua di cristallizzazione.

Ecco i risultati di alcune analisi:

I. Da gr. 0,1960 di sostanza disseccata a 130°-140°, gr. 0,4848 di CO^2 e 0,1154 di H^2O;

II. Da gr. 0,1288 della stessa, gr. 0,3190 di CO^2 e 0,0798 di H^2O;

III. Da gr. 0, 1410 di sostanza per due volte completamente disidratata e poi lasciata all'aria fino a peso costante, gr. 0,3330 di CO^2 e 0,0846 di H^2O.

	Trovato			Calcolato per	
	I	II	III	$C^{21}H^{24}O^{6}$	$C^{21}H^{24}O^{6} + H^{2}O$
C %	67,74	67,55	64,41	67,72	64,59
H %	6,59	6,93	6,71	6,50	6,72

L'eliminazione dell'acqua di cristallizzazione per azion del calore sembra avvenire in due fasi distinte, l'una tra gli 80° e i 90° e l'altra da 120° circa in su. Qualche cosa di analogo succede nel riassorbimento dell'acqua stessa dall'aria atmosferica. Così mi riuscì varie volte di ottenere un idrato nel rapporto di 4 molecole del composto per 3 di acqua.

* * *

Sostituendo il forone all'acetone nelle reazioni eseguite da Fabinyi e Széky, si sono dunque ottenuti colla massima facilità gli stessi prodotti, con tutti i caratteri perfettamente uguali, e

in tali condizioni in cui è logico ritenere che il forone si condensi coi fenoli polivalenti sperimentati secondo la semplice equazione esposta in principio di questo lavoro, la quale fornisce un'interpretazione della reazione assai più semplice e soddisfacente di quella proposta dai due egregi chimici ungheresi.

Torino, Laboratorio di Chimica farmaceutica
e tossicologica della R. Università. Settembre 1911.

Sulle funzioni di variabile complessa in un'area circolare.

Nota di TOMMASO BOGGIO

In alcune questioni d'Idrodinamica, e precisamente in quelle relative a moti liquidi discontinui in due dimensioni, occorre conoscere la funzione di variabile complessa in un' area circolare, la cui parte reale assume, sulla circonferenza contorno, valori assegnati.

Una espressione assai semplice di tale funzione trovasi già, senza dimostrazione, in una classica memoria di Schwarz (*) sull'equazione di Laplace; tale formula però passò inosservata. Recentemente, in un caso particolare, è stata data un'altra formula in proposito (**), come pure quella per il caso in cui, sul contorno, è data la derivata tangenziale della parte reale (***). Esse vennero dedotte, mediante un passaggio al limite, da una formula stabilita dal Prof. Cisotti (****), nel caso in cui i valori dati sulla circonferenza, sono costanti sopra archi di essa.

In questa Nota faccio vedere, fra altro, come le formule in questione si possano stabilire facilmente e direttamente in vari modi.

(*) Schwarz, *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ [" Crelle's Journal ", Bd. 74 (a. 1872), pp. 218-253].

(**) Villat, *Sur la résistance des fluides* [" Ann. scientifiques de l'École Normale Supérieure de Paris ", III série; t. 28 (a. 1911), pp. 203-311].

(***) Boggio, *Sul moto di una corrente libera deviata da una parete rigida* [" Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XLVI (a. 1911), pp. 1024-1047].

(****) Cisotti, *Vene fluenti* [" Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ", t. XXV (a. 1908), pp. 145-179].

Premetto (n. 1) un procedimento del Prof. Volterra per ottenere la funzione armonica nel cerchio, dati i suoi valori al contorno, e dalle formule ottenute deduco (n. 2) una proprietà assai utile nei problemi d'Idrodinamica dianzi accennati, e poi (n. 3) una diseguaglianza di Schwarz ed un'altra di Darboux (n. 4). Indi faccio vedere come si possa pure giungere a tali formule ricorrendo ad una formula del Dini (n. 5), della quale dò una nuova dimostrazione, ed espongo vari procedimenti per formare la funzione di variabile complessa nel cerchio, conoscendo i valori assunti sul contorno dalla sua parte reale (n. 6) o dalla derivata tangenziale o normale della parte reale (n. 7), o da una combinazione lineare (a coefficienti costanti) della parte reale e della sua derivata normale (n. 8). Per ultimo (n. 9) espongo per le funzioni di variabile complessa nel cerchio, alcune proprietà, perfettamente analoghe a quelle date dal Prof. Somigliana per le funzioni armoniche in una sfera.

1. Consideriamo un cerchio di centro O e raggio R. Sia poi U una funzione armonica in questo cerchio; il valore $U(O)$

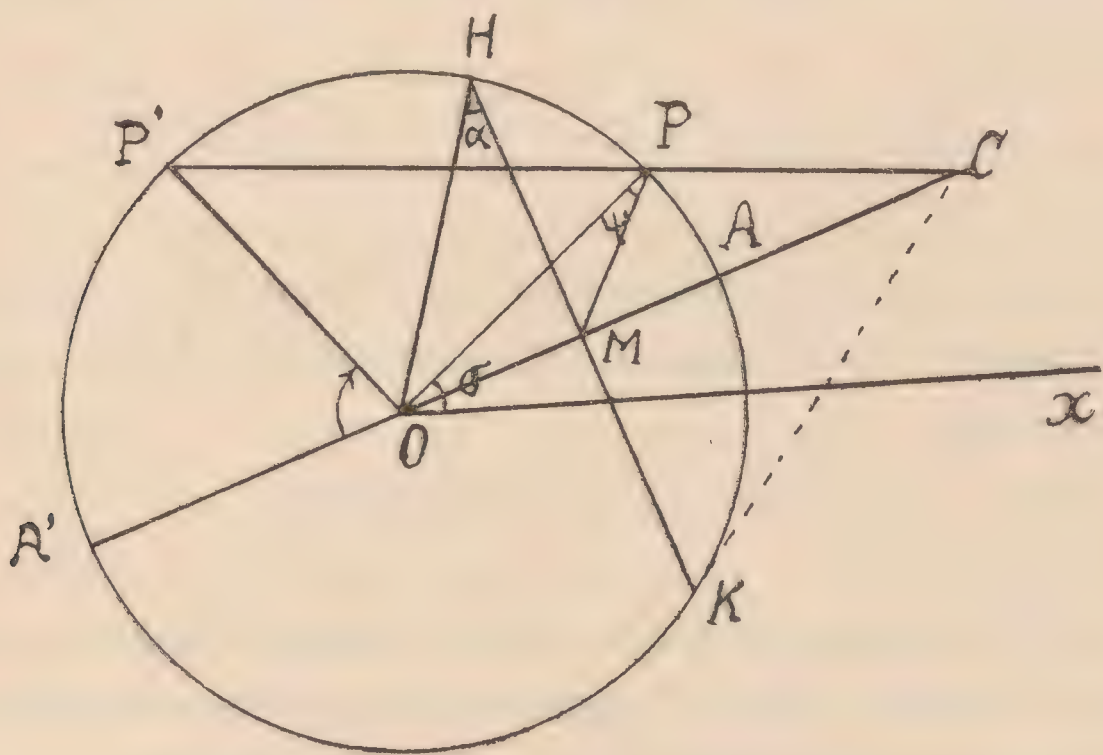



Fig. 1.

della U nel centro O, in virtù del notissimo teorema della media di Gauss, è eguale alla media dei valori $U(P')$, che la funzione prende sulla circonferenza, perciò:

$$(1) \qquad 2\pi U(O) = \int_0^{2\pi} U(P')\, d(\widehat{A'OP'}),$$

ove P', A' sono punti, il primo variabile, il secondo fisso, della

circonferenza, e l'angolo $A'OP'$ si riguarda positivo se (come in figura) è descritto da OP' (partendo da OA') rotando nel verso orario.

Indichiamo ora con u un'altra funzione armonica nel cerchio considerato. Per ottenere il valore $u(M)$ della u in un punto qualunque M del cerchio (che potremo supporre allineato con O e A'), basta ricorrere ad un procedimento suggerito dal Professore Volterra (*), e cioè fare una conveniente inversione per raggi vettori reciproci, in modo che il punto corrispondente di M venga ad essere precisamente il centro del cerchio.

Per raggiungere lo scopo bisogna assumere come centro di inversione il punto C che è l'immagine di M rispetto alla circonferenza, e come modulo della inversione il segmento di tangente condotto da C alla circonferenza. In tal modo la circonferenza è unita nell'inversione, e il corrispondente di M è appunto il centro O (**).

Se perciò diciamo U la funzione (notoriamente armonica) trasformata di u, in guisa dunque che se Q, Q' sono punti corrispondenti nell'inversione, si abbia $u(Q) = U(Q')$, risulterà dalla (1):

$$2\pi u(M) = 2\pi U(O) = \int_0^{2\pi} U(P')\, d(\widehat{A'OP'}).$$

Ora, con ovvie considerazioni di Geometria elementare, si riconosce che se P, A sono i corrispondenti di P', A' nell'inversione, si ha:

$$\widehat{A'OP'} = \widehat{AOP} + 2\,\widehat{OPM};$$

l'angolo AOP (compreso fra $-\pi$ e $+\pi$) è positivo se (come in figura) è descritto da OP (partendo da OA) rotando nel verso antiorario, e così l'angolo (acuto) OPM è positivo se (come in figura) è descritto dal lato PM (partendo da PO) rotando nel verso antiorario.

(*) VOLTERRA, *Sulle funzioni poliarmoniche* [“ Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti „, t. LVII (a. 1898-99), pp. 233-235].

(**) Infatti, il fascio di cerchi passanti per M e C è ortogonale alla circonferenza data e, nell'inversione, esso si trasforma in un fascio di raggi ortogonali a questa stessa circonferenza, onde il centro del fascio coincide col centro della circonferenza.

Sostituendo si ottiene:

$$\pi u(M) = \pi u(O) + \int u(P) d(\widehat{OPM}), \tag{2}$$

ove $u(O)$ è il valore di u nel centro O.

Sia Ox un asse fisso qualsiasi, e diciamo σ l'angolo che OP fa con Ox, il quale angolo sarà considerato come positivo se è descritto da OP (partendo da Ox) rotando nel verso antiorario. La (2) può allora scriversi, integrando per parti:

$$\pi u(M) = \pi u(O) - \int_0^{2\pi} \widehat{OPM} \frac{du}{d\sigma} d\sigma. \tag{3}$$

2. Supponiamo, in particolare, che la funzione u, data sulla circonferenza, assuma valori eguali in punti della circonferenza, simmetrici rispetto all'asse Ox; ciò significa che la u è funzione pari dell'argomento σ, e quindi la sua derivata $\frac{du}{d\sigma}$ è funzione dispari di σ.

Se perciò facciamo percorrere al punto M l'asse Ox, dal punto di ascissa R a quello di ascissa $-R$, e supponiamo $\frac{du}{d\sigma} > 0$ $(0 \leq \sigma \leq \pi)$, la (3) mostra che *$u(M)$ è funzione decrescente dell'ascissa di M*, perchè quando M si muove nel modo detto, l'angolo OPM decresce se $0 \leq \sigma \leq \pi$, mentre cresce se $\pi \leq \sigma \leq 2\pi$.

Questo risultato è molto importante per i problemi piani d'Idrodinamica, relativi ai moti discontinui dei liquidi. Una prima applicazione è già fatta nella mia Nota citata, ove con esso ho potuto dimostrare la proprietà: *se la parete rigida (lungo la quale scorre il liquido) è concava verso il campo del moto, allora le linee libere sono necessariamente convesse verso il campo stesso*, e quindi la velocità in punti a distanza finita risulta minore della velocità all'infinito.

Un'altra applicazione può esser fatta al problema dei moti con scia, che è stato studiato dal Prof. Levi-Civita nella memoria: *Scie e leggi di resistenza* (*); anche per questo problema si può far vedere che sussiste la proprietà ora enunciata, la

(*) " Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ", t. XXIII (a. 1907), pp. 1-37.

quale vale anche per il problema delle vene fluenti, studiato dal Prof. Cisotti nella memoria già citata.

3. Dalla (2) si può dedurre agevolmente una notevole formula di Schwarz.

Esaminiamo perciò come varia l'angolo OPM, al variare di P sulla circonferenza; siano intanto H, K i punti d'intersezione della circonferenza colla perpendicolare in M alla AA'; i punti H, K sono evidentemente anche i punti di contatto della circonferenza data con quelle passanti per OM e tangenti ad essa.

Ciò posto è chiaro che l'angolo OPM (che è nullo in A e A') assume il massimo valore, che diremo α, in H, mentre decresce da α a $-\alpha$ quando P descrive l'arco $HA'K$, e cresce da $-\alpha$ ad α quando P descrive l'arco rimanente KAH.

Dalla (2) abbiamo perciò:

$$\pi u(M) = \pi u(O) + (2\alpha u_m' - 2\alpha u_m''),$$

ove u_m', u_m'' indicano dei valori intermedi fra tutti quelli che u assume risp. sugli archi KAH, $HA'K$.

Per conseguenza, chiamando U', U'' risp. il massimo e il minimo di u sulla circonferenza, si ha:

$$|u(M) - u(O)| < \frac{1}{\pi} 2\alpha(U' - U'');$$

indicando con D l'oscillazione della funzione u sulla circonferenza, ed osservando che $\alpha = \text{sen}^{-1} \frac{OM}{R}$, ne risulta la diseguaglianza di Schwarz (*):

$$|u(M) - u(O)| < \frac{2D}{\pi} \text{sen}^{-1} \frac{OM}{R}. \tag{4}$$

4. Da questa relazione è facile ricavare un'elegante formula, che il Darboux ha stabilito in modo assai meno semplice, cioè la formula che stabilisce un limite superiore per l'oscillazione della funzione armonica u entro il cerchio, in funzione dell'oscillazione della u sul contorno.

(*) Cfr. Schwarz, loc. cit., p. 233.

Diciamo $u(M)$, $u(N)$ i valori della u in due punti M, N (fig. 2) del cerchio; e facciamo l'inversione (già considerata precedentemente) di centro C, in modo che il punto M venga trasformato nel centro O del cerchio; se N' è il corrispondente di N, si ha dalla (4):

$$|u(N) - u(M)| = |U(N') - U(O)| < \frac{2D}{\pi} \sin^{-1} \frac{ON'}{R},$$

D essendo l'oscillazione della U e quindi anche della u, sul contorno.

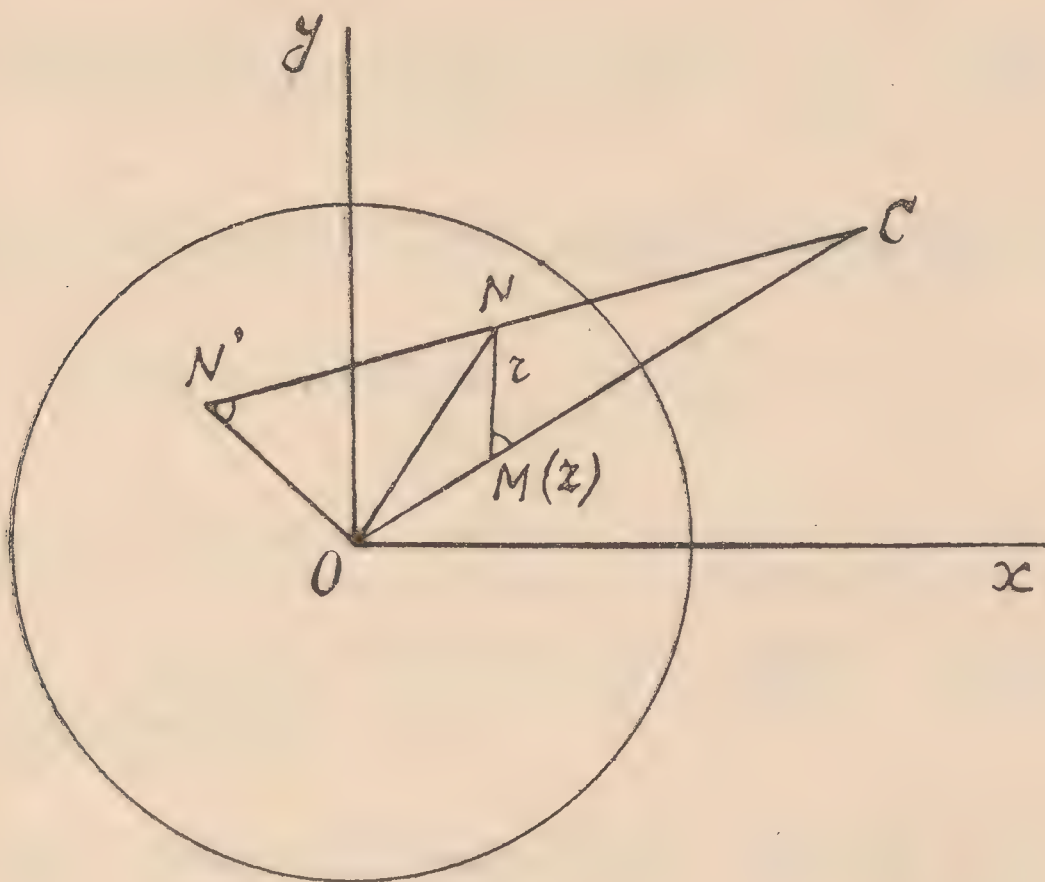



Fig. 2.

Calcoliamo ON'; poichè i triangoli CMN, $CN'O$ sono simili, si trae:

$$ON' = \frac{MN}{CN} OC = \frac{MN}{CN} \cdot \frac{R^2}{OM},$$

perciò ponendo:

$$r = MN, \qquad r_1 = \frac{OM}{R} CN,$$

si deduce:

$$ON' = Rr/r_1,$$

quindi:

(5) $$|u(N) - u(M)| < \frac{2D}{\pi} \operatorname{sen}^{-1} \frac{r}{r_1} \text{ (*)}.$$

(*) È bene ricordare che se G indica il valore nel punto N, della funzione di Green avente per polo M, si ha $r/r_1 = e^{-G}$.

È chiaro che $r_1 > r$, quindi $\operatorname{sen}^{-1} \frac{r}{r_1}$ ha due valori, di cui l'uno è compreso fra O e $\frac{\pi}{2}$; ed è questo valore che noi dovremo considerare.

Si ha:

$$\operatorname{sen}^{-1} \frac{r}{r_1} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{r}{\sqrt{r_1^2 - r^2}},$$

e siccome:

$$r^2 = OM^2 + ON^2 - 2\, OM \, . \, ON \cos(\widehat{MON})$$

$$CN^2 = \frac{R^4}{OM^2} + ON^2 - 2 \frac{R^2}{OM} \, ON \cos(\widehat{MON}),$$

si deduce, eliminando l'angolo MON, la seguente identità (*):

$$r_1^2 - r^2 = \frac{1}{R^2} (R^2 - OM^2)(R^2 - ON^2),$$

perciò, sostituendo nella (5), si ottiene la formula di Darboux (**):

$$|u(N) - u(M)| < \frac{2D}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{Rr}{\sqrt{(R^2 - OM^2)(R^2 - ON^2)}}.$$

5. Si può ottenere la (3) anche partendo dalla seguente formula del Dini:

$$\pi v(M) = R \int_0^{2\pi} \frac{dv}{dn} \log r \, d\sigma, \tag{6}$$

la quale fornisce il valore, nel punto M del cerchio, della funzione armonica v, dati i valori della sua derivata normale interna $\frac{dv}{dn}$ nei punti P della circonferenza; r qui indica la distanza dei punti M e P.

(*) Questa relazione utilissima la diedi già, con alcune applicazioni, nella memoria: *Sulle funzioni di Green d'ordine* m, p. 118 [" Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XX (a. 1905), pp. 97-135].

(**) Darboux, *Un peu de Géométrie à propos de l'intégrale de Poisson*, p. 297 [" Bulletin des Sciences mathématiques ", II[e] série, t. XXXIV (a. 1910), pp. 287-300].

Questa formula è stata stabilita dal Dini (*) partendo dal noto integrale di Poisson, che risolve il problema di Dirichlet pel cerchio; ma si può pure ottenere direttamente, in modo semplicissimo, ricorrendo alle proprietà fondamentali della funzione potenziale logaritmica di massa distribuita sopra la circonferenza.

Sia infatti v una funzione armonica nel cerchio limitato dalla circonferenza s, e che possiamo supporre nulla nel centro, e consideriamo la funzione potenziale logaritmica v' di massa distribuita su s con densità $\frac{dv}{dn}$, cioè:

$$v' = \int_s \frac{dv}{dn} \log \frac{1}{r}\, ds\,;$$

la massa totale di tale distribuzione è evidentemente nulla, perchè:

$$\int_s \frac{dv}{dn}\, ds = 0. \tag{7}$$

Questa funzione v' è armonica in tutto il piano, e nei punti di s soddisfa alla nota equazione, che esprime la discontinuità della derivata normale:

$$\frac{dv'}{dn} + \frac{dv'}{dn_e} = -\,2\pi \frac{dv}{dn}, \quad (\text{su } s), \tag{8}$$

ove n_e è la normale ad s, rivolta verso l'esterno.

D'altra parte la funzione v' è finita e continua in tutto il piano — anche a distanza infinita, ove si annulla, in forza della (7) — perciò i valori di v' all'esterno del cerchio si possono dedurre dai valori assunti da v' all'interno, per mezzo di una inversione per raggi vettori reciproci di centro O e modulo R; di qui si trae facilmente che in ogni punto di s deve essere:

$$\frac{dv'}{dn} - \frac{dv'}{dn_e} = 0\,, \quad (\text{su } s)\,,$$

(*) Dini, *Sulla integrazione della equazione* $\Delta^2 u = 0$, p. 307 [" Annali di Matematica ", serie II, t. V (a. 1871-73), pp. 305-345].

perciò sommando colla (8):

$$\pi \frac{dv}{dn} = - \frac{dv'}{dn}, \quad (\text{su } s),$$

dunque, in tutto il cerchio (prescindendo da una costante, che non ha influenza):

$$\pi v = - v',$$

da cui segue la (6).

Ciò premesso, se indichiamo con $-u$ la funzione armonica associata di v (in guisa dunque che $u + iv$ sia funzione di variabile complessa), si ha:

$$\frac{1}{R} \frac{du}{d\sigma} = \frac{dv}{dn}, \quad (\text{su } s),$$

quindi la (6) può scriversi:

$$\pi v(M) = \int_0^{2\pi} \frac{du}{d\sigma} \log r \, d\sigma. \tag{9}$$

Se ora osserviamo che, dell'angolo OPM, il lato OP dipende solo da σ (ma non da M), si può assumere tale angolo come funzione armonica associata di $\log r$, quindi dalla (9) si deduce, considerando le funzioni associate di ambi i membri:

$$- \pi u(M) = \int_0^{2\pi} \frac{du}{d\sigma} \widehat{OPM} \, d\sigma + k,$$

ove k è una costante che si determina supponendo ad es. che M cada in O, nel qual caso questa formula si riduce a:

$$- \pi u(O) = k,$$

perciò sottraendo risulta appunto la (3).

6. Se diciamo x, y le coordinate cartesiane di M (coll'origine in O), e $z = x + iy$ l'affissa di M (fig. 2), allora $u + iv$ è una funzione $F(z)$ della z, e dalle (3), (9) si trae quindi, ponendo per semplicità $\psi = \widehat{OPM}$:

$$F(z) = u(O) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{d\sigma} (-\psi + i \log r) \, d\sigma \tag{10}$$

ovvero:

$$F(z) = u(0) + \frac{1}{\pi}\int_s \frac{du}{ds}(-\psi + i\log r)\,ds. \tag{10'}$$

È chiaro che il secondo membro è una espressione autonoma, cioè indipendente dagli assi di riferimento; si può quindi dire che la F è una funzione monogena del punto P.

Indicando poi con $z_\sigma = Re^{i\sigma}$ l'affissa del punto P della circonferenza, si ha:

$$z_\sigma - z = re^{i(\sigma+\psi)},$$

perciò la (10) può ancor scriversi:

$$F(z) = u(O) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{du}{d\sigma}[\sigma + i\log(z_\sigma - z)]\,d\sigma, \tag{11}$$

da cui, integrando per parti:

$$F(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u\frac{d}{d\sigma}\left[\frac{\sigma}{2} + i\log(Re^{i\sigma} - z)\right]d\sigma,$$

la quale può ancora porsi sotto le forme:

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u\left(\frac{Re^{i\sigma}}{Re^{i\sigma} - z} - \frac{1}{2}\right)d\sigma, \tag{12}$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,\frac{Re^{i\sigma} + z}{Re^{-i\sigma} - z}\,d\sigma \text{ (*)},$$

$$F(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u\,\frac{z}{Re^{i\sigma} - z}\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\,d\sigma. \tag{13}$$

Queste formule dànno la funzione $F(z)$ di variabile complessa nel cerchio, la cui parte reale u assume, sulla circonferenza, valori assegnati (**).

(*) Questa formula trovasi già nella citata memoria di Schwarz (p. 229).

(**) La determinazione della $F(z)$ si potrebbe pure fare partendo dalle formule date dal Prof. Somigliana nella Nota: *Sopra alcune rappresentazioni delle funzioni per integrali definiti*, p. 443 [" Rendiconti del R. Istituto Lombardo ", serie II, vol. XXI (a. 1888), pp. 431-446], le quali esprimono le relazioni che passano fra i valori delle parti reale ed immaginaria di una funzione complessa, sul contorno di un cerchio, dentro il quale la funzione sia regolare.

La (12) può pure stabilirsi partendo senz'altro dall'integrale di Poisson:

$$u(M) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u \frac{R^2 - \rho^2}{2r^2} d\sigma, \qquad (\rho = OM),$$

ed osservando che le funzioni:

$$\frac{R^2 - \rho^2}{2r^2} = \frac{R^2 - R\rho\cos(\sigma - \varphi)}{r^2} - \frac{1}{2} \quad \text{ed} \quad - \frac{R\rho\,\mathrm{sen}(\sigma - \varphi)}{r^2},$$

ove φ è l'anomalia di M, sono rispettivamente parte reale e parte immaginaria della funzione:

$$\frac{R^2 - R\rho e^{i(\sigma-\varphi)}}{r^2} - \frac{1}{2} = \frac{Re^{i\sigma}}{Re^{i\sigma} - z} - \frac{1}{2}.$$

Alla (13) si può pure giungere partendo da quest'altra espressione dell'integrale di Poisson (*):

$$u(M) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u\rho \frac{\partial \log r}{\partial \rho} d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u d\sigma$$

ed osservando che la funzione armonica associata di $\rho \frac{\partial \log r}{\partial \rho}$ è $-\frac{\partial \log r}{\partial \varphi}$, perchè:

$$\rho \frac{\partial \log r}{\partial \rho} - i \frac{\partial \log r}{\partial \varphi} = z \frac{d \log(z_\sigma - z)}{dz};$$

ne risulta perciò:

$$F(z) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u z \frac{d \log(z_\sigma - z)}{dz} d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u d\sigma, \tag{14}$$

ed effettuando la derivazione si ottiene la (13).

Siccome:

$$\frac{z}{Re^{i\sigma} - z} + \frac{1}{2} = \frac{z(Re^{-i\sigma} - z)}{R^2 - 2Rz\cos\sigma + z^2} + \frac{1}{2} = \frac{R^2 - z^2 - 2iRz\,\mathrm{sen}\,\sigma}{2(R^2 - 2Rz\cos\sigma + z^2)},$$

(*) Questa formula può dimostrarsi molto semplicemente, ricorrendo alle proprietà fondamentali della funzione potenziale logaritmica, come abbiamo fatto nel n. 5. Vedasi in proposito la mia Nota: *Trasformazione di alcune funzioni potenziali*, n. 14 [" Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ", t. XXII (a. 1906), pp. 220-232].

la (13) può ancor scriversi:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u \frac{R^2 - z^2 - 2iRz \operatorname{sen} \sigma}{R^2 - 2Rz \cos \sigma + z^2} d\sigma. \tag{15}$$

Se, in particolare, la u data nei punti della circonferenza, è funzione pari di σ, la (15) si riduce a:

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} u \frac{R^2 - z^2}{R^2 - 2Rz \cos \sigma + z^2} d\sigma \text{ (*)}.$$

7. Determiniamo la funzione di variabile complessa

$$F_1(z) = u_1 + iv_1,$$

dati i valori che la derivata normale interna $\frac{du_1}{dn}$ assume nei punti della circonferenza.

Dovrà intanto essere soddisfatta la condizione seguente, analoga alla (7):

$$\int_s \frac{du_1}{dn} ds = 0; \tag{16}$$

poi osservando che la parte reale della funzione $-\frac{1}{R} \rho \frac{\partial F_1}{\partial \rho}$, nei punti di s assume i valori dati $\frac{du_1}{dn}$, si conclude dalle (14), (16):

$$-\frac{1}{R} \rho \frac{\partial F_1}{\partial \rho} = -\frac{1}{R} z \frac{dF_1}{dz} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du_1}{dn} z \frac{d \log (z_\sigma - z)}{dz} d\sigma,$$

da cui, omettendo una costante arbitraria:

$$F_1(z) = \frac{R}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du_1}{dn} \log (z_\sigma - z) d\sigma, \tag{17}$$

e questa formula può pure dedursi dalla (11).

Osservazione. Se l'area che si considera è un semipiano indefinito, limitato da una retta s, e la funzione u si annulla al-

(*) Questa formula è stata stabilita dal Villat nella sua Memoria citata (p. 269). Egli la dedusse con un passaggio al limite, da un'altra formula del Prof. Cisotti; egli riteneva poco verosimile (loc. cit., p. 285) ottenerla partendo direttamente dall'integrale di Poisson, mentre invece, come abbiamo visto, ciò può farsi con tutta facilità.

l'infinito, si trae senz'altro dalla (10'), con un passaggio al limite (facendo crescere R indefinitamente):

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_s \frac{du}{ds} (-\psi + i \log r)\, ds,$$

ove z è l'affissa del punto M rispetto ad un sistema di assi qualunque, e ψ è semplicemente l'angolo (con debito segno) che la direzione della normale interna fa col raggio vettore PM.

Scegliendo, in particolare, un sistema di assi cartesiani, di cui l'asse Ox è la retta che limita il semipiano, e la direzione

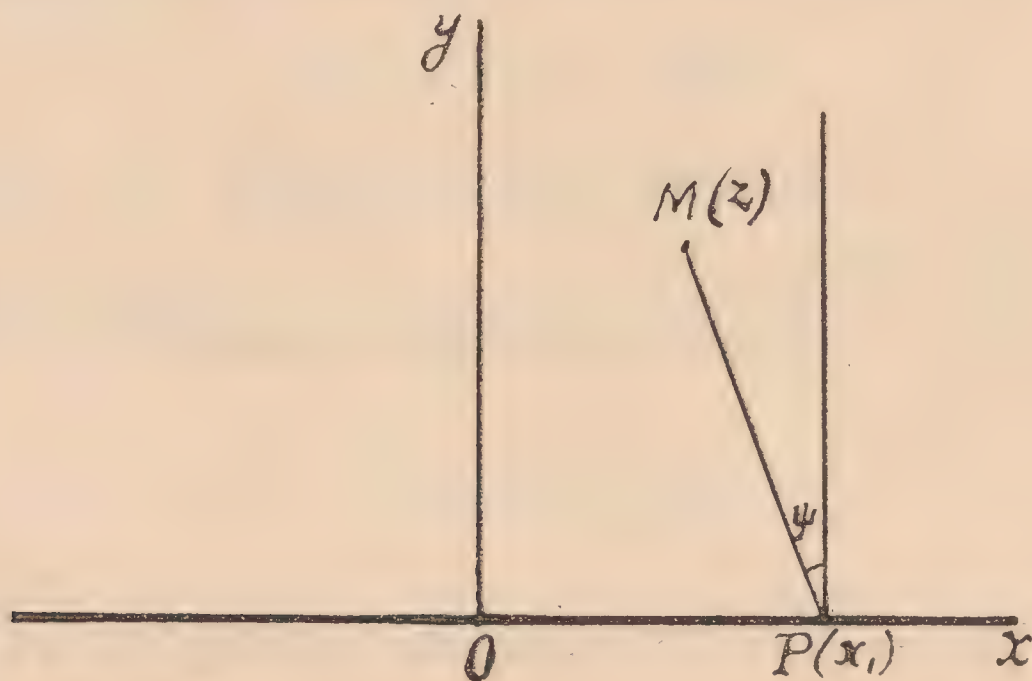



Fig. 3.

positiva dell'asse Oy è quella della normale interna, si può scrivere:

$$F(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dx_1} (-\psi + i \log r)\, dx_1,$$

ove x_1 è l'ascissa del punto P variabile sull'asse Ox.

La precedente espressione può ancor scriversi sotto le forme:

$$F(z) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{dx_1} \log(x_1 - z)\, dx_1 = -\frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{dx_1}{x_1 - z},$$

che sono analoghe alle (11), (13).

Analogamente per la funzione $F_1(z)$.

8. Cerchiamo la funzione di variabile complessa

$$F'(z) = u' + iv',$$

regolare nel cerchio (perciò finita, continua, ecc.), sapendo che la parte reale u' soddisfa, nei punti della circonferenza s, alla condizione:

$$\frac{a}{R}u' - \frac{du'}{dn} = u_s, \qquad (\text{su } s), \tag{18}$$

ove a è una costante positiva, u_s una funzione data su s, ed n la solita normale interna.

Se diciamo u la funzione armonica nel cerchio, che su s coincide con u_s, la (18) può essere sostituita dalla:

$$au' + \rho\frac{\partial u'}{\partial \rho} = Ru, \tag{19}$$

e quest'equazione è valida, non solo su s, ma in tutto il cerchio, perchè ambi i membri sono funzioni armoniche.

Considerando le funzioni associate dei due membri della (19), si ha:

$$av' + \rho\frac{\partial v'}{\partial \rho} = Rv; \tag{20}$$

dalle (19), (20), osservando che $\rho\frac{\partial F'}{\partial \rho} = z\frac{dF'}{dz}$, risulta:

$$aF' + z\frac{dF'}{dz} = RF(z); \tag{21}$$

e poichè $a > 0$ e $F'(z)$ dev'essere finita anche per $z = 0$, si ricava:

$$F'(z) = Rz^{-a}\int_0^z z^{a-1}F(z)\,dz \;(*), \tag{22}$$

la $F(z)$ essendo data da una qualunque delle espressioni trovate nel n. 6. Il cammino d'integrazione, che ha per estremi l'origine e il punto z, deve essere naturalmente tutto contenuto nel cerchio.

(*) La (22) è la più generale soluzione (finita) della (21), anche se la costante a è complessa, purchè però la sua parte reale sia positiva. Infatti, la soluzione più generale dell'equazione $af + z\frac{df}{dz} = 0$, è $f(z) = Cz^{-a}$, ove C è una costante (complessa) arbitraria; ora se $a = \alpha + i\beta$, si può scrivere $f(z) = C|z|^{-\alpha}k$; ove k è un'espressione (complessa) il cui modulo è finito e generalmente diverso da zero. Ne segue che se α è positivo, la $f(z)$ non può conservarsi finita quando z tende a zero.

Assumendo $F(z)$ sotto la forma (13), si vede che nella (22) viene a figurare l'integrale:

$$\int_0^z \frac{z^a}{z_\sigma - z} dz,$$

il quale si può certamente calcolare sotto forma finita se a è razionale.

9. Per ultimo estendiamo al campo complesso alcune notevoli proprietà stabilite dal Prof. Somigliana, per le funzioni armoniche in un campo sferico (*).

Poniamo, per brevità:

$$D_a F = aF + z \frac{dF}{dz},$$

ove a è una costante positiva.

Immaginiamo la $F(z)$ — che, al solito, è supposta regolare nel cerchio — sviluppata in serie di potenze di z, sotto la forma:

$$F(z) = \sum_0^\infty {}_m c_m z^m, \tag{23}$$

le c_m essendo costanti qualunque (complesse); si ha allora:

$$D_a F = \sum_0^\infty {}_m (m + a) c_m z^m.$$

Analogamente, introducendo il simbolo:

$$I_a F = z^{-a} \int_0^z z^{a-1} F dz,$$

risulta:

$$I_a F = \sum_0^\infty {}_m \frac{1}{m + a} c_m z^m.$$

Si verifica immediatamente che:

$$I_a D_a F = D_a I_a F = F,$$

perciò gli operatori I_a, D_a sono commutabili ed inversi fra loro.

(*) Somigliana, *Intorno ad un problema di distribuzione termica*, § 4 [" Rendiconti del R. Istituto Lombardo ", serie II, vol. XXXVI (a. 1903), pp. 857-872].

Consideriamo ora un gruppo di numeri positivi $a_1, a_2, \ldots, a_p$; è chiaro che si avrà:

$$D_{a_p} D_{a_{p-1}} \ldots D_{a_2} D_{a_1} F = \sum_0^\infty{}_m (m + a_1)(m + a_2) \ldots (m + a_p) c_m z^m,$$

e che questi operatori $D_{a_1}, D_{a_2}, \ldots, D_{a_p}$, sono commutabili.

Analogamente, considerando un altro gruppo di numeri positivi $b_1, b_2, \ldots, b_q$, si ha:

$$I_{b_q} I_{b_{q-1}} \ldots I_{b_2} I_{b_1} F = \sum_0^\infty{}_m \frac{1}{(m + b_1)(m + b_2) \ldots (m + b_q)} c_m z_m \text{ (*)},$$

e anche qui gli operatori $I_{b_1}, I_{b_2}, \ldots I_{b_q}$, sono commutabili.

Da queste due formule segue:

$$(24) \quad I_{b_q} I_{b_{q-1}} \ldots I_{b_2} I_{b_1} D_{a_p} D_{a_{p-1}} \ldots D_{a_2} D_{a_1} F = \sum_0^\infty{}_m \frac{(m+a_1)\ldots(m+a^p)}{(m+b_1)\ldots(m+b_q)} c_m z^m,$$

ed è chiaro che uno qualunque degli operatori D è commutabile con uno qualunque degli operatori I.

La formula (24) mostra che, della serie che vi figura al secondo membro, è possibile ottenerne la somma mediante un numero finito di derivazioni ed integrazioni definite, quando sia nota soltanto la somma della serie (23).

Molte delle formule e considerazioni precedenti sono valide anche quando alcune delle costanti b sono complesse, ovvero nulle, e in quest'ultimo caso le costanti c_m debbono soddisfare a certe condizioni; per brevità non insisteremo però sopra questi altri casi di validità.

Torino, Novembre 1911.

(*) Poichè la frazione $\frac{1}{(m + b_1)(m + b_2) \ldots (m + b_q)}$ si può scindere nella somma di frazioni semplici del tipo $\frac{\alpha_r}{m + b_r}$, ne risulta che il primo membro può trasformarsi nella somma di termini del tipo $\alpha_r I_{b_r} F$, nel quale non figurano che integrali semplici.

Alcune applicazioni delle formule di Frenet.

Nota di MATTEO BOTTASSO.

L'equazione differenziale intrinseca delle linee che possono muoversi rigidamente, in modo da risultare sempre normali alle traiettorie dei loro punti, e varie proprietà di tali linee, sono state ottenute recentemente dal sig. V. Strazzeri (*) con gli ordinari metodi della Geometria differenziale, facendo uso delle forme differenziali quadratiche, delle tre curvature in una direzione, delle formule di Gauss e Codazzi, di un teorema del Bonnet ed altro del Puiseux.

Credo interessante far vedere, nel seguente § 1, come, facendo uso soltanto della formula fondamentale della Cinematica (visto che si tratta di corpo rigido!) e delle formule di Frenet per le curve gobbe, si giunge in modo rapido ed elementare ai risultati; e dico in modo elementare, perchè la dimostrazione delle formule che si considerano, costituisce un semplice *esercizio* di derivazione vettoriale.

Ritengo sia pure utile mostrare, nel successivo § 2, come le stesse formule di Frenet, in modo altrettanto semplice, permettano di ottenere le equazioni intrinseche generali del movimento di un filetto vorticoso di forma qualunque, equazioni stabilite con procedimento alquanto complicato dal Dott. L. S. Da Rios (**). Questi fonda il suo svolgimento sulla considerazione di triedri fissi e mobili, sulle note formule di Poisson e

(*) *Analisi intrinseca delle elicoidi, con particolare riguardo a quelle ad area minima ed alle pseudosferiche*, " Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ", t. XXXII, 1911, 2° semestre; pp. 143-157.

(**) *Sul moto dei filetti vorticosi di forma qualunque*, " Rendiconti del Circolo Matem. di Palermo ", t. XXIX, 1° semestre 1910, pp. 354-368.

sopra altre formule, dovute al COMBESCURE, che legano le componenti p, q, r e p_1, q_1, r_1 (e le loro derivate) delle rotazioni, relative separatamente agli incrementi di due diversi parametri t ed s.

In una Nota del Prof. A. VITERBI (*) sono date delle formule, assai utili in Geodesia, le quali non rappresentano altro che le derivate dei tre vettori unitari diretti secondo la tangente, la normale e la binormale, la torsione, la curvatura e la sua derivata, per le linee di forza di un sistema di superficie di livello; esprimendo il tutto mediante la funzione che determina queste superficie. Nel § 3 faccio vedere come tali formule si possano ottenere più rapidamente, ricorrendo al calcolo vettoriale, qual altra applicazione elementare delle formule di FRENET. È bene osservare che si trovano qui sviluppati tutti i calcoli, mentre nella Nota del VIVERBI, come del resto in quelle prima esaminate, essi sono per lo più semplicemente accennati, come impone la complicazione apportata dalle coordinate cartesiane.

Risulta così viemmeglio messa in evidenza la semplicità e rapidità raggiunta dal calcolo vettoriale nella trattazione delle più svariate questioni, ove gli ordinari metodi cartesiani presentano spesso una complicazione eccessiva; vuoi per la necessità di ricorrere a formule diverse, fondate generalmente sopra concetti complessi superflui, almeno in parte, nella questione particolare; vuoi per i laboriosi calcoli che si rendono necessari, appunto per l'introduzione di elementi estranei al problema.

§ 1.

1. Consideriamo il punto $P(s, t)$ funzione delle variabili numeriche indipendenti s, t, essendo t il tempo.

Le linee $t =$ cost. saranno le posizioni assunte da una stessa linea (che si muove di moto rigido) solo quando esiste un vettore Ω, funzione della sola t, tale che fissato ad arbitrio un

(*) *Alcune formole relative alle traiettorie ortogonali di una famiglia di superficie ed applicazione di esse allo studio delle superficie di livello terrestre*, " Atti del R. Istituto Veneto ", t. LXIX, parte 2ª, 1909, pagg. 161-181.

punto A, rigidamente connesso alla detta linea (e quindi funzione solo di t) si abbia, per s e t qualunque (*):

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{dA}{dt}+\Omega\wedge(P-A). \tag{1}$$

Sotto questa ipotesi le linee $s=$ cost. sono le traiettorie dei punti della linea rigida in moto. Senza nulla togliere alla generalità, supporremo che in $P(s,t)$ la s sia l'arco della curva $t=$ cost.

Le traiettorie $s=$ cost. saranno normali alle linee $t=$ cost. solo quando, per s e t qualunque, si abbia:

$$\frac{\partial P}{\partial s}\times\frac{\partial P}{\partial t}=0. \tag{2}$$

Giova osservare che le (1), (2) sono le condizioni che individuano i sistemi di linee considerate.

Per brevità di scrittura, porremo:

$$P_t'=\frac{\partial P}{\partial t};\quad P_s'=\frac{\partial P}{\partial s};\quad P_{st}''=\frac{\partial^2 P}{\partial s\partial t};\quad A'=\frac{dA}{dt}.$$

I vettori $\boldsymbol{t},\boldsymbol{n},\boldsymbol{b}$ e i numeri ρ, τ, che introdurrò fra breve sono quelli che compariscono nelle formule di Frenet, per le linee $t=$ cost., e sono quindi legati dalle relazioni (**):

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}=\frac{1}{\rho}\boldsymbol{n},\qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds}=-\frac{1}{\rho}\boldsymbol{t}-\frac{1}{\tau}\boldsymbol{b},\qquad \frac{d\boldsymbol{b}}{ds}=\frac{1}{\tau}\boldsymbol{n}. \tag{3}$$

Ciò premesso, osservato che se $\boldsymbol{u}$ è un qualsivoglia vettore di modulo costante, dalla (1) risulta:

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}=\Omega\wedge\boldsymbol{u}, \tag{1'}$$

(*) Per una dimostrazione semplice di questa formula fondamentale della Cinematica, cfr. C. Burali-Forti et R. Marcolongo, *Éléments de Calcul Vectoriel, etc.*, Paris, Hermann, 1910 (2me partie, chap. III, n° 3); od anche R. Marcolongo, *Theoretische Mechanik*, Erster Band, Leipzig, 1911 (Fünftes Kapitel, p. 111).

(**) Burali-Forti et Marcolongo, *Éléments, etc.*, cit. (2me partie, chap. I, n. 1).

derivando la (2) rispetto ad s e notando che $P_s' = \boldsymbol{t}$, si ha (supposto, beninteso, ρ e τ non nulli):

$$P_t' \times \boldsymbol{n} = 0, \tag{4}$$

la quale dice che il vettore $\boldsymbol{n}$ è normale a P_t', e siccome è pure normale a P_s', ne segue che $\boldsymbol{n}$ è normale alla superficie $P(s, t)$, e quindi *le linee* t = cost. *sono geodetiche di questa superficie.*

2. Derivando la (4) rispetto ad s, risulta per le (3):

$$P_{st}'' \times \boldsymbol{n} - P_t' \left(\frac{1}{\rho}\boldsymbol{t} + \frac{1}{\tau}\boldsymbol{b}\right) = 0,$$

cioè:

$$\tau\Omega \times \boldsymbol{b} - P_t' \times \boldsymbol{b} = 0. \tag{5}$$

Derivando ancora rispetto ad s, si ha:

$$\frac{d\tau}{ds}\Omega \times \boldsymbol{b} + \tau\Omega \times \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} + \Omega \times \boldsymbol{n} = 0,$$

ossia:

$$\frac{d\tau}{ds}\Omega \times \boldsymbol{b} + 2\tau\Omega \times \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = 0, \tag{6}$$

cioè:

$$\frac{d(\sqrt{\tau}\,\Omega \times \boldsymbol{b})}{ds} = 0,$$

da cui:

$$\Omega \times \boldsymbol{b} = \frac{h}{\sqrt{\tau}}, \tag{7}$$

ove h è funzione arbitraria della sola t.

La (6) può scriversi:

$$\frac{d\tau}{ds}\Omega \times \boldsymbol{b} + 2\Omega \times \boldsymbol{n} = 0,$$

da cui:

$$\Omega \times \boldsymbol{n} = -h\frac{d\sqrt{\tau}}{ds}. \tag{8}$$

Derivando quest'ultima rispetto ad s, si ottiene:

$$-\Omega \times \left(\frac{1}{\rho} \boldsymbol{t} + \frac{1}{\tau} \boldsymbol{b}\right) = -h \frac{d^2 \sqrt{\tau}}{ds^2},$$

da cui:

$$\Omega \times \boldsymbol{t} = -h\rho \left(\frac{1}{\sqrt{\tau^3}} - \frac{d^2 \sqrt{\tau}}{ds^2}\right). \tag{9}$$

Ricordata ora l'identità (*):

$$\Omega = \Omega \times \boldsymbol{t} \,.\, \boldsymbol{t} + \Omega \times \boldsymbol{n} \,.\, \boldsymbol{n} + \Omega \times \boldsymbol{b} \,.\, \boldsymbol{b}$$

dalle (7), (8), (9), si ha:

$$\frac{\Omega}{h} = -\rho\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^3}} - \frac{d^2\sqrt{\tau}}{ds^2}\right)\boldsymbol{t} - \frac{d\sqrt{\tau}}{ds}\boldsymbol{n} + \frac{1}{\sqrt{\tau}}\boldsymbol{b}. \tag{10}$$

Perciò, elevando a quadrato e ricavando ρ^2, si ottiene:

$$\rho^2 = \frac{\dfrac{\Omega^2}{h^2} - \dfrac{1}{\tau} - \left(\dfrac{d\sqrt{\tau}}{ds}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{\tau^3}} - \dfrac{d^2\sqrt{\tau}}{ds^2}\right)^2}, \tag{11}$$

la quale coincide con quella stabilita dallo STRAZZERI, ove si ponga $C = \frac{\Omega^2}{h^2}$ (**).

La C, indipendente da s, dev' essere necessariamente costante, perchè le quantità ρ e τ che figurano nella (11) sono funzioni della sola s (e non di t).

3. È importante osservare che il vettore Ω/h è pure costante (assoluta), il che segue dalla (1'), essendo indipendente

(*) BURALI-FORTI et MARCOLONGO, *Éléments, etc.*, cit. (chap. II, n° 4, form. (12)).

(**) La (11) può pure dedursi dalla (10) osservando che dalla derivazione di questa rispetto ad s (poichè Ω/h non dipende da s), si ricava facilmente $\frac{d}{ds}\left[\rho\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^3}} - \frac{d^2\sqrt{\tau}}{ds^2}\right)\right] = \frac{1}{\rho}\frac{d\sqrt{\tau}}{ds}$, la quale integrata porge immediatamente la (11).

da t il mod(Ω/h). Per conseguenza l'asse del moto elicoidale ha direzione costante.

Poichè il vettore P_t' è parallelo a $\boldsymbol{b}$, si può porre $P_t' = m\boldsymbol{b}$, ove m è un coefficiente numerico che si determina sostituendo tale valore nella (5); risulta così $m = h\sqrt{\tau}$, perciò:

$$P_t' = h\sqrt{\tau}\,\boldsymbol{b}, \tag{12}$$

e la (1) si scrive quindi:

$$h\sqrt{\tau}\,\boldsymbol{b} = A' + \Omega \wedge (P - A). \tag{13}$$

Se ora supponiamo che il punto A appartenga all'asse del moto, s'avrà $A' = \lambda\,\Omega$, ove λ è un coefficiente numerico da determinarsi; basterà a tal fine moltiplicare scalarmente la (13) per Ω e ricordare la (7): s'otterrà così $\lambda C = 1$, e quindi:

$$C = \frac{1}{\lambda} = \frac{\mathrm{mod}\,\Omega}{\mathrm{mod}\,A'};$$

perciò il rapporto fra la velocità di rotazione e quella di traslazione è costante e vale C.

Risulta così che le curve $s = \text{cost.}$ sono *eliche circolari* aventi tutte lo stesso asse, verso e passo.

Se diciamo d la distanza del punto P dall'asse del moto elicoidale, si ha dalla (13), elevando a quadrato:

$$h^2\tau = \lambda^2\Omega^2 + d^2\Omega^2,$$

da cui:

$$d = \frac{1}{C}\sqrt{C\tau - 1}. \tag{14}$$

L'inclinazione θ delle eliche sull'asse è espressa da:

$$\cos\theta = \frac{P_t' \times \Omega}{\mathrm{mod}\,P_t' \,.\, \mathrm{mod}\,\Omega} = \frac{\boldsymbol{b} \times \Omega}{h\sqrt{C}} = \frac{1}{\sqrt{C\tau}};$$

e poichè, com'è noto, si hanno per i raggi di curvatura ρ_1 e τ_1 delle eliche $s = \text{cost.}$ le espressioni:

$$\rho_1 = \frac{d}{\mathrm{sen}^2\theta}, \qquad \tau_1 = -\frac{d}{\mathrm{sen}\,\theta\cos\theta},$$

ricordando la (14), s'avrà:

$$\rho_1 = \frac{\tau}{\sqrt{C\tau - 1}}, \qquad \tau_1 = -\tau. \tag{15}$$

4. Si possono anche determinare, per le eliche $s = \text{cost.}$, i vettori unitari $\boldsymbol{t}_1, \boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{b}_1$ (diretti risp. secondo la tangente, la normale principale e la binormale).

Si ha, in primo luogo, $\boldsymbol{t}_1 = \boldsymbol{b}$, quindi dalla prima formula di Frenet e dalla (12):

$$\frac{d\boldsymbol{t}_1}{dt} = \frac{1}{\rho_1}\boldsymbol{n}_1 \,.\, \text{mod}\, P_t' = \frac{h\sqrt{\tau}}{\rho_1}\boldsymbol{n}_1\,;$$

d'altra parte per la (1′) si ha:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{dt} = \Omega \wedge \boldsymbol{b},$$

dunque:

$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{\rho_1}{\sqrt{\tau}} \frac{\Omega}{h} \wedge \boldsymbol{b},$$

e ricordando la (10):

$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{\rho_1}{\sqrt{\tau}} \left[\rho\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^3}} - \frac{d^2\sqrt{\tau}}{ds^2}\right)\boldsymbol{n} - \frac{d\sqrt{\tau}}{ds}\boldsymbol{t}\right]. \tag{16}$$

Ne segue:

$$\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{t}_1 \wedge \boldsymbol{n}_1 = -\frac{\rho_1}{\sqrt{\tau}} \left[\rho\left(\frac{1}{\sqrt{\tau^3}} - \frac{d^2\sqrt{\tau}}{ds^2}\right)\boldsymbol{t} + \frac{d\sqrt{\tau}}{ds}\boldsymbol{n}\right].$$

Elevando a quadrato la (16) e ricordando la (11) si ritrova la prima delle (15).

Dalle (16) si deduce ancora:

$$\boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{t} = -\frac{\rho_1}{\sqrt{\tau}} \frac{d\sqrt{\tau}}{ds}, \tag{17}$$

quindi, se è σ_1 l'angolo di $\boldsymbol{n}$ con $\boldsymbol{n}_1$, s'avrà:

$$\operatorname{sen} \sigma_1 = -\frac{\rho_1}{\sqrt{\tau}} \frac{d\sqrt{\tau}}{ds},$$

la quale mostra che σ_1 dipende solo dalla variabile s.

Derivando rispetto a t la (17) ed applicando le formule di Frenet si ritroverebbe la seconda delle (15).

§ 2.

1. Nella Nota citata il Dott. Da Rios, partendo da risultati ottenuti dal Prof. T. Levi-Civita, dimostra che il moto di un filetto sottilissimo vorticoso, di forma qualunque, immerso in un liquido indefinito, animato (nei punti esterni al filetto) da moto irrotazionale, è determinato dal moto di una linea vorticosa qualsiasi C del filetto stesso, quando ai punti P di essa si attribuisca la velocità:

$$\frac{I}{2\pi} kc\boldsymbol{b},$$

ove I è la semi-intensità (costante) del filetto; c è la curvatura in P della C; $\boldsymbol{b}$ è il vettore unitario parallelo alla binormale in P alla C; e k è una funzione (indipendente dal tempo) del parametro λ che individua la posizione di P sopra la C.

Se diciamo t il tempo, si avrà dunque:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{I}{2\pi} kc\boldsymbol{b}. \tag{1}$$

Il Sig. Da Rios deduce poi dalla (1) che se, inizialmente, si assume $\lambda = s$, ove s è l'arco della C, ciò seguiterà a sussistere per ogni valore di t. Inoltre stabilisce le equazioni intrinseche che legano la curvatura c e la torsione T della curva C.

Vediamo come si possa arrivare, molto semplicemente, a questi risultati applicando le formule di Frenet.

Si ha intanto:

$$\frac{dP}{d\lambda} = \boldsymbol{t}\psi(\lambda), \tag{2}$$

ove $\psi(\lambda) = \frac{ds}{d\lambda}$, e $\boldsymbol{t}$ è un vettore unitario, diretto secondo la tangente in P alla C, nel verso delle λ crescenti.

Ora eliminiamo P fra le (1), (2). Derivando la (1) rispetto a λ, indicando con un apice la derivata rispetto a λ, e osservato che (Frenet, cfr. le (3) del § 1) $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = T \,.\, \boldsymbol{n}$, si ha:

$$\frac{d^2P}{d\lambda dt} = \frac{I}{2\pi} \left\{ (kc)'\boldsymbol{b} + kcT\psi\boldsymbol{n} \right\}. \tag{3}$$

Derivando la (2) rispetto a t, e confrontando colla precedente, risulta:

$$\frac{I}{2\pi} \{ (kc)' . \boldsymbol{b} + kcT\psi . \boldsymbol{n} \} = \psi \frac{d\boldsymbol{t}}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \boldsymbol{t} .$$

Moltiplicando questa scalarmente per $\boldsymbol{t}$, segue senz'altro:

$$\frac{d\psi}{dt} = 0 ,$$

perciò se inizialmente $\lambda = s$, cioè $\psi = 1$, ciò varrà per ogni valore del tempo. Il filetto è dunque inestendibile.

2. Riteniamo ormai che il parametro λ coincida con s e formiamo le equazioni intrinseche.

La (3) si può scrivere ora (poichè $\lambda = s$):

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{dt} = \frac{I}{2\pi} [(kc)'\boldsymbol{b} + kcT\boldsymbol{n}] : \tag{4}$$

derivando ancora rispetto ad s, e ricordando che (Frenet):

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = c\boldsymbol{n} , \qquad \frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = - c\boldsymbol{t} - T\boldsymbol{b} ,$$

si ottiene:

$$\frac{d(c\boldsymbol{n})}{dt} = c \frac{d\boldsymbol{n}}{dt} + \frac{dc}{dt} \boldsymbol{n} = \tag{5}$$

$$= \frac{I}{2\pi} [(kc)''\boldsymbol{b} + (kc)'T\boldsymbol{n} + (kcT)'\boldsymbol{n} + kcT(- c\boldsymbol{t} - T\boldsymbol{b})] ,$$

e perciò, moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{n}$:

$$\frac{dc}{dt} = \frac{I}{2\pi} [(kc)'T + (kcT)'] ,$$

la quale coincide colla prima delle (I) della Nota del Da Rios.

Dopo ciò la (5) si riduce a:

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{dt} = \frac{I}{2\pi} \left\{ \left[\frac{(kc)''}{c} - kT^2 \right] \boldsymbol{b} - kcT\boldsymbol{t} \right\} ,$$

da cui:

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{dt} \times \boldsymbol{b} = \frac{I}{2\pi}\left[\frac{(kc)''}{c} - kT^2\right]$$

e derivando rispetto ad s:

$$\frac{d(-c\boldsymbol{t} - T\boldsymbol{b})}{dt} \times \boldsymbol{b} + \frac{d\boldsymbol{n}}{dt} \times T\boldsymbol{n} = \frac{I}{2\pi}\left[\frac{(kc)''}{c} - kT^2\right]'.$$

L'ultimo termine del primo membro è nullo (perchè $\boldsymbol{n}^2 = 1$), e il primo termine vale:

$$-c\frac{d\boldsymbol{t}}{dt} \times \boldsymbol{b} - \frac{dT}{dt},$$

cioè, per le (4):

$$-\frac{I}{2\pi}c(kc)' - \frac{dT}{dt};$$

sostituendo si ottiene:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{I}{2\pi}\left\{\left[\frac{(kc)''}{c} - kT^2\right]' + c(kc)'\right\}$$

che non differisce dalla seconda delle (I) del DA RIOS (*).

§ 3.

1. Sia $U(P)$ un numero funzione regolare dei punti P dello spazio e consideriamo le superficie della famiglia (superficie di livello):

$$(1) \qquad U(P) = \text{costante}.$$

È ben noto (**) che il vettore grad U è parallelo alla normale in P alla superficie (1); quindi, se ds è l'elemento d'arco di una traiettoria ortogonale (linea di forza) delle (1), per il

(*) Nella formula del DA RIOS vi è una inesattezza perchè il primo termine del secondo membro deve essere scritto $-\left\{k\left[\frac{c''}{c} - T^2\right]\right\}'$.

(**) Cfr. BURALI-FORTI et MARCOLONGO, *Éléments, etc.*, cit. (chap. VI, nº 5, pag. 78).

vettore unitario $\boldsymbol{t}$, diretto secondo la tangente a tale traiettoria e nel verso delle U crescenti, si ha:

$$\boldsymbol{t} = \frac{dP}{ds} = \frac{\operatorname{grad} U}{g}, \tag{2}$$

ove si è posto, per brevità:

$$g = \operatorname{mod} \operatorname{grad} U. \tag{3}$$

Dalle (2) segue intanto:

$$g = \operatorname{grad} U \times \boldsymbol{t} = \frac{dU}{ds}. \tag{4}$$

E ricordando le formule di FRENET (§ 1, (3)), dalle (2) si deduce pure:

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{n} = \frac{1}{g^2}\left(g\,\frac{d\operatorname{grad} U}{ds} - \frac{dg}{ds}\operatorname{grad} U\right),$$

od ancora, per le (2), (4):

$$\frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{n} = \frac{1}{g}\left(\operatorname{grad} g - \operatorname{grad} g \times \boldsymbol{t}\,.\,\boldsymbol{t}\right) = \frac{1}{g}\left(\boldsymbol{t} \wedge \operatorname{grad} g\right) \wedge \boldsymbol{t}; \tag{5}$$

perciò il vettore $\frac{1}{\rho}\,\boldsymbol{n}$ non è altro che la componente secondo la normale principale di $\operatorname{grad} \log g$.

Moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{n}$, si ha:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{g}\operatorname{grad} g \times \boldsymbol{n}. \tag{5'}$$

Dalle (5), quadrando segue:

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{g^2}\left[(\operatorname{grad} g)^2 - (\operatorname{grad} g \times \boldsymbol{t})^2\right] = \frac{1}{g^2}\left(\boldsymbol{t} \wedge \operatorname{grad} g\right)^2;$$

e questa non è altro che la (A) della Nota del VITERBI, mentre la (5), ossia, per l'ultima espressione trovata di ρ:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\operatorname{grad} g - \operatorname{grad} g \times \boldsymbol{t}\,.\,\boldsymbol{t}}{\sqrt{(\boldsymbol{t} \wedge \operatorname{grad} g)^2}},$$

riassume le (A′) del VITERBI stesso; tutte formule già note da tempo in Geodesia.

2. Per il vettore unitario $\boldsymbol{b}$, diretto secondo la binormale, si ha:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{n}\,,$$

cioè per le (5), (2):

$$\boldsymbol{b} = \frac{\rho}{g}\,\boldsymbol{t} \wedge \operatorname{grad} g = \frac{\rho}{g^2}\operatorname{grad} U \wedge \operatorname{grad} g\,, \tag{6}$$

le quali sono equivalenti alle formule (4′), od alle (B), trovate dal VITERBI; segue da esse che *la binormale in* P *alla linea di di forza è tangente all'intersezione delle due superficie* U = *cost.*, g = *cost. passanti per* P.

Se si pone (*):

$$G = \operatorname{mod}(\operatorname{grad} U \wedge \operatorname{grad} g), \tag{7}$$

si ha dalla (6):

$$G = \frac{g^2}{\rho}\,. \tag{8}$$

Calcoliamo ora $\frac{d\boldsymbol{b}}{ds}$; in virtù di una formula di FRENET, si ha:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = \frac{1}{\tau}\,\boldsymbol{n}\,, \tag{9}$$

ove $\frac{1}{\tau}$ è la torsione. Moltiplicando scalarmente per grad g, si ha:

$$\frac{1}{\tau}(\boldsymbol{n} \times \operatorname{grad} g) = \frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \times \operatorname{grad} g\,, \tag{10}$$

e poichè, in virtù delle (5′) il coefficiente di $\frac{1}{\tau}$ vale $\frac{g}{\rho}$, cioè per la (8) $\frac{G}{g}$, ed inoltre:

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} \times \operatorname{grad} g = -\,\boldsymbol{b} \times \frac{d \operatorname{grad} g}{ds}\,,$$

(*) Nella formula (5) della Nota del VITERBI manca nel 2° membro il fattore g, e perciò in tutte le sue formule successive bisogna sostituire G con $\frac{G}{g}$.

come risulta derivando la $\boldsymbol{b} \times \operatorname{grad} g = 0$, dalla (10) si ha:

$$\frac{1}{\tau} = -\left(\boldsymbol{b} \times \frac{d \operatorname{grad} g}{ds}\right) \frac{g}{G}.$$

Ricordando la (6) si può ancora scrivere:

$$\frac{1}{\tau} = -\frac{g^2}{G^2} \boldsymbol{t} \wedge \operatorname{grad} g \times \frac{d \operatorname{grad} g}{ds}, \tag{11}$$

perciò la (9) porge, tenendo conto della (5):

$$\frac{d\boldsymbol{b}}{ds} = -\frac{g^3}{G^3} \boldsymbol{t} \wedge \operatorname{grad} g \times \frac{d \operatorname{grad} g}{ds} (\operatorname{grad} g - \operatorname{grad} g \times \boldsymbol{t} \,.\, \boldsymbol{t}),$$

la quale equivale alle (C) ottenute dal VITERBI, mentre la (D) di questo A. coincide colla nostra (11).

3. Passiamo al calcolo di $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$, $\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}$.

Per $\frac{d\boldsymbol{n}}{ds}$ basterà ricorrere alla formula di FRENET:

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho} \boldsymbol{t} - \frac{1}{\tau} \boldsymbol{b},$$

la quale per le (6), (11), ricordando sempre la (8), dà subito:

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{ds} = -\frac{G}{g^2} \boldsymbol{t} - \frac{g^3}{G^3} \boldsymbol{t} \wedge \operatorname{grad} g \times \frac{d \operatorname{grad} g}{ds} (\operatorname{grad} g \wedge \boldsymbol{t}),$$

che compendia le (C′) del VITERBI.

Per calcolare $\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2}$ osserviamo che la (5) si può scrivere:

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \operatorname{grad} \log g - \operatorname{grad} \log g \times \boldsymbol{t} \,.\, \boldsymbol{t}, \tag{5''}$$

perciò derivando:

$$\frac{d^2\boldsymbol{t}}{ds^2} = \frac{d \operatorname{grad} \log g}{ds} - \frac{d \operatorname{grad} \log g}{ds} \times \boldsymbol{t} \,.\, \boldsymbol{t} -$$

$$- \operatorname{grad} \log g \times \frac{1}{\rho} \boldsymbol{n} \,.\, \boldsymbol{t} - \operatorname{grad} \log g \times \boldsymbol{t} \,.\, \frac{d\boldsymbol{t}}{ds},$$

cioè, tenendo conto delle (5′) e (5″):

$$\frac{d^2 \boldsymbol{t}}{ds^2} = \frac{d \operatorname{grad} \log g}{ds} - \frac{d \operatorname{grad} \log g}{ds} \times \boldsymbol{t} \,.\, \boldsymbol{t} - \frac{1}{\rho^2} \boldsymbol{t} -$$

$$- \operatorname{grad} \log g \times \boldsymbol{t} \,.\, (\operatorname{grad} \log g - \operatorname{grad} \log g \times \boldsymbol{t} \,.\, \boldsymbol{t}).$$

Ora:

$$\operatorname{grad} \log g \times \boldsymbol{t} = \frac{d \log g}{ds},$$

e

$$\frac{d \operatorname{grad} \log g}{ds} - \frac{d \log g}{ds} \operatorname{grad} \log g = - g \frac{d}{ds} \operatorname{grad} \frac{1}{g},$$

perciò abbiamo ancora:

$$\frac{d^2 \boldsymbol{t}}{ds^2} = - g \frac{d}{ds} \operatorname{grad} \frac{1}{g} + g \left(\frac{d}{ds} \operatorname{grad} \frac{1}{g} \right) \times \boldsymbol{t} \,.\, \boldsymbol{t} - \frac{1}{\rho^2} \boldsymbol{t},$$

che riunisce le formule alla pag. 170 della Nota del VITERBI.

Il primo membro della eguaglianza ultima vale:

$$\frac{d \frac{1}{\rho}}{ds} \boldsymbol{n} + \frac{1}{\rho} \frac{d \boldsymbol{n}}{ds},$$

perciò moltiplicando scalarmente per $\boldsymbol{n}$, risulta:

$$\frac{d \frac{1}{\rho}}{ds} = - g \left(\frac{d}{ds} \operatorname{grad} \frac{1}{g} \right) \times \boldsymbol{n},$$

ovvero, ricordando le (5), (8):

$$\frac{d \frac{1}{\rho}}{ds} = - \frac{g^2}{G} \left(\frac{d}{ds} \operatorname{grad} \frac{1}{g} \right) \times (\operatorname{grad} g - \operatorname{grad} g \times \boldsymbol{t} \,.\, \boldsymbol{t})$$

che è la (9) del VITERBI.

Torino, Novembre 1911.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLVII, Disp. **2a**, **1911-1912**.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 3 Dicembre 1911.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente CAMERANO ed i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, D'OVIDIO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e SEGRE Segretario.

Viene letto ed approvato il verbale della seduta precedente.

Il Socio MATTIROLO presenta in omaggio un suo opuscolo su *I funghi ipogei della Liguria*.

Il Socio NACCARI presenta per la pubblicazione negli *Atti* una sua Nota: *Dell'influenza delle radiazioni diurne sull'attrito che incontra un mobile nell'aria*.

Vengono successivamente lette ed approvate le relazioni dei Soci JADANZA (con NACCARI), FUSARI (con CAMERANO), SOMIGLIANA (con GUIDI) sulle seguenti Memorie presentate nell'ultima adunanza:

O. ZANOTTI-BIANCO, *Le idee di Lagrange, Laplace, Gauss e Schiaparelli sull'origine delle Comete*;

A. C. BRUNI, *Studi sullo sviluppo della regione intermascellare dell'uomo*;

G. COLONNETTI, *L'equilibrio elastico dal punto di vista energetico*;

e viene pure successivamente, con voto unanime, approvato dalla Classe l'accoglimento delle tre Memorie nei volumi accademici.

Infine si comunica una lettera, in data 17 novembre scorso, del sig. M. Stuyvaert di Gand, nella quale è espresso il desiderio che un lavoro manoscritto da lui inviato, col titolo: *Un complexe cubique de droites*, venga accolto fra le pubblicazioni dell'Accademia. La Classe incarica i Soci D'Ovidio e Segre di riferire in una prossima adunanza.

LETTURE

Dell'influenza delle radiazioni diurne sull'attrito che incontra un mobile nell'aria.

Nota del Socio ANDREA NACCARI.

Nel 1826 Samuel Hunter Christie pubblicò una memoria intitolata: " *On Magnetic Influence in the Solar Rays* „ (1).

In questo scritto il Christie, che era fisico valente, amico del Faraday e da questo molto stimato, narra che avendo fatto oscillare un ago magnetico successivamente all'ombra e al sole, vide che al sole l'ago s'arrestava più presto.

La durata d'un'oscillazione era presso a poco la stessa nei due casi.

In un'appendice alla memoria il Christie aggiungeva di avere osservato lo stesso fenomeno, benchè in grado molto minore, con un ago di rame e con uno di vetro.

Due anni dopo il Christie tornò a studiar lo stesso argomento (2). Nella seconda memoria egli dice d'aver verificato e confermato le conclusioni tratte dall'esperienze precedenti e d'aver tentato di determinare quali fossero più efficaci fra i vari raggi dello spettro. Era però soltanto riuscito ad osservare che dell'acqua tinta con indaco, posta sul cammino dei raggi solari, toglieva ogni effetto.

Subito dopo le prime esperienze del Christie il Baumgartner le ripetè e concluse che l'effetto osservato dal fisico inglese era da attribuirsi alle correnti di convezione e ai moti prodotti

(1) " Phil. Transactions of the R. Society of London „, 1826, parte III, pag. 219.

(2) " Phil. Trans. of the R. Soc. of London „, 1828, parte I, pag. 379.

dal calore dei raggi solari nell'aria dei recipienti, in cui l'ago oscillava (1).

Avendo anch'io ripetuto l'esperienze del Christie, vidi che veramente lo smorzamento delle oscillazioni d'un ago magnetico era molto maggiore quando sull'ago cadevano i raggi solari. Lo stesso effetto osservai con sbarre di ottone e di rame sospese con un solo filo sottile d'argento o bifilarmente con fili di seta.

Per verificare poi se questo effetto, come aveva asserito il Baumgartner, fosse dovuto alle correnti d'aria provocate dai raggi solari nel recipiente cilindrico, in cui l'ago oscillava, feci in modo che durante le oscillazioni della sbarra entrasse nel vaso e propriamente presso al fondo una corrente d'aria.

In una bottiglia chiusa con un tappo di sovero attraversato da due tubi di vetro versavo dell'acqua per uno di questi tubi. L'altro tubo ripiegandosi due volte ad angolo retto portava sul fondo del vaso, dove l'asta oscillava, l'aria che l'acqua cacciava dalla bottiglia.

Durante l'esperienza l'asta sospesa mediante un filo d'argento faceva venti oscillazioni, delle quali si osservava l'ampiezza, e circa un litro d'aria veniva cacciato nel vaso. Tuttavia questa corrente, che pure doveva agitare l'aria del vaso molto più delle correnti di convezione, produceva pochissimo effetto e sempre effetto molto minore di quello dei raggi solari.

Una sbarra cilindrica di ottone, che aveva la lunghezza di 16,5 cm., e il diametro della sezione di 7 mm. fatta oscillare all'ombra a 18°,6 diede un decremento logaritmico eguale a 0,005138 (log. comuni).

Quand'essa fu fatta oscillare illuminata dal sole, i cui raggi non cadevano già sull'asta, ma sopra un foglio di carta bianca, ch'era avvolto intorno al cilindro di vetro, s'ebbe in media un decremento eguale a 0,005912 alla temperatura di 18°,8. L'aumento fu quindi del 15 $^0/_0$ circa.

Facendo cadere senz'altro i raggi del sole sull'asta, l'aumento salì al 47 $^0/_0$, mentre il riscaldamento dell'aria non avrebbe prodotto per sè che l'uno per cento all'incirca.

(1) " Zeitschrift für Physik und Mathematik ", III, 157.

Altre esperienze eseguii con la stessa sbarra dopo avere applicate ad essa simmetricamente rispetto all'asse di oscillazione due palette d'alluminio verticali, in forma di rettangoli. Il lato verticale di ciascuna paletta, ch'era più lontano dall'asse, cadeva nel piano della faccia estrema dell'asta.

Il lato orizzontale di ciascuna paletta era di 3 cm. e il lato verticale di 2.

All'ombra ebbi da cinque esperienze fatte a 20° il decremento $D = 0{,}008798$.

Con luce diffusa in giorno sereno ebbi un aumento del 9 %, con luce solare sulla carta che fasciava il vaso, ebbi 38 % e l'aumento salì a 60 % con luce solare diretta.

Con palette più grandi (4 × 3 cm.) ebbi un risultato consimile.

In queste esperienze fatte con le palette il decremento delle ampiezze delle oscillazioni avveniva con poca regolarità, il che probabilmente va attribuito all'agitazione che le palette stesse oscillando producono nell'aria.

Lo smorzamento delle oscillazioni di una sbarra è in parte effetto della perdita di energia che lo spostamento dell'aria richiede, e in parte dell'attrito interno dell'aria. Per separare uno di questi effetti e mettermi in condizioni più semplici sostituii alla sbarra uno o più dischi orizzontali oscillanti intorno all'asse verticale passante per il proprio centro, come vennero usati per lo studio dell'attrito interno dei gas col metodo del Coulomb.

I dischi da me adoperati avevano tutti il diametro di 16,5 cm. e vennero fatti oscillare entro un cilindro di vetro che aveva il diametro di 21 cm.

Il filo di sospensione era di argento, aveva la lunghezza di circa 70 cm. e il diametro di 0,1 mm.

Era opportuno anzi tutto verificare, anche con i dischi, se le correnti d'aria potessero produrre un notevole aumento dello smorzamento delle oscillazioni.

Operai con due dischi di alluminio disposti orizzontalmente alla distanza di 3 cm. l'uno dall'altro, sostenuti dal medesimo filo.

La stessa disposizione descritta di sopra serviva ad introdurre l'aria nel cilindro di vetro.

Al buio e senza corrente d'aria il decremento logaritmico fu $D = 0,00915$; con la corrente 0,00897. Alla fine senza corrente trovai 0,00883.

In queste e nelle altre esperienze fatte allo scopo di veder l'effetto delle correnti, nei dieci minuti di ciascuna esperienza si cacciava entro il cilindro un litro d'aria all'incirca.

In altre esperienze successive ottenni all'ombra senza corrente 0,00925 e con la corrente 0,00928.

In un'altra serie fatta in condizioni alquanto diverse ebbi senza corrente 0,01375 e 0,01301, con la corrente 0,01328.

Queste esperienze mi convinsero che le correnti d'aria, anche violente e tumultuose, non aumentano in modo notevole lo smorzamento dei dischi oscillanti.

Vediamo ora l'effetto dei raggi solari.

In una serie di esperienze uno dei dischi era di alluminio, l'altro di acciaio magnetizzato. I due poli di questo disco stavano alla estremità di un diametro.

Le prime esperienze furono fatte in condizioni tali che la temperatura entro il cilindro non si alzasse troppo. Al buio, vale a dire con luce così scarsa che bastasse appena ad osservare le ampiezze delle oscillazioni, ebbi 0,01134 a 21°. Alla luce diffusa d'un giorno sereno e a 21°,8 ebbi 0,01254.

Con luce solare che attraversava uno strato d'acqua di 2 cm. di grossezza prima di arrivare all'apparecchio, ebbi i numeri segnati nello specchietto seguente.

È da notare che i raggi solari cadevano sul disco superiore, che era quello di acciaio, e non colpivano che una piccola parte dell'altro e che con l'andare del tempo le porzioni illuminate dei due dischi andavano continuamente crescendo.

La prima colonna contiene i valori medi dei decrementi logaritmici dedotti da ciascuna serie di esperienze osservando venti oscillazioni successive. La seconda colonna contiene le temperature indicate durante le singole serie di esperienze da un termometro posto entro il cilindro col bulbo all'altezza dei dischi ed esposto ai raggi solari. La terza colonna indica l'aumento del decremento logaritmico, posto eguale a 100 il valore del decremento osservato al buio.

D	t	%
0,01394	22,4	23
0,01554	23,0	37
0,01731	23,6	53
0,01762	24,4	56
0,01756	24,9	55

L'effetto salì da ultimo al 55 %, mentre quello della sola temperatura dell'aria non sarebbe stato che di

$$0,0025 \times 3,9 = 0,0098,$$

cioè dell'uno per cento.

Altre esperienze feci dopo aver tolto lo strato d'acqua e fasciato con carta bianca il cilindro, in cui i dischi oscillavano. I raggi solari cadevano sulla carta e così lo spazio interno del cilindro veniva fortemente illuminato.

Al solito le prime esperienze si facevano con pochissima luce dopo che l'apparecchio era rimasto per tutta la notte al buio. In tali condizioni trovai

$$D = 0,01130 \text{ a } 23,7.$$

Poi successivamente, mentre la porzione della fascia di carta che era illuminata andava crescendo, ebbi questi valori

D	t	%
0,01267	24,6	12
0,01355	25,2	20
0,01634	26,7	45
0,01628	26,8	44
0,01614	27,6	43
0,01642	27,9	45
0,01601	28,1	42

Tolta la fascia, lasciando cadere sui dischi i raggi solari, ebbi:

D	t	%
0,01711	29,0	51
0,01859	29,6	64

Prima di descrivere altre esperienze è opportuno confrontare con quelle ora riferite altre che furono eseguite dopo aver sostituito al disco di acciaio magnetizzato un disco di ottone, e ciò per vedere se, come asseriva il Christie, l'effetto sia veramente assai più notevole sui corpi magnetizzati. Le esperienze mostrarono chiaramente il contrario.

Ecco in prova i risultati delle esperienze fatte con lo stesso disco di alluminio usato nelle esperienze precedenti, e con un disco di ottone che per diametro e per peso non differiva sensibilmente dal disco di acciaio. I due dischi oscillavano insieme: la distanza di essi era di 3 cm.

Al buio trovai:

$$D = 0,01137 \text{ a } 24,6.$$

Poi facendo cadere sul cilindro fasciato di carta i raggi solari, sicchè la parte illuminata della fascia andasse continuamente crescendo, ebbi questi valori:

D	t	%
0,01202	23,9	6
0,01221	24,7	8
0,01280	26,0	13
0,01400	26,8	23
0,01447	27,8	28
0,01496	28,8	32
0,01523	29,4	34

Tolta la fascia di carta, trovai:

$$D = 0{,}01853 \text{ a } 31{,}2.$$

L'aumento di D rispetto al valore trovato al buio salì dunque a 63 %.

È quindi manifesto che l'effetto si palesa nella stessa misura tanto nel caso in cui uno dei dischi oscillanti è di acciaio magnetizzato, quanto in quello in cui tutti e due i dischi oscillanti non sono magnetizzati.

Rimaneva da esaminare se l'effetto si verificasse anche con dischi di vetro o d'altra sostanza non metallica.

Mi servii prima di due dischi di cartone. Ebbi al buio:

$$D = 0{,}02047.$$

Sotto i raggi solari non molto intensi:

$$D = 0{,}02908,$$

cioè un aumento del 42 %.

Dopo che i dischi furono anneriti con nero fumo, l'aumento salì al 50 %.

Effetti simili ed anche maggiori ebbi con due dischi di vetro. Il fenomeno dunque si palesa in egual grado anche con dischi non metallici. Mi convinsi con speciali esperienze che se anche il filo di sospensione, il quale si teneva sempre difeso dai raggi solari, fosse stato esposto a questi, lo smorzamento non sarebbe stato aumentato.

Siccome lo smorzamento delle oscillazioni dei dischi può in parte essere effetto dell'attrito interno del filo di sospensione e di qualche altra causa secondaria, volli determinare l'effetto del solo attrito dell'aria operando nel modo seguito da O. E. Meyer. Feci quindi due serie di esperienze. In una di queste confrontai lo smorzamento delle oscillazioni al buio e sotto i raggi solari, tenendo i due dischi, come già s'è detto, a tre centimetri di distanza l'uno dall'altro.

Nella seconda serie feci lo stesso confronto dopo d'aver riunito i due dischi facendoli perfettamente combaciare. Così dall'una all'altra serie il momento d'inerzia non cangia, ma, riunendo i due dischi, la superficie, su cui l'attrito si esercita, riducesi alla metà.

Operando con due dischi d'ottone e applicando le formule usate dal Meyer trovai come medio di tre serie d'esperienze questo valore del coefficiente di attrito:

$$\eta = 0{,}000197$$

a 20 con pochissima luce, e

$$\eta = 0{,}000413$$

a 23 quando i raggi solari cadevano sul cilindro.

Benchè questi numeri non possano essere considerati come esprimenti i valori assoluti del coefficiente d'attrito nei due casi, essi mostrano in ogni modo che quel coefficiente aumenta grandemente per effetto dei raggi solari.

Stabilito che l'effetto era dovuto ad un aumento dell'attrito dell'aria, aumento grandemente maggiore di quello che corrispondeva al riscaldamento dell'aria entro il cilindro, restava da mettere in chiaro quale ne fosse la causa.

Era anzi tutto da vedere se lo stesso effetto dei raggi solari e della luce diffusa del giorno venisse prodotto dalle radiazioni d'una sorgente artificiale.

Con la fiamma d'una candela posta a 3 cm. dal cilindro di vetro a tale altezza che corrispondeva all'intervallo fra i due dischi oscillanti di ottone, ebbi:

senza radiazioni 0,009319

e

colle radiazioni 0,01174.

L'aumento fu dunque del 26 %.

Esaminai anche l'effetto d'un filo di platino collocato sul fondo del cilindro, che potevo rendere incandescente con una corrente elettrica.

Ebbi senza corrente 0,007354, con la corrente 0,010426, vale a dire un aumento del 42 %.

Anche le radiazioni oscure inviate da un recipiente di ferro riscaldato fino a 300° diedero un aumento di 27 %.

Tutte queste esperienze mostrano chiaramente che il fenomeno è dovuto all'effetto termico delle radiazioni, le quali ca-

dono sui dischi oscillanti. È notevole però la intensità dell'effetto.

Anche quando le esperienze venivano fatte con la luce diffusa del giorno e propriamente nelle ore del pomeriggio presso una finestra volta a levante, il fenomeno aveva sufficiente intensità.

Ecco gli effetti osservati in tali condizioni:

Al buio	0,01164	a 24,5	
alla luce diffusa	0,01267	a 25	(8,9 %)
al buio	0,01158	a 25,8	
alla luce diffusa	0,01262	a 25,9	(9,4 %)
"	0,01324	"	(14 %)
al buio	0,01159	a 23,5	
alla luce diffusa	0,01252	a 24,0	(8 %)
al buio	0,01161	a 22,4	
alla luce diffusa	0,01323	a 23	(14 %).

Effetti minimi, anche rispetto a questi, produssero delle scintille d'un rocchetto d'induzione, che durante le oscillazioni si facevano scoccare entro il vaso in vicinanza dei dischi oscillanti. Nè i raggi Röntgen producono effetto sensibile sullo smorzamento.

La teoria cinetica dei gas dà facilmente ragione dei fenomeni sopra descritti.

L'attrito interno dell'aria, secondo questa teoria, devesi a ciò, che delle molecole di uno strato d'aria, che ha minore velocità d'uno strato contiguo, passano a questo ultimo strato nel tempo stesso che altrettante molecole dallo strato più veloce passano al meno veloce. Da questo concetto si deduce che l'attrito interno η può essere espresso così:

$$\eta = \frac{1}{3}\,\rho L \Omega,$$

dove ρ è la densità del gas, L è la media corsa rettilinea delle molecole e Ω è la velocità media molecolare. Nel caso d'un corpo solido, che si move nell'aria, si ammette che uno strato d'aria sia aderente alla superficie del solido e si mova con esso.

Per ciò il decremento dell'ampiezza delle oscillazioni è effetto dell'attrito interno dell'aria.

Dalle numerose esperienze, che vennero fatte sull'argomento, si può dedurre che essendo η_0 l'attrito interno dell'aria a 0° e η l'attrito stesso a t, la formula:

$$\eta = \eta_0 (1 + 0{,}0025\, t)$$

rappresenta abbastanza bene l'aumento di η al crescere della temperatura t. Ma quando una radiazione cade sulla superficie di un disco oscillante la sua energia deve andare in gran parte impiegata ad aumentare la velocità delle molecole d'aria dello strato aderente alla superficie del disco e anche ad aumentare il numero delle molecole d'aria che se ne staccano. Crescerà quindi lo smorzamento.

Se tutto lo strato aderente avesse a staccarsene, interverrebbe allora il così detto attrito esterno che nelle condizioni ordinarie non produce effetto sensibile.

Riassunto.

1° Il fenomeno osservato dal Christie si verifica in fatto, ma non ha alcuna relazione col magnetismo.

2° Non lo si può spiegare col riscaldamento dell'aria ambiente, in cui avvengono le oscillazioni, perchè l'effetto di questo riscaldamento è trascurabile rispetto ad esso.

3° Le correnti d'aria dovute al riscaldamento prodotto dai raggi solari non sono causa del fenomeno. La spiegazione del Baumgartner è dunque erronea.

4° Il fenomeno va attribuito all'effetto prodotto dalle radiazioni sullo strato d'aria aderente alla superficie dei corpi oscillanti e sugli strati d'aria immediatamente vicini.

Relazione sulla Memoria storica dell'Ing. Ottavio Zanotti Bianco intitolata: *Le idee di Lagrange, Laplace, Gauss e Schiaparelli sulle origini delle Comete.*

Il titolo e la breve introduzione della Memoria storica presentata dall'Ing. Ottavio Zanotti Bianco dichiarano lo scopo propostosi dall'autore, l'esposizione cioè delle idee di Lagrange, Laplace, Gauss e Schiaparelli e di studi ad esse relativi sulla origine o provenienza che dir si voglia delle comete; argomento di filosofia naturale interessante ed importantissimo.

Lagrange riteneva che le comete provenissero da violente esplosioni avvenute sui pianeti in tempi remotissimi.

Laplace per contro opinava con Herschel padre che le comete siano piccole nebulose formate dalla condensazione della materia nebulare, tanto copiosamente sparsa nell' universo, erranti da sistema a sistema.

Gauss ebbe occasione di esprimere la sua opinione sulle idee di quei sommi matematici in due recensioni dei due volumi della *Connaissance des temps* che le contengono. Quelle recensioni sono stampate nel giornale *Göttingische gelehrte Anzeigen*, probabilmente molto poco diffuso, cosicchè quella opinione di Gauss su Lagrange è per la prima volta esposta nel lavoro dell'Ingegnere Zanotti Bianco, e quella su Laplace non fu conosciuta che nel 1874, quando Schiaparelli la menzionò.

Gauss non accolse le vedute di Lagrange, ma si accostò a quelle di Laplace, pur dimostrando come quest'ultimo fosse nella sua teoria incorso in alcune sviste d'indole essenzialmente matematica. L'autore espone riassunta la teoria di Laplace, colle correzioni indicate da Gauss, e menziona ed esamina parecchi scritti che alla teoria di Laplace si connettono, nonchè vari altri che avevano per iscopo di combattere o sostenere quella di Lagrange.

La rimanente parte della Memoria dell'Ing. Zanotti Bianco è poi consacrata agli studi di Schiaparelli sulla provenienza delle comete. Schiaparelli si attenne da principio alle idee di Laplace; poi si avvide delle sviste nelle quali quegli era in-

corso, e notò come avesse trascurato nelle sue discussioni il moto proprio del sole, moto che, secondo Schiaparelli, modificava sostanzialmente le conclusioni di Laplace.

Qui viene la dimostrazione del teorema dovuto a Schiaparelli sulla probabilità della natura iperbolica delle orbite delle comete, teorema che sollevò eleganti discussioni tra fautori ed oppositori di esso, delle quali l'autore espone le vicende essenziali.

Schiaparelli fu condotto ad ammettere che le comete formano col sole un sistema a parte nell'universo, attraverso al quale viaggiano di conserva con quello, animate da una piccolissima velocità relativa al sole.

I lavori recentissimi di alcuni valorosi astronomi, circa l'orbita iniziale di molte comete passati in rassegna dall'autore, conducono ad ammettere che quelle orbite iniziali medesime sono prettamente ellittiche, almeno per le comete di computo sicuro oggi note e quando si tenga conto della sola attrazione Newtoniana. Questo asserto, se accertato e confermato, condurrebbe ad ascrivere alle comete una origine solare, e non la sola qualità di compagne di viaggio nel percorso che il sole compie attraverso lo spazio stellato.

Questa è la conclusione alla quale giunge l'autore al termine della sua Memoria storica, la quale è sembrata ai sottoscritti degna di essere pubblicata nei volumi della nostra Accademia.

A. Naccari
N. Jadanza, *relatore.*

Relazione sulla Memoria del Dr. A. C. Bruni intitolata: *Studi sullo sviluppo della regione intermascellare nell'Uomo.*

Il Dr. A. C. Bruni, assistente nell'Istituto anatomico della R. Università di Torino, nella Memoria presentata considera in quattro capitoli distinti: 1° l'evoluzione e l'involuzione dei residui epiteliali che durante la formazione del palato definitivo rimangono inclusi fra il cosidetto palato-intermascellare, derivante dal processo nasale interno, ed il palato mascellare, deri-

vante dal prolungamento palatino del processo mascellare; 2° il modo di disporsi dei vasi e dei nervi che attraversano la regione intermascellare del palato; 3° l'evoluzione e l'involuzione delle diverse formazioni cartilaginee che costituiscono il pavimento della capsula nasale cartilaginea; 4° lo sviluppo dell'osso intermascellare e l'influenza su di esso esercitata dalle formazioni epiteliali, vascolari, nervose e cartilaginee della regione intermascellare.

L'A. per le sue ricerche potè usufruire di un ricco materiale tratto da ben sessantaquattro fra embrioni e feti umani. Egli si giovò dei metodi di ricerca più adatti allo scopo, e per potere avere e dare un'idea precisa dei complicati rapporti che si stabiliscono nella regione intermascellare ricorse alle ricostruzioni grafiche modificando il processo suggerito dal Woodworth. In tal modo potè giungere a conclusioni importanti e risolvere definitivamente questioni su cui vi furono vivi dibattiti fra distinti cultori della morfologia.

Una fra le indicate questioni si riferisce alla costituzione della regione intermascellare. L'A. su di ciò può affermare che questa regione è costituita non solo dal palato intermascellare derivante dal processo nasale interno, ma anche da una parte del palatomascellare derivante dal prolungamento palatino del processo mascellare. I limiti fra i due abbozzi palato-intermascellare e palato-mascellare sono dati dalla presenza di residui epiteliali che restano inclusi fra gli stessi abbozzi e che si riducono a formare su ciascun lato una colonna epiteliale, corrispondente al dotto naso-palatino di Stenson.

Un'altra questione si riferisce alle *cartilagines basales narium*; l'A. su questo punto può dire che oltre alle tre cartilagini basali già note ne esiste una quarta, che chiama cartilagine incisiva. Questa cartilagine si sviluppa indipendentemente dalle altre, ma al quarto mese della vita endouterina si fonde con tutte le altre a formare un solo pezzo, il quale a sua volta, più tardi, si divide in un segmento anteriore e in un segmento posteriore. Nè l'uno nè l'altro partecipa in alcun modo all'ossificazione dell'osso intermascellare.

Il Dr. Bruni dimostra che l'osso intermascellare, contrariamente a quanto si è sostenuto da molti e in particolare dall'Albrecht, si sviluppa da una sola laminetta ossea, la quale

precocemente si unisce ad un'altra laminetta che è l'abbozzo del mascellare. La laminetta intermascellare invia in seguito una sua propaggine in addietro verso il palato, ma questa nel suo accrescimento trova ad un certo punto impedita la via dalla presenza della colonna epiteliale del dotto di Stenson e dalle vene che l'accompagnano, per cui da quel punto è obbligata a dividersi in un processo che passa medialmente alla colonna ed in un processo che passa lateralmente. Fra i due processi rimane un'incisura la quale si cambia più tardi in fessura e corrisponde a quella che gli autori, interpretandola come prodotta dalla linea di riunione di due ossa incisive su ciascun lato, erroneamente hanno indicata col nome di sutura intraincisiva.

Nella minuta ed ordinata descrizione dei suoi risultati, corredata da figure dimostrative e ricca di citazioni bibliografiche, l'A. si sofferma su molte altre particolarità morfologiche cui fa seguire delle considerazioni critiche, ma il riferire su queste porterebbe troppo in lungo; basta del resto quanto venne già esposto per dimostrare l'importanza del lavoro. Concludendo i sottoscritti non esitano nel proporre che la Memoria del dottor A. C. Bruni venga accolta per la stampa fra le Memorie.

L. Camerano
Romeo Fusari, *relatore.*

Relazione sulla Memoria dell'ing. G. Colonnetti: *L'equilibrio elastico dal punto di vista energetico.*

Il principio del minimo lavoro nelle questioni di equilibrio elastico, enunciato la prima volta da Menabrea e successivamente usato largamente da Castigliano nella sua classica opera: *Théorie de l'équilibre des systèmes élastiques*, ha dato origine ad un metodo che è divenuto parte intrinseca della scienza delle costruzioni.

Ma la sua giustificazione teorica ha dato luogo a lunghe discussioni fra ingegneri e matematici, e ad ampie ricerche, fra cui notevoli sono quelle del prof. Donati. Tuttavia un accordo completo non può dirsi ancora raggiunto, tanto che il principio stesso non ha mai trovato posto in alcun trattato di teoria del-

l'elasticità; fatto ben singolare, quando si consideri che è invece entrato nella pratica comune dell'ingegneria.

Il Colonnetti ne propone nella presente Memoria una giustificazione assai soddisfacente e notevole per semplicità. Dall'introduzione del concetto di spostamento virtuale in poi si hanno nella meccanica numerosi esempi di *variazioni*, specialmente e variamente condizionate, che servono a ricondurre problemi meccanici a problemi di minimo. La felice introduzione di uno di questi concetti conduce il Colonnetti alla soluzione della quistione proposta.

Egli dimostra con rigore matematico, e senza bisogno di alcuna ipotesi, che il sistema delle tensioni d'equilibrio annulla la variazione dell'energia elastica, quando questa variazione è prodotta da un sistema di *tensioni equilibrate*, così chiamando quelle che soddisfanno alle equazioni d'equilibrio, per forze esterne nulle, anche senza essere effettivamente possibili nel sistema deformato. Di una specie analoga sono, ad esempio, quelle introdotte da Maxwell, in una quistione assai diversa, per spiegare la trasmissione a distanza delle azioni elettromagnetiche.

L'ampia discussione del problema, la chiarezza dell'esposizione, l'importanza del risultato raggiunto, messa anche in evidenza da alcune applicazioni, ci inducono a dare parere favorevole per la inserzione dello studio dell'ing. Colonnetti nelle Memorie accademiche.

C. Guidi
C. Somigliana, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLVII, Disp. 3ª e 4ª, **1911-1912**.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 17 Dicembre 1911.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. ANDREA NACCARI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: SALVADORI, D'OVIDIO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, FUSARI, e SEGRE Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza antecedente.

Il Presidente comunica:

1° i ringraziamenti della R. Università di Christiania per la partecipazione alle feste centenarie dell'Università;

2° un invito al II Congresso di Chimica e Fisica pura e applicata, che si terrà in memoria di MENDÉLÉEFF a Pietroburgo dal 3 al 10 gennaio prossimo;

3° una circolare della Società botanica italiana, accompagnata da una Relazione stampata del Dr. R. PAMPANINI, col titolo: *Per la protezione della Flora italiana*. La Classe, dopo che il Socio MATTIROLO ha svolto ulteriormente le considerazioni contenute in quella circolare, delibera di appoggiare caldamente il movimento promosso dalla detta Società per la protezione, non solo della Flora, ma in genere di tutti i monumenti naturali. E poichè si tratta di fare a suo tempo un'adunanza dei rappresentanti le Associazioni aderenti, vien delegato fin da ora a rappresentare la Classe il Socio MATTIROLO.

Il Socio corrispondente L. Mangin ha inviato in omaggio i seguenti suoi opuscoli:

Sur le Peridiniopsis asymetrica et le Peridinium Paulseni.

A propos de la division chez certains Péridiniens.

Il Socio Guareschi, a nome del Presidente S. E. Boselli e della Commissione esecutiva, presenta all'Accademia la prima copia dell'opuscolo: *Onoranze centenarie internazionali ad Amedeo Avogadro: 24 settembre 1911.* In esso, dopo una breve relazione, sono raccolti tutti i discorsi pronunziati in occasione della commemorazione e dell'inaugurazione del monumento ad Avogadro; fanno seguito le lettere e telegrammi ricevuti, e l'elenco dei sottoscrittori. Il Socio Guareschi fa rilevare il grande interessamento dimostrato per queste onoranze dal nostro Presidente Boselli, al quale principalmente si deve se esse si sono svolte col plauso di tutti gli Scienziati, nazionali e stranieri, convenuti in quella solenne circostanza a Torino. Nè va dimenticata l'opera efficacissima che pure per quelle onoranze aveva spiegata il Socio Senatore D'Ovidio, come primo presidente della Commissione esecutiva.

Il Socio Mattirolo, per incarico del Ministero d'Agricoltura, commercio e industria del Regno di Serbia, presenta in dono il volume: *La Serbie à l'exposition universelle de 1911 à Turin.*

Infine il Socio Segre, anche a nome del collega D'Ovidio, legge la relazione sulla Memoria del sig. M. Stuyvaert: *Un complexe cubique de droites.* Ad unanimità vengono approvate le conclusioni per l'accoglimento del lavoro nei volumi accademici.

LETTURE

Relazione sulla Memoria del sig. M. Stuyvaert: " *Un complexe cubique de droites* ".

Il complesso cubico C_3, cui è dedicato questo scritto, è il luogo delle rette comuni ai complessi omologhi di tre reti di complessi lineari, riferite projettivamente. È dunque rappresentato dall'annullarsi di un determinante cubico, i cui elementi son forme lineari delle coordinate di retta.

Da questa rappresentazione seguono subito, in modo noto, alcune sue proprietà: come l'esistenza di due sistemi distinti d'infinite generazioni analoghe a quella di partenza; il fatto che C_3 contiene due sistemi ∞^2 di congruenze (3, 3) di genere 2 (di Roccella); e l'avere il complesso 12 raggi doppi, comuni a tutte queste congruenze.

Ma l'Autore va più a fondo nella ricerca. Così, ad esempio, egli esamina il modo di comportarsi di C_3 e delle congruenze in ciascuno di quei raggi doppi. Studia la superficie del complesso relativa ad una retta generica, od a rette eccezionali. Determina poi direttamente la superficie singolare di C_3, ed il luogo di un punto da cui esca, come cono del complesso, un cono cubico armonico, od equianarmonico, ecc.: questioni che il metodo di Clebsch, basato sulla notazione simbolica delle forme e degl'invarianti, risolveva, in un tratto, per un complesso cubico generale; ma che qui, trattate espressamente pel complesso C_3, conducono ad ulteriori ricerche.

Poichè negli *Atti* e nelle *Memorie* dell'Accademia comparvero alcuni lavori del sig. U. Perazzo, nei quali già s'incontrava un particolare complesso cubico, generabile mediante tre reti projettive di complessi lineari, il sig. Stuyvaert ha desiderato che pure nelle nostre raccolte compaja questo suo scritto. È nostro avviso che tale desiderio possa esser accolto, poichè

il lavoro è accurato ed interessante. Nel dubbio poi che questo, quando fosse stampato fra le Note degli *Atti*, possa oltrepassare il limite di lunghezza che a quelle è assegnato, noi proponiamo che esso venga invece inserito nei volumi delle *Memorie*.

E. D'Ovidio
C. Segre, *relatore*.

Adunanza del 31 Dicembre 1911.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Naccari, Direttore della Classe, Salvadori, D'Ovidio, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari e Segre Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Peano.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio corrispondente Taramelli ha inviato in omaggio un suo opuscolo: *Quelques observations sur les changements du climat postglaciaire en Italie.*

Il Socio Mattirolo legge alcune pagine in commemorazione di Sir Joseph Dalton Hooker (1817-1911), Corrispondente della nostra Accademia, morto il 10 dicembre 1911.

Infine è presentata per l'inserzione negli *Atti*, una Nota, inviata dal Socio Peano, del Prof. C. Burali-Forti, *Sul moto composto.*

LETTURE

Sir Joseph Dalton Hooker (1817-1911).

Commemorazione letta dal Socio ORESTE MATTIROLO.

Sir Joseph Dalton Hooker, già Direttore del Giardino botanico di *Kew*, nostro socio corrispondente fino dal Febbraio 1885, decano dei naturalisti inglesi, scienziato universalmente noto per la grandiosità e la varietà dell'opera sua, si spegneva serenamente il 10 corr. nella grave età di anni 94 (1), dopo una vita avventurosa tutta dedicata alla scienza e all' incremento dell' Orto botanico di Kew, del quale, dopo l'anno 1865, fu l'anima e la mente direttrice.

Non è per tessere l'elogio di tanto personaggio (al quale compito mi sentirei impari), che io mi permetto ricordare oggi le benemerenze scientifiche di Sir J. Dalton Hooker; ma sibbene per rivolgere in nome della nostra Accademia un saluto doveroso alla sua memoria; per rendere all'eminente scienziato l'omaggio riverente dei botanici italiani, imperocchè egli fu un " *principe* „ e l'opera sua risplenderà nei Secoli circondata da quell'aureola di gloria che si addice a chi ha saputo rivelare al mondo tanta parte dei tesori che ne allietano la superficie.

Vissuto in un periodo di tempo adatto all'indole degli studi sistematici, largamente e sagacemente seppe disporre e valersi delle condizioni favorevoli che gli presentava la munificente larghezza oculata, colla quale l'Inghilterra sa sovvenire lo sviluppo degli studi floristici massime nelle colonie sue. Egli, in questo campo di studi, continuò l' opera celebre del padre Sir William Hooker, dando corpo e vita a quella magnifica istituzione che è l'Orto botanico di Kew, a buon diritto ritenuto

(1) Sir Joseph Dalton Hooker nacque il 30 giugno 1817 a *Halesworth (Suffolk)*, morì a *Sunnigdale (Berkshire)* il 10 dicembre 1911.

oggi il più vasto Museo di piante viventi, la più ricca collezione di *Exsiccata* che una nazione possa vantare, creandosi così egli un titolo di gloria che non potrà mai esser sufficientemente lodato.

Tanto WILLIAM come JOSEPH HOOKER (perchè il figlio fu la emanazione intellettuale del padre) ebbero il merito di aver saputo inspirare il gusto della botanica ad un numero grande di persone; e di aver saputo esercitare questa loro azione non soltanto nell'ambiente scientifico col quale direttamente erano in contatto, ma di aver agito, per così dire, a distanza, influendo sopra quel grandioso movimento botanico britannico del XIX secolo, che ha saputo dare al mondo l'elenco delle principali sue ricchezze vegetali. La massima parte delle "*Flore*" esotiche, infatti, ebbero nei due Hooker, padre e figlio, propugnatori e sostenitori sagaci, oculati e zelanti. Quando si pensa che Sir WILLIAM ha pubblicato più di 4094 tavole (1) di specie nuove di piante! e che forse altrettante specie furono illustrate nelle opere del figlio, si comprende quale influenza abbiano questi due colossi esercitato sul progresso della sistematica dei vegetali in specie delle regioni extraeuropee.

L'opera di JOSEPH HOOKER però non si limitò alla sistematica puramente descrittiva, ma si svolse in tutti i campi della botanica, dimostrandosi l'ingegno suo particolarmente adatto alle speculazioni di indole filosofica e sintetica.

Ammiratore e amico affettuoso di CARLO DARWIN, e in certo qual modo suo precursore, ben presto ne abbracciò e sorresse, difendendole ad oltranza, le teorie; fedele alla sua memoria, coi consigli, coi documenti personali, piamente aiutò la compilazione di quel prezioso e nobilissimo documento di pietà figliale che è la *Vita e la corrispondenza di Carlo Darwin* (2), ove le numerose lettere, che il Darwin a lui diresse, lumeggiano così soavemente l'intimità dei due sommi, dimostrando la sublime nobiltà dei loro ideali e l'indole dei loro ingegni fatti per comprendersi e per completarsi.

---

(1) V. A. DE CANDOLLE, *La vie et les écrits de Sir William Hooker*, "Archives des Sciences de la Bibliothèque universelle", janvier, 1866.

(2) F. DARWIN, *La vie et la correspondance de Charles Darwin*. Paris, 1888, vol. I e II.

Dal 1844 al 1882 durò ininterrotta la intima corrispondenza di affetti e di pensieri tra i due grandi; e la cura meticolosa che, in mezzo a gravi difficoltà e per tanti anni, pose l'Hooker nel portare a termine (secondo i piani e i concetti proposti dallo stesso Darwin) la pubblicazione del colossale e fondamentale *Index Kewensis plantarum phanerogamarum*, pubblicato fra il 1893 e il 1895 a Oxford, è la prova luminosa dell'amore e dei sentimenti, direi quasi, di religioso culto, che egli conservava verso la memoria dell'indimenticabile amico.

L'opera botanica di J. Hooker si svolse ininterrotta per quasi 72 anni, a partire cioè dall'anno 1839, in lavori innumerevoli. I primi che hanno riguardo alla Flora antartica comparvero dal 1839 al 1847 e riassumono i risultati interessantissimi dei viaggi da lui compiuti, alloraquando, come medico in sottordine, accompagnava la celebre spedizione comandata dal capitano James Clark-Ross di cui facevano parte la navi *Erebus* e *Terror*, la quale si spinse sino al 78°,10 di lat. sud, scoprendo parecchie isole importanti, la Terra Vittoria, il Monte Erebus.

Dal 1846 al 1851 Hooker visitò buona parte dell'Europa e gran parte dell'Asia, ritornando in patria con una messe di circa 6000 specie di piante, gran parte delle quali non ancora descritte, una quantità enorme di semi e di frutti e parecchie centinaia di campioni di legni.

Nell'anno 1852 riprese i viaggi in Europa — nel 1871 fu nel Marocco e nelle regioni dell'Atlante — nel 1887 visitò l'America del Nord, dopo che era stato chiamato alla Direzione dell'Orto botanico di Kew già tenuta dal padre suo, morto il 12 settembre dell'anno 1865.

I suoi lavori di geografia botanica e sopratutto quelli che studiano le origini e le parentele delle piante lo fecero, a giusta ragione, considerare, come ho detto, uno dei precursori di Darwin, di cui più tardi fu per molti riguardi ispiratore.

Le molteplici Monografie di famiglie differentissime di piante, le Flore numerose, fra le quali ricordiamo quelle che riassumono e studiano la vegetazione della *Tasmania*, della *Nuova Zelanda*, delle regioni che formano il gigantesco gruppo montuoso dell'*Imalaja*, del *Marocco*, dell'*Atlante*, dell'*India* in genere, ecc., la magistrale e notissima opera *Genera plantarum* che egli scrisse colla collaborazione di *Giorgio Bentham*, la quale rappresenta la sintesi

delle cognizioni di Botanica sistematica che si avevano sino verso il 1880, sono altrettante testimonianze delle sue attitudini eccezionali, dell'indole analitica e sintetica del suo ingegno, della versatilità e della sua immensa coltura.

L'Inghilterra che ora ne piange amaramente la perdita, deve e dovrà molta parte della sua prosperità coloniale all'opera indefessa di questo grande suo figlio, che seppe così brillantemente integrare l'opera paterna, accumulando tesori scientifici che vivranno nei tempi, esercitando quella influenza illuminata, generosa, incessante che fu la ragione precipua dello splendore raggiunto dalla botanica sistematica inglese nel XIX secolo.

Torino, Dicembre 1911.

Sul moto composto.

Nota di C. BURALI-FORTI

Ad un punto P_0 dello *spazio rigido* s_0 si dia un determinato moto nello spazio stesso s_0 e, *contemporaneamente*, si dia un moto allo spazio rigido s_0 in uno spazio S che lo contiene.

La traiettoria di P_0 in S è la risultante di due moti: quello di P_0 in s_0 che (sottintendendo lo spazio S, ritenuto fondamentale) può chiamarsi *moto relativo*; quello di s_0 in S che può chiamarsi *moto di trascinamento*. Il moto di P_0 in S è, rispetto allo spazio fondamentale S, il *moto assoluto* di P_0.

Ciò che principalmente interessa, in quelle questioni nelle quali comparisce un tal moto composto, è il *moto assoluto*; ma, in generale, le questioni stesse si semplificano notevolmente studiando il *moto relativo* e passando poi al *moto assoluto* mediante il *moto di trascinamento*. Ma perchè ciò possa farsi è chiaro che deve esser noto il modo di comportarsi di quest'ultimo moto; e poichè il *moto di trascinamento* è niente altro che un *moto di corpo rigido* (s_0) nello spazio S, si comprende facilmente che le ordinarie proprietà del *moto composto* devono potersi dedurre, e

in modo assai semplice e puramente geometrico, dal *teorema fondamentale del moto di un corpo rigido* (*).

Scopo di questa breve nota è di far vedere come, lasciando al moto composto la sua piena e naturale indipendenza da elementi di riferimento, si possa, mediante il teorema fondamentale del moto di corpo rigido, ottenere gli ordinari teoremi delle *velocità* e *accelerazioni* (CORIOLIS) insieme, — e ciò è importante —, alle *forme effettive* della *velocità* e *accelerazione del moto di trascinamento* (**).

***

Si realizza analiticamente il moto composto già considerato dando un punto P funzione del tempo t e di uno spazio rigido s,

$$P = f(t, s) \tag{1}$$

e dando inoltre s in funzione del tempo τ (identico a t o funzione di t) e dello spazio S,

$$s = \varphi(\tau, S), \tag{2}$$

supposto che per un dato valore (iniziale) t_0 di t, P abbia la posizione P_0 e s abbia la posizione s_0.

(*) Per la dimostrazione *assoluta* (cioè indipendente da elementi di riferimento) *e puramente geometrica* di questo teorema fondamentale cfr.:

C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, *Éléments de calcul vectoriel* (A. Hermann, Paris, 1910; ediz. italiana, Zanichelli, Bologna, 1909), da pag. 123 a 128.

R. MARCOLONGO, *Theoretische Mechanik* (B. G. Teubner, Leipzig, 1911; traduzione di H. E. Timerding), Erster Band, p. 110.

Per un'altra forma dello stesso teorema, cfr.: G. PEANO, *Calcolo geometrico* (Bocca, Torino, 1888) e C. BURALI-FORTI, *Sul moto di un corpo rigido* (" Atti Acc. Scienze ", Torino, 1903).

(**) Ordinariamente si considerano *due* sistemi di assi cartesiani ortogonali, uno *fisso* in S, l'altro *mobile in* S *e rigidamente collegato con* s. Ciò non è necessario come vedremo (Cfr. anche nota seguente).

Una volta riconosciuto utile o necessario di introdurre i due sistemi di assi cartesiani, si può approfittare di questi per dare, dei teoremi sul moto composto, una dimostrazione vettoriale che supera per semplicità tutte le altre, anche recenti, che ci sono note; tale dimostrazione è stata data dal Prof. F. CASTELLANO nelle sue *Lezioni di Meccanica razionale* (Torino, 1ª ediz., 1894, p. 96; 2ª ediz., 1911, p. 99). Cfr. anche *Meccanica razionale* di R. MARCOLONGO (Manuali Hoepli, 1905).

Sostituendo la (2) nella (1) si ha:

$$P = f \{ t, \varphi(\tau, S) \} . \tag{3}$$

Dato τ in funzione di t, allora: la (3) dà la *traiettoria assoluta* di P_0 in S, la (1) dà la *traiettoria relativa* di P_0 per qualsiasi posizione di s, la (2) individua il *moto di trascinamento* (*).

In ciò che segue supponiamo, e senza togliere nulla alla generalità,

$$\tau = t ,$$

ma nelle (2), (3) conserviamo t e τ di forma distinta affinchè non vi sia dubbio relativamente al valore dei simboli $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial \tau}$ che esprimono le derivate parziali rispetto al tempo nel moto relativo e di trascinamento.

Essendo M un ente qualsiasi funzione di t e di s, e per s valendo la (2),

$$M = F \{ t, \varphi(\tau, S) \} ,$$

poniamo, per abbreviare la scrittura, e seguendo l'uso comune:

$$\begin{cases} M' = \frac{dM}{dt}, \quad M'' = \frac{dM'}{dt} = \frac{d^2M}{dt^2}, \quad M_r' = \frac{\partial M}{\partial t}, \quad M_s' = \frac{\partial M}{\partial \tau}, \\ M_r'' = \frac{\partial M_r'}{\partial t}, \quad M_s'' = \frac{\partial M_s'}{\partial \tau}, \quad M_{rs}'' = \frac{\partial M_r'}{\partial \tau}, \quad M_{sr}'' = \frac{\partial M_s'}{\partial t}; \end{cases} \tag{4}$$

M', M'' sono le *derivate totali* prima e seconda di M rispetto a t; M_r', M_s' le *derivate parziali* prime di M rispetto a t e τ che possono chiamarsi *derivata relativa* e di *trascinamento*; analogamente per le M'', osservando che M_{rs}'', M_{sr}'' possono anche esser distinte.

(*) Se supponiamo t e τ indipendenti, allora la (3) individua una superficie Σ nella quale sono tracciate le linee $t =$ cost., $\tau =$ cost. Per $\tau = t$ (o, in generale, per τ funzione di t) la (3) dà una linea di Σ che è appunto la traiettoria assoluta di P_0, mentre le linee $\tau =$ cost. sono le traiettorie relative di P_0 in s per le varie posizioni di s.

È, in sostanza, in questo modo semplice e indipendente da assi coordinati, che il Morera considera il moto composto (*Lezioni di Meccanica razionale*, p. 120; litografie, Torino, 1903-04).

Dalle (4), dalla ipotesi $\tau = t$ ed osservando che $\frac{d\tau}{dt} = 1$, si ha:

$$(5) \qquad \begin{cases} M' = M_r' + M_s' \\ M'' = M_r'' + M_s'' + M_{rs}'' + M_{sr}'', \end{cases}$$

la prima delle quali dà, per $M = P$, l'ordinario teorema del *parallelogrammo delle velocità* e la seconda dà, come vedremo, il *teorema di* CORIOLIS (*).

Per lo spazio rigido s in moto (tempo τ) sia Ω il vettore istantaneo di rotazione nel tempo generico τ; cioè essendo $\boldsymbol{u}$ un *vettore del campo* s (differenza di due punti di s) *e di modulo costante*, si abbia sempre:

$$(6) \qquad \boldsymbol{u}_s' = \Omega \wedge \boldsymbol{u}$$

e, in conseguenza,

$$(7) \qquad \boldsymbol{u}_s'' = \{ (\Omega \wedge)^2 + \Omega_s' \wedge \} \boldsymbol{u} \ (^{**}).$$

Sia A un punto invariabilmente collegato con s, e quindi funzione di τ ma non di t. Per ogni valore di t il vettore $P - A$

(*) Anche MORERA ottiene così, sotto forma assoluta, il teorema delle velocità (l. c.); per il teorema di CORIOLIS ricorre agli assi coordinati fissi e mobili.

(**) Cfr. *Éléments*, l. c.

Derivando la (6) rispetto a τ si ha:

$$\boldsymbol{u}_s'' = \Omega \wedge \boldsymbol{u}_s' + \Omega_s' \wedge \boldsymbol{u} = \Omega \wedge (\Omega \wedge \boldsymbol{u}) + \Omega_s' \wedge \boldsymbol{u}$$

a cui si dà subito la forma (7).

Osservando che:

$$(\Omega \wedge)^2 = H(\Omega, \Omega) - \Omega^2,$$

alla (7) si può anche dare la forma:

$$\boldsymbol{u}_s'' = \{ H(\Omega, \Omega) - \Omega^2 + \Omega_s' \wedge \} \boldsymbol{u}.$$

Giova notare che tanto $\boldsymbol{u}_s'$ come $\boldsymbol{u}_s''$ si ottengono applicando ad $\boldsymbol{u}$ una *omografia indipendente da* $\boldsymbol{u}$; per $\boldsymbol{u}_s'$ l'*omografia* ASSIALE $\Omega \wedge$; per $\boldsymbol{u}_s''$ l'*omografia* $(\Omega \wedge)^2 + \Omega_s' \wedge$ *che ha* $(\Omega_s')^2$ *per* DILATAZIONE *e* Ω_s' *per* VETTORE.

Per ciò che riguarda le *omografie* vedi il volumetto *Omografie vettoriali* (G. B. Petrini, Torino, 1909) di C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO, che fa seguito agli *Éléments* già citati.

ha *modulo costante*; si possono dunque applicare le (6), (7) per $u = P - A$ e si ha:

$$(9) \qquad \begin{cases} P_s' = A_s' + \Omega \wedge (P - A) \\ P_s'' = A_s'' + \{(\Omega \wedge)^2 + \Omega_s' \wedge\}(P - A) \end{cases}$$

che danno la forma effettiva, *necessaria nelle applicazioni*, della velocità ed accelerazione di trascinamento.

Derivando P_r' rispetto a τ si ha dalla (6):

$$P_{rs}'' = \Omega \wedge P_r' ;$$

derivando la prima delle (9) rispetto a t e ricordando che A ed Ω non sono funzioni di t, si ha:

$$P_{sr}'' = \Omega \wedge P_r'$$

e in conseguenza:

$$P_{rs}'' = P_{sr}'' = \Omega \wedge P_r'$$

che chiamasi *semiaccelerazione complementare.*

Dalla seconda delle (5) si ha dunque, per $M = P$,

$$(10) \qquad P'' = P_r'' + P_s'' + 2\Omega \wedge P_r'$$

che dimostra il teorema di Coriolis, dando anche, in grandezza, direzione e verso, l'accelerazione complementare, in funzione della rotazione istantanea dello spazio rigido e della velocità relativa.

Per l'applicazione pratica della (10) occorre il valore di P_s'', accelerazione di trascinamento, che è dato dalla seconda (9).

Se anche S, rigido, si muove in S_1 e così di seguito, il metodo precedente può essere applicato per i vari elementi relativi e di trascinamento; le formule si complicano e la loro utilità pratica sparisce.

Torino, Ottobre 1911.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

PREMII DI FONDAZIONE GAUTIERI

L'Accademia Reale delle Scienze conferirà nel 1912 un premio di fondazione Gautieri all'opera di Filosofia, inclusa la Storia della Filosofia, che sarà giudicata migliore fra quelle pubblicate negli anni 1909-1911. Il premio sarà di L. 2400, e sarà assegnato ad autore italiano (esclusi i membri nazionali residenti e non residenti dell'Accademia) e per opere scritte in italiano.

Gli autori, che desiderano richiamare sulle loro pubblicazioni l'attenzione dell'Accademia, possono inviarle a questa. Essa però non farà restituzione delle opere ricevute.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

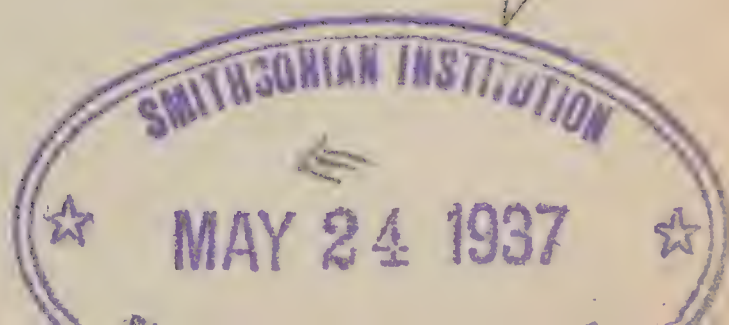
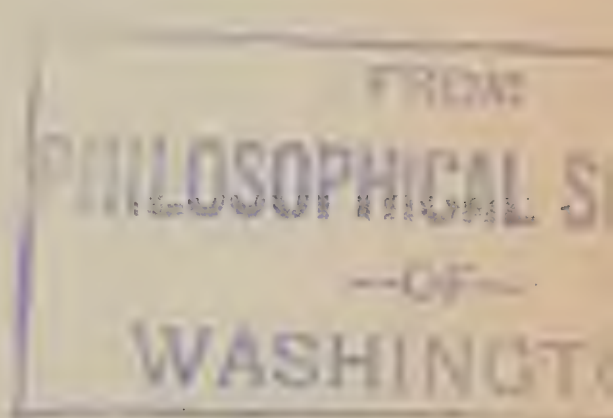
DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLVII, Disp. 5[a], 1911-1912.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Gennaio 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-Presidente Camerano, il Direttore della Classe Naccari, ed i Soci: Salvadori, D'Ovidio, Jadanza, Guareschi, Fileti, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari e Segre Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Guidi.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente pronuncia una breve commemorazione del Socio Prof. Francesco Rossi, morto l'11 corrente, che era stato nominato Socio residente nell'altra Classe fin dal 10 dicembre 1876. Ricorda la sua operosità scientifica in un campo di ricerche arduo e poco coltivato; e manda un riverente saluto alla sua memoria.

Il Socio corrispondente Celoria ha inviato in omaggio un opuscolo scritto da lui e da E. Gliamas: *Triangolazione geodetica e Cartografia ufficiale del Regno.*

Il Socio Mattirolo offre in dono a nome dell'Autore, professor G. B. De Toni, la parte 5ª dei *Frammenti Vinciani.*

Il Socio Somigliana presenta, anche per incarico dei professori Cantone e De Marchi, la memoria pubblicata dal Dr. F. Vercelli, *Relazioni e ricerche sulle osservazioni della temperatura del lago di Como fatte negli anni 1898-1905 dai proff. M. Cantone, L. De Marchi e C. Somigliana.*

Vien presentata, per la stampa negli *Atti*, dal Socio Jadanza una Nota dell'Ing. Enrico Gatti: *Particolari sistemi diottrici ad ingrandimento costante costituiti da tre lenti.*

Il Socio Segre presenta, pure per gli *Atti*, a nome dell'Autore Socio corrispondente F. Enriques, una Nota: *Sui moduli d'una classe di superficie algebriche e sul teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili*; ed inoltre un proprio lavoro col titolo: *Le Geometrie projettive nei campi di numeri duali.*

LETTURE

Particolari sistemi diottrici ad ingrandimento costante costituiti da tre lenti.

Nota dell' Ingegnere ENRICO GATTI

1. — L' ingrandimento G di un sistema diottrico a mezzi estremi identici, determinato dalla

$$G = \pm \sqrt{-\frac{\partial x_n}{\partial D}}$$

nella quale D rappresenta la distanza di un punto oggettivo dalla prima lente ed x_n quella della corrispondente immagine dall'ultima, si mostra indipendente dal valore di D quando questo ultimo valore è legato ad x_n da una relazione di primo grado.

Tal cosa accade per un sistema telescopico costituito da due lenti convergenti di distanze focali φ_1, φ_3, delle quali, ad esempio, corrisponda a φ_1 la distanza focale di quella che prima riceve l'azione della luce.

Quel sistema, come è noto, non può servire da obbiettivo che per i punti i quali hanno una distanza dalla prima lente non superiore a

$$p = \varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3}.$$

Si vuole provare che fra i sistemi diottrici centrati costituiti con tre lenti, delle quali sono φ_1 e φ_3 le distanze focali positive della prima e della terza lente, ne esistono di quelli ad ingrandimento costante i quali possono servire da obbiettivo per tutti i punti dell'asse compresi in un segmento avente per ascissa dell'estremo più lontano dalla prima lente un valore positivo e finito:

$$K > p \tag{1}$$

e tale, quel segmento, che l'ascissa dell'altro estremo — indicato con r lo spostamento massimo che si vuol assegnato alla immagine e con m una quantità finita maggiore di zero — sia uguale a $K - mr$.

2. — Sieno φ_1, φ_2, φ_3 le distanze focali di tre lenti centrate delle quali $\varphi_1 > 0$ e $\varphi_3 > 0$: corrisponda a φ_1 la lente che prima riceve la luce e si indichino ordinatamente con $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 > 0$ le distanze della seconda lente dalla prima e della terza dalla seconda.

Se D sarà la distanza di un punto oggettivo dalla prima lente ed x_3 la distanza della immagine del punto stesso dalla terza lente, si trova come relazione che lega D ad x_3 la:

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad & D x_3 \left[(\Delta_1 - \varphi_1)(\Delta_2 - \varphi_3 - \varphi_2) - (\Delta_2 - \varphi_3)\varphi_2\right] - \\
& - D\varphi_3 \left[(\Delta_1 - \varphi_1)(\Delta_2 - \varphi_2) - \Delta_2 \varphi_2\right] - \\
& - x_3 \varphi_1 \left[\Delta_1 (\Delta_2 - \varphi_3 - \varphi_2) - (\Delta_2 - \varphi_3)\varphi_2\right] + \\
& + \varphi_1 \varphi_3 \left[\Delta_1 (\Delta_2 - \varphi_2) - \Delta_2 \varphi_2\right] = 0.
\end{aligned}
$$

Fatto:

$$(\Delta_1 - \varphi_1)(\Delta_2 - \varphi_3 - \varphi_2) - (\Delta_2 - \varphi_3)\varphi_2 = 0,$$

assunto cioè:

$$(3) \qquad \varphi_2 = \frac{(\Delta_1 - \varphi_1)(\Delta_2 - \varphi_3)}{\Delta_1 + \Delta_2 - \varphi_1 - \varphi_3},$$

si sostituisca in (2) tale valore. Si ottiene:

$$
\begin{aligned}
(4) \qquad & D\varphi_3^2 (\Delta_1 - \varphi_1)^2 + x_3 \varphi_1^2 (\Delta_2 - \varphi_3)^2 - \\
& - \varphi_1 \varphi_3 \left[\Delta_2 \varphi_1 (\Delta_2 - \varphi_3) + \Delta_1 \varphi_3 (\Delta_1 - \varphi_1)\right] = 0.
\end{aligned}
$$

3. — Si vuole che allorquando $x_3 = 0$ risulti:

$$D = K$$

essendo:

$$K > \varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3}.$$

Posto $x_3 = 0$ nella (4) si ha la relazione:

$$(5)\qquad \Delta_1^2 \varphi_3 (K - \varphi_1) - \Delta_1 \varphi_1 \varphi_3 (2K - \varphi_1) + \\ + \varphi_1^2 [K\varphi_3 - \Delta_2 (\Delta_2 - \varphi_3)] = 0$$

la quale risolta rispetto Δ_1 porge:

$$(6)\qquad \Delta_1 = \frac{\varphi_1\varphi_3 (2K - \varphi_1) \pm \varphi_1 \sqrt{\varphi_3 [4 (K - \varphi_1) \Delta_2^2 - 4 \varphi_3 \Delta_2 (K - \varphi_1) + \varphi_3\varphi_1^2]}}{2\varphi_3 (K - \varphi_1)}.$$

Il valore di Δ_1 è reale quando:

$$(7)\qquad 4 (K - \varphi_1) \Delta_2^2 - 4\varphi_3 \Delta_2 (K - \varphi_1) + \varphi_3 \varphi_1^2 \geqq 0.$$

Dalla (7) si ricava:

$$(8)\qquad \Delta_2 = \frac{\varphi_3 (K - \varphi_1) \pm \sqrt{\varphi_3 (K - \varphi_1) [(K - \varphi_1) \varphi_3 - \varphi_1^2]}}{2 (K - \varphi_1)}.$$

I valori di Δ_2 raccolti nella (8), detti Δ_2'; Δ_2'', sono reali a cagione del valore presupposto per K, sono ambedue positivi ed ambedue minori di φ_3.

Le radici Δ_1'; Δ_1'', rappresentate dalla (6), saranno reali quando si assuma:

$$\Delta_2 \geqq \Delta_2' \qquad \text{o} \qquad \Delta_2 \leqq \Delta_2''.$$

Le radici Δ_1'; Δ_1'' poi saranno ambedue positive, oppure l'una sarà positiva e l'altra negativa secondochè:

$$(9)\qquad \Delta_2^2 - \Delta_2 \varphi_3 - K\varphi_3 \lesseqgtr 0;$$

e poichè dalla (9), considerata come equazione, si trae:

$$(10)\qquad \Delta_2 = \frac{\varphi_3 \pm \sqrt{\varphi_3 (\varphi_3 + 4K)}}{2}$$

chiamando $^*\Delta_2'$; $^*\Delta_2''$ le radici definite dalla (10) saranno:

$$\Delta_1' > 0 \qquad \text{e} \qquad \Delta_1'' > 0$$

quando si scelga:

$$ {}^*\Delta_2' > \Delta_2 > {}^*\Delta_2'' $$

e si avrà:

$$ \Delta_1' > 0 \qquad \text{e} \qquad \Delta_1'' < 0 $$

se

$$ \Delta_2 > {}^*\Delta_2' \qquad \text{o se} \qquad \Delta_2 < {}^*\Delta_2''. $$

Si ha poi:

$$ {}^*\Delta_2' > \Delta_2' > \Delta_2'' > {}^*\Delta_2'' $$

e, perciò, considerando per Δ_2 i soli valori positivi, le radici Δ_1' e Δ_1'' saranno reali e positive se

$$ {}^*\Delta_2' > \Delta_2 \geqq \Delta_2' \qquad \text{oppure se} \qquad \Delta_2'' \geqq \Delta_2. $$

Le radici stesse saranno reali e

$$ \Delta_1' > 0 \qquad \Delta_1'' < 0 $$

quando

$$ \Delta_2 > {}^*\Delta_2'. $$

Il valore $\Delta_1 - \varphi_1$ dedotto dalla (6) è:

$$ (11) \quad \Delta_1 - \varphi_1 = \frac{\varphi_1^2\varphi_3 \pm \varphi_1 \sqrt{\varphi_3 [4(K-\varphi_1)\Delta_2^2 - 4\varphi_3\Delta_2(K-\varphi_1) + \varphi_3\varphi_1^2]}}{2\varphi_3(K-\varphi_1)}. $$

È facile verificare che quando sia:

$$ \Delta_2 \geqq \Delta_2' \qquad \text{oppure} \qquad \Delta_2 \leqq \Delta_2'' $$

delle due radici $\Delta_1' - \varphi_1$; $\Delta_1'' - \varphi_1$ determinate dalla (11) sarà:

$$ \Delta_1' - \varphi_1 > 0 $$

e si avrà:

$$ \Delta_1'' - \varphi_1 \gtreqless 0 \qquad \text{secondochè} \qquad \Delta_2 - \varphi_3 \lesseqgtr 0. $$

Pei valori di Δ_2 quindi definiti da:

$$ {}^*\Delta_2' > \Delta_2 \geqq \Delta_2' \text{ si avrà } \begin{cases} \Delta_1' - \varphi_1 > 0 \\ \Delta_1'' - \varphi_1 \gtreqless 0 \text{ secondochè } \Delta_2 \lesseqgtr \varphi_3 \end{cases} $$

$$ \Delta_2'' \geqq \Delta_2 > 0 \quad \text{"} \quad \begin{cases} \Delta_1' - \varphi_1 > 0 \\ \Delta_1'' - \varphi_1 > 0 \end{cases} $$

$$ \Delta_2 > {}^*\Delta_2' \quad \text{"} \quad \begin{cases} \Delta_1' - \varphi_1 > 0 \\ \Delta_1'' - \varphi_1 < 0. \end{cases} $$

Risulta dalla (11) che, pel valore assunto per K; se

$$\Delta_2 - \varphi_3 > 0$$
$$\Delta_1' - \varphi_1 + \Delta_2 - \varphi_3 > 0$$

si ha:

$$\Delta_1'' - \varphi_1 + \Delta_2 - \varphi_3 > 0,$$

e che allorquando:

$$\Delta_2 - \varphi_3 < 0$$
$$\Delta_1' - \varphi_1 + \Delta_2 - \varphi_3 < 0$$

è

$$\Delta_1'' - \varphi_1 + \Delta_2 - \varphi_3 > 0.$$

Ne segue che se si sceglieranno per Δ_2 valori tali che sia:

$$\Delta_2 - \varphi_3 \gtreqless 0$$

si avrà (3):

$$\varphi_2 > 0 \qquad \text{oppure} \qquad \varphi_2 < 0$$

secondochè nella (6) si assumerà il valore $\Delta_1' - \varphi_1$ od il valore $\Delta_1'' - \varphi_1$.

Qualunque sieno i valori di $\varphi_1 > 0$ e di $\varphi_3 > 0$ è adunque sempre possibile determinare il sistema delle tre lenti in guisa che, variando D ed x_3 secondo le ordinate di una retta, D diventi uguale ad un valore:

$$K > \varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3}$$

allorchè $x_3 = 0$.

4. — Supposta verificata la (5) e volendo che l'altra ascissa del segmento ad immagine reale sia $K - mr$, se r è lo spostamento concesso all'oculare che lo deve osservare, occorre avere:

$$x_3 = \frac{K}{m} \qquad \text{quando} \qquad D = 0.$$

Sarà per la (4):

$$\frac{K}{m} = \frac{\varphi_1\varphi_3\,[\Delta_2\varphi_1\,(\Delta_2 - \varphi_3) + \Delta_1\varphi_3\,(\Delta_1 - \varphi_1)]}{\varphi_1^2\,(\Delta_2 - \varphi_3)^2},$$

e poichè, essendo supposta verificata la (5), si ha:

$$K\varphi_3^2 (\Delta_1 - \varphi_1)^2 = \varphi_1 \varphi_3 [\Delta_2 \varphi_1 (\Delta_2 - \varphi_3) + \Delta_1 \varphi_3 (\Delta_1 - \varphi_1)]$$

riesce:

$$(12) \qquad m = \frac{\varphi_1^2 (\Delta_2 - \varphi_3)^2}{\varphi_3^2 (\Delta_1 - \varphi_1)^2} .$$

Dalla (12) scritta sotto la forma:

$$(13) \quad m\varphi_3^2 \Delta_1^2 - 2m\varphi_3^2 \varphi_1 \Delta_1 + m\varphi_3^2 \varphi_1^2 - \varphi_1^2 (\Delta_2 - \varphi_3)^2 = 0$$

si trae:

$$(14) \qquad \Delta_1 = \varphi_1 \pm \frac{\sqrt{m}\, \varphi_1 (\Delta_2 - \varphi_3)}{m \varphi_3} .$$

Le due radici $^*\Delta_1'$; $^*\Delta_1''$ definite colla (14) sono ambedue positive ed opposte di segno secondochè:

$$(15) \qquad \Delta_2^2 - 2\Delta_2 \varphi_3 + \varphi_3^2 - m\varphi_3^2 \lesseqgtr 0.$$

Da tale relazione, considerata come equazione di secondo grado in Δ_2, si ha:

$$(16) \qquad \Delta_2 = \varphi_3 \pm \varphi_3 \sqrt{m}$$

e perciò, indicata con $^{**}\Delta_2'$ la radice positiva della (16), poichè si debbono considerare i valori positivi di Δ_2, si dovrà concludere che:

$$^*\Delta_1' > 0 \qquad \text{e} \qquad ^*\Delta_1'' > 0$$

se:

$$^{**}\Delta_2' > \Delta_2 > 0$$

e che si avrà:

$$^*\Delta_1' > 0 \qquad \text{e} \qquad ^*\Delta_1'' < 0$$

quando:

$$\Delta_2 > {}^{**}\Delta_2'.$$

Paragonando $^{**}\Delta_2'$ a $^*\Delta_2'$ risulta:

$$^{**}\Delta_2' \gtrless {}^*\Delta_2'$$

secondochè:

$$(17) \qquad \varphi_3 \gtrless \frac{K}{m + \sqrt{m}}$$

e però:

a) quando:

$$\varphi_3 > \frac{K}{m + \sqrt{m}}$$

saranno positivi:

$$^*\Delta_1'; \ ^*\Delta_1'' \quad \text{con} \quad \Delta_1'; \ \Delta_1''$$

se:

$$^*\Delta_2' > \Delta_2 > \Delta_2' \quad \text{oppure se} \quad \Delta_2'' > \Delta_2$$

e si avranno positive $^*\Delta_1'$; Δ_1' e negative $^*\Delta_1''$; Δ_1'' quando sia:

$$\Delta_2 > {}^{**}\Delta_2'.$$

b) Se:

$$\varphi_3 = \frac{K}{m + \sqrt{m}}$$

$^*\Delta_1'$; $^*\Delta_1''$ sono ambedue positive o di segno opposto per gli stessi valori di Δ_2 che rendono positive o di segno opposto Δ_1'; Δ_1''.

c) Quando:

$$\varphi_3 < \frac{K}{m + \sqrt{m}}$$

$^*\Delta_1'$; $^*\Delta_1''$; Δ_1'; Δ_1'' saranno positive per

$$^{**}\Delta_2' > \Delta_2 > \Delta_2' \quad \text{o per} \quad \Delta_2'' \geqq \Delta_2$$

e si avranno $^*\Delta_1'$; Δ_1' positive e $^*\Delta_1''$; Δ_1'' negative per

$$\Delta_2 > {}^*\Delta_2'.$$

E così, qualunque sia il valore positivo dato a φ_3, si potrà sempre scegliere Δ_2 per modo che $^*\Delta_1'$; $^*\Delta_1''$ seguano, nel segno, le stesse vicende di Δ_1'; Δ_1''.

5. — Le radici Δ_1 determinate dalla (6) e dalla (14) sono fra loro uguali due a due per valori:

$$\Delta_2 = \varphi_3 \frac{K - \varphi_1 \pm \varphi_1 \sqrt{m}}{K - \varphi_1 - m\varphi_3}. \tag{18}$$

Si indichi con P, o con P' il numeratore della frazione che entra nella (18) e ciò secondochè si assume il segno positivo od il segno negativo e con Q il denominatore della frazione stessa.

L'esame della (18) porta a concludere:

1° Che P è sempre positivo pel valore assegnato a K:

e che
$$P' \gtrless 0 \quad \text{secondochè} \quad \varphi_1 \lessgtr \frac{K}{1+\sqrt{m}}$$
$$Q \gtrless 0 \quad \text{secondochè} \quad \varphi_1 \lessgtr K - m\varphi_3 .$$

2° Che scegliendo per $K - m\varphi_3$ i valori positivi, il che equivale ad assumere:

$$\varphi_3 < \frac{K}{m},$$

si ha:

$$\frac{K}{1+\sqrt{m}} \gtrless K - m\varphi_3 \qquad \text{secondochè} \qquad \varphi_3 \gtrless \frac{K}{m+\sqrt{m}} .$$

3° Che $\frac{P}{Q} > 1$ se $Q > 0$

e che $\frac{P'}{Q} \gtrless 1$ secondochè
$$\varphi_1 \lessgtr \sqrt{m}\,\varphi_3 \text{ se } P' > 0 \text{ e } Q > 0$$
$$\varphi_1 \gtrless \sqrt{m}\,\varphi_3 \text{ se } P' < 0 \text{ e } Q < 0.$$

4° Che allorquando:

$$\Delta_2 - \varphi_3 > 0$$

a
$$\varphi_3 \frac{P}{Q} \quad \text{corrispondono} \quad \Delta_1' = {}^*\Delta_1'$$
$$\varphi_3 \frac{P'}{Q} \qquad\qquad \Delta_1'' = {}^*\Delta_1''$$

e che se:

$$\Delta_2 - \varphi_3 < 0$$

a $\varphi_3 \frac{P'}{Q}$ possono corrispondere $\Delta_1'' = {}^*\Delta_1''$ e $\Delta_1' = {}^*\Delta_1''$.

Per distinguere, in tale secondo caso, quale sia l'eguaglianza utile, basta osservare che (14):

$$\frac{\sqrt{m}\,\varphi_1(\varphi_3-\Delta_2)}{m\varphi_3}+\Delta_2-\varphi_3 \lesseqgtr 0$$

secondochè:

$$\varphi_1 \lesseqgtr \sqrt{m}\,\varphi_3 .$$

E perciò quando:

$$0<\varphi_3\frac{P'}{Q}<1$$

sarà $\Delta_1' = {}^*\Delta_1''$ se $\varphi_1<\sqrt{m}\,\varphi_3$

sarà $\Delta_1'' = {}^*\Delta_1''$ se $\varphi_1>\sqrt{m}\,\varphi_3 .$

6. — Si supponga ora:

$$A)\ (19):\qquad \frac{K}{m}>\varphi_3>\frac{K}{m+\sqrt{m}}$$

deve essere (1):

$$\varphi_1+\frac{\varphi_1^2}{\varphi_3}<\varphi_3(m+\sqrt{m}) .$$

A soddisfare tale condizione occorre assumere:

$$\varphi_1<\sqrt{m}\,\varphi_3 .$$

Per tale valore risulta:

$$\varphi_1+m\varphi_3<\varphi_3(m+\sqrt{m}) .$$

Si osservi che sarà:

$$\varphi_1+\frac{\varphi_1^2}{\varphi_3}<K$$

se

$$\varphi_1<\frac{-\varphi_3+\sqrt{\varphi_3(\varphi_3+4K)}}{2} ,$$

e poichè è:

$$\frac{K}{1+\sqrt{m}}<\frac{-\varphi_3+\sqrt{\varphi_3(\varphi_3+4K)}}{2}<\sqrt{m}\,\varphi_3$$

si potrà assumere:

$$\varphi_1 \leqq \frac{K}{1+\sqrt{m}} \qquad \text{o} \qquad \frac{-\varphi_3+\sqrt{\varphi_3(\varphi_3+4K)}}{2} > \varphi_1 > \frac{K}{1+\sqrt{m}} .$$

a) Sia:

$$\varphi_1 < \frac{K}{1+\sqrt{m}} .$$

Per la (19) è (ff. 5):

$$\frac{K}{1+\sqrt{m}} > K - m\varphi_3$$

e quindi si potrà scegliere:

$$\varphi_1 < K - m\varphi_3$$

oppure:

$$\frac{K}{1+\sqrt{m}} > \varphi_1 > K - m\varphi_3 .$$

I valori $\frac{P}{Q}$ e $\frac{P'}{Q}$ saranno (ff. 5) ambedue positivi con $P' > 0$ e $Q > 0$ od ambedue negativi secondochè si darà a φ_1 il primo od il secondo dei valori ora accennati.

I valori positivi di $\frac{P}{Q}$ e di $\frac{P'}{Q}$, che soltanto si debbono considerare, sono ambedue maggiori della unità. — Le quantità $\varphi_3 \frac{P}{Q}$ e $\varphi_3 \frac{P'}{Q}$ hanno valore infinitamente grande quando:

$$K = \varphi_1 + m\varphi_3 ,$$

decrescono al crescere di K, ed allorchè:

$$K = \varphi_3 (m + \sqrt{m})$$

risultano:

$$\varphi_3 \frac{P}{Q} > \varphi_3 (1 + \sqrt{m}) \qquad \text{e} \qquad \varphi_3 \frac{P'}{Q} = \varphi_3 (1 + \sqrt{m}) .$$

Per tutti i valori di K definiti da:

$$\varphi_1 + m\varphi_3 < K < \varphi_3 (m + \sqrt{m})$$

i valori di Δ_2 dati dalla (18) riescono maggiori di $^{**}\Delta_2'$; quindi per calcolare colla (6) o colla (14) il valore di Δ_1 non si potrà usare che il valore $\Delta_2 = \varphi_3 \frac{P}{Q}$ tratto dalla (18) e sarà:

$$\Delta_1' = {}^{*}\Delta_1' \qquad \text{con} \qquad \varphi_2 > 0\,.$$

b) Il caso:

$$\varphi_1 = \frac{K}{1 + \sqrt{m}}$$

deve escludersi, perchè con simile valore risultano:

$$\frac{P}{Q} < 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{P'}{Q} = 0\,.$$

c) Sia:

$$\frac{-\varphi_3 + \sqrt{\varphi_3(\varphi_3 + 4K)}}{2} > \varphi_1 > \frac{K}{1 + \sqrt{m}}\,.$$

Perchè è:

$$\frac{K}{1 + \sqrt{m}} > K - m\varphi_3$$

si ha:

$$\frac{P}{Q} < 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{P'}{Q} < 1$$

con

$$P' < 0 \qquad \text{e} \qquad Q < 0\,.$$

Essendo:

$$\varphi_1(1 + \sqrt{m}) > \varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3}$$

si faccia decrescere K da $\varphi_1(1 + \sqrt{m})$ a $\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3}$ in Δ_2'' ed in $\varphi_3 \frac{P'}{Q}$.

Il valore di Δ_2'' cresce per tal modo da:

$$\frac{\varphi_3\sqrt{m} - \sqrt{\varphi_3\sqrt{m}\,[\varphi_3\sqrt{m} - \varphi_1]}}{2\sqrt{m}} \qquad \text{a} \qquad \frac{\varphi_3}{2}$$

mentre $\varphi_3 \frac{P'}{Q}$ varia da:

$$0 \qquad \text{a} \qquad \frac{\varphi_1\varphi_3}{\varphi_1 + \sqrt{m}\,\varphi_3}\,,$$

e poichè:

$$\frac{\varphi_1 \varphi_3}{\varphi_1 + \sqrt{m}\, \varphi_3} < \frac{\varphi_3}{2},$$

ne segue che per i valori di K compresi in quell'intervallo è:

$$\Delta_2'' > \varphi_3 \frac{P'}{Q}.$$

Si calcolerà Δ_1 in tal caso assumendo per Δ_2 il valore $\varphi_3 \frac{P'}{Q}$ dato dalla (18) e si otterrà:

$$\Delta_1' = {}^*\Delta_1'' \qquad \text{con} \qquad \varphi_2 > 0.$$

B) Sia:

$$\varphi_3 = \frac{K}{m + \sqrt{m}} : \tag{20}$$

dovendo essere:

$$\varphi_3 (m + \sqrt{m}) > \varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3}$$

occorre assumere:

$$\varphi_1 < \sqrt{m}\, \varphi_3 .$$

Essendo poi per la (20):

$$\sqrt{m}\, \varphi_3 = \frac{K}{1 + \sqrt{m}} = K - m\varphi_3$$

si avrà:

$$\varphi_1 < K - m\varphi_3$$

e perciò varranno le conclusioni del (ff. 6, *A*, *a*).

C) Quando:

$$\varphi_3 < \frac{K}{m + \sqrt{m}} \tag{21}$$

si potrà avere:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} \lesseqgtr \varphi_3 (m + \sqrt{m})$$

e in qualunque caso è:

$${}^*\Delta_2' > {}^{**}\Delta_2'.$$

Le condizioni:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} \leqq \varphi_3 (m + \sqrt{m}) \tag{22}$$

sono soddisfatte da:

$$\varphi_1 \leqq \sqrt{m}\, \varphi_3 .$$

Ma (21):

$$K - m\varphi_3 > \frac{K}{1 + \sqrt{m}} > \sqrt{m}\, \varphi_3 \geqq \varphi_1$$

e perciò:

$$\frac{P}{Q} > 1 \quad \text{e} \quad \frac{P'}{Q} \geqq 1 \quad \text{con} \quad P' > 0 \quad \text{e} \quad Q > 0 .$$

È da escludersi il valore $\frac{P'}{Q} = 1$ che porta ad avere $\Delta_2 - \varphi_3 = 0$; con tale limitazione si potranno assumere l'uno o l'altro od ambedue i valori dati dalla (18) per Δ_2, purchè sia (ff. 4):

$$^{**}\Delta_2' > \Delta_2 \qquad \text{oppure} \qquad \Delta_2 > {}^{*}\Delta_2' .$$

Perchè, invece, fosse:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} > \varphi_3 (m + \sqrt{m}) \tag{23}$$

dovrebbe essere:

$$\varphi_1 > \sqrt{m}\, \varphi_3 .$$

Nel tempo stesso si deve avere:

$$K > \varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} ,$$

e tale condizione vuole per φ_1 un valore minore di:

$$\varphi_1^* = \frac{-\varphi_3 + \sqrt{\varphi_3 (\varphi_3 + 4K)}}{2} .$$

Ma:

$$\varphi_1^* < \frac{K}{1 + \sqrt{m}}$$

perciò:

$$K - m\varphi_3 > \frac{K}{1 + \sqrt{m}} > \varphi_1$$

e si avranno:

$$\frac{P}{Q} > 1 ; \quad \frac{P'}{Q} < 1 \quad \text{con} \quad P' > 0 \quad \text{e} \quad Q > 0 .$$

Qui ancora si potranno assumere l'uno o l'altro od ambedue i valori dalla (18) per Δ_2, purchè:

$$^{**}\Delta_2' > \Delta_2 > \Delta_2', \quad \text{o} \quad \Delta_2'' > \Delta_2 , \quad \text{o} \quad \Delta_2 > {}^{*}\Delta_2'.$$

Se si va ad eliminare Δ_2 fra le relazioni che dànno il valore di $^*\Delta_2'$ e $\varphi_3 \frac{P}{Q}$, si ottiene, com'è facile verificare, un'equazione di terzo grado in K.

Tale equazione ammette per K una sola radice positiva e la sua esistenza è provata dalle considerazioni che seguono.

Le relazioni $^*\Delta_2'$ (10) e $\varphi_3 \frac{P}{Q}$ (18) ammettono un solo valore positivo per ciascun valore positivo dato a K.

Allorchè:

$$K = \varphi_3 (m + \sqrt{m})$$

si ha:

$$^*\Delta_2' = {}^{**}\Delta_2' \qquad \text{e} \qquad \varphi_3 \frac{P}{Q} > {}^*\Delta_2',$$

perchè uguale a:

$$\varphi_3 + \varphi_3 \sqrt{m} \, \frac{\varphi_3 \sqrt{m} + \varphi_1}{\varphi_3 \sqrt{m} - \varphi_1} .$$

Fatto crescere K, quando:

$$K = \varphi_3 (m + \sqrt{m}) + 2\varphi_1$$

si trova:

$$^*\Delta_2' > {}^{**}\Delta_2' \qquad \text{e} \qquad {}^{**}\Delta_2' = \varphi_3 \frac{P}{Q}$$

e per:

$$K = \infty$$

$$^*\Delta_2' = \infty \qquad \text{e} \qquad \varphi_3 \frac{P}{Q} = \varphi_3 .$$

Ne segue che fra i valori di K compresi fra:

$$\varphi_3 (m + \sqrt{m}) \qquad \text{e} \qquad \varphi_3 (m + \sqrt{m}) + 2\varphi_1$$

esiste un valore:

$$K = K_1$$

ed uno solo che determina valori uguali di Δ_2 nelle relazioni (10) e (18).

a) Si supponga:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} \leqq \varphi_3 (m + \sqrt{m}) .$$

In ambedue i casi per tutti i valori:

$$\varphi_3 (m + \sqrt{m}) < K < K_1$$

è:

$$\varphi_3 \frac{P}{Q} > {}^*\Delta_2',$$

e pei valori:

$$K > \varphi_3 (m + \sqrt{m}) + 2\varphi_1$$

si ha:

$$^{**}\Delta_2' > \varphi_3 \frac{P}{Q},$$

e perciò, per i valori accennati per K, $\varphi_3 \frac{P}{Q}$ potrà essere sostituito a Δ_2 nelle (6) e (14) per calcolare Δ_1.

Si avrà:

$$\Delta_1' = {}^*\Delta_1' \qquad \text{con} \qquad \varphi_2 > 0 .$$

Per tutti i valori:

$$K > \varphi_3 (m + \sqrt{m})$$

si ha poi:

$$^{**}\Delta_2' > \varphi_3 \frac{P'}{Q},$$

perchè pei valori crescenti di K e variabili da:

$$\varphi_3 (m + \sqrt{m}) \quad \text{a} \quad \infty$$

$$\varphi_3 \frac{P'}{Q} \qquad \text{decresce da} \qquad {}^{**}\Delta_2' \qquad \text{a} \qquad \varphi_3 .$$

Il valore $\varphi_3 \frac{P'}{Q}$ dedotto dalla (18) varrà in questo caso per calcolare Δ_1.

Si otterrà:

$$\Delta_1'' = {}^*\Delta_1'' \qquad \text{con} \qquad \varphi_2 < 0 .$$

b) Sia invece:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} > \varphi_3 (m + \sqrt{m}) .$$

Si osservi anzitutto che si avrà:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} \gtreqless \varphi_3 (m + \sqrt{m}) + 2\varphi_1 \tag{24}$$

per:

$$\varphi_1 \gtreqless \varphi_3 (1 + \sqrt{m}) ,$$

e siccome:

$$\varphi_3 (m + \sqrt{m}) < \varphi_3 (1 + \sqrt{m})^2$$

potrà essere (21):

$$\varphi_3 (1 + \sqrt{m}) \gtreqless \frac{K}{1 + \sqrt{m}} .$$

Quando sia:

$$\varphi_3 (1 + \sqrt{m}) \geqq \frac{K}{1 + \sqrt{m}} > \varphi_1$$

è:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} < \varphi_3 (m + \sqrt{m}) + 2\varphi_1 ,$$

e se:

$$\varphi_3 (1 + \sqrt{m}) < \frac{K}{1 + \sqrt{m}} ,$$

poichè:

$$\varphi_1 < \frac{K}{1 + \sqrt{m}} ,$$

potranno essere verificate la prima, la seconda o la terza delle condizioni (24) secondochè:

$$\varphi_1 \gtreqless \varphi_3 (1 + \sqrt{m}) .$$

Si supponga:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} < \varphi_3 (m + \sqrt{m}) + 2\varphi_1 . \tag{25}$$

Per valori di K crescenti da:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} \quad \text{a} \quad \varphi_3 (m + \sqrt{m}) + 2\varphi_1 \quad \text{ad} \quad \infty$$

$\varphi_3 \frac{P}{Q}$ assume valori decrescenti da:

$$\frac{\varphi_1 \varphi_3}{\varphi_1 - \sqrt{m}\, \varphi_3} \quad \text{a} \quad {}^{**}\Delta_2' \quad \text{a} \quad \varphi_3$$

mentre ${}^{*}\Delta_2'$, essendo uguale a $\varphi_1 + \varphi_3$ quando K assume il primo dei valori citati, si mantiene maggiore di ${}^{**}\Delta_2'$ ed assume valore infinitamente grande quando $K = \infty$.

Ora:

$$\frac{\varphi_1 \varphi_3}{\varphi_1 - \sqrt{m}\, \varphi_3} \gtreqless \varphi_1 + \varphi_3$$

secondochè:

$$\varphi_1 \lesseqgtr \varphi_1' \tag{26}$$

essendo:

$$\varphi_1' = \frac{\varphi_3 \sqrt{m} + \varphi_3 \sqrt{m + 4\sqrt{m}}}{2} .$$

Ma:

$$\varphi_1' < \varphi_3 (1 + \sqrt{m})$$

e perciò, colla (25), potranno essere verificate l'una, l'altra o la terza delle condizioni (26).

Quando:

$$\varphi_1 < \varphi_1'$$

esiste un valore ed uno solo:

$$K = K_1$$

compreso fra $\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3}$ e $\varphi_3 (m + \sqrt{m}) + 2\varphi_1$ tale da soddisfare l'equazione di terzo grado che si trova eliminando Δ_2 fra la (10) e la (18).

Se:

$$\varphi_1 \geqq \varphi_1'$$

più non esiste alcun valore di K, compreso fra quei limiti, che abbia simile proprietà.

Anche quando:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} \geqq \varphi_3 (m + \sqrt{m}) + 2\varphi_1$$

più non è utile il valore $K = K_1$ pel quale Δ_2 assume valori uguali nella (10) e nella (18).

Ammessa ora verificata la (25), allorchè:

$$\varphi_1 < \varphi_1'$$

per tutti i valori:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} < K < K_1$$

si ha:

$$\varphi_3 \frac{P}{Q} > {}^*\Delta_2'$$

e per gli altri valori di:

$$K > \varphi_3 (m + \sqrt{m}) + 2\varphi_1$$

è:

$$^{**}\Delta_2' > \varphi_3 \frac{P}{Q}$$

comunque sia:

$$\varphi_1 \lesseqgtr \varphi_1'.$$

Quando poi:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} \geqq \varphi_3 (m + \sqrt{m}) + 2\varphi_1$$

a ciascun valore:

$$K > \varphi_3 (m + \sqrt{m}) + 2\varphi_1$$

corrisponde:

$$^{**}\Delta_2' > \varphi_3 \frac{P}{Q}.$$

Pei valori di K, ora definiti, sarà $\varphi_3 \frac{P}{Q}$ che sostituito a Δ_2 nella (6) o nella (14) darà Δ_1.

Si otterrà in ogni caso:

$$\Delta_1' = {}^*\Delta_1' \qquad \text{con} \qquad \varphi_2 > 0 .$$

Nel caso considerato colla (23) si osservi inoltre che mentre:

$$K \quad \text{cresce da} \quad \varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} \quad \text{ad} \quad \infty ,$$

$$\varphi_3 \frac{P'}{Q} \quad \text{cresce da} \quad \frac{\varphi_1 \varphi_3}{\varphi_1 + \sqrt{m}\, \varphi_3} \quad \text{a} \quad \varphi_3$$

e che:

$$\Delta_2' \quad \text{pure cresce da} \quad \frac{\varphi_3}{2} \quad \text{a} \quad \varphi_3 .$$

Sicchè essendo:

$$\frac{\varphi_1 \varphi_3}{\varphi_1 + \sqrt{m}\, \varphi_3} > \frac{\varphi_3}{2}$$

nell'intervallo:

$$\varphi_1 + \frac{\varphi_1^2}{\varphi_3} < K < \infty$$

è:

$$\Delta_2' < \varphi_3 \frac{P'}{Q} ,$$

ed il valore $\varphi_3 \frac{P'}{Q}$ dedotto dalla (18) varrà ad ottenere Δ_1.

Si avrà:

$$\Delta_1'' = {}^*\Delta_1'' \qquad \text{e} \qquad \varphi_2 < 0 .$$

7. — L'ingrandimento costante G dei sistemi diottrici studiati e definiti colla relazione (4) è determinato da:

$$G = \pm \frac{\varphi_3 (\Delta_1 - \varphi_1)}{\varphi_1 (\Delta_2 - \varphi_3)}$$

e quindi per la (12) si avrà:

$$G = \pm \frac{1}{\sqrt{m}} .$$

Novara, Gennaio 1912.

Sui moduli d'una classe di superficie algebriche e sul teorema d'esistenza per le funzioni algebriche di due variabili.

Nota del Socio corrispondente FEDERIGO ENRIQUES
a Bologna.

---

1. Moduli d'una classe di curve di genere p. — I moduli di una classe di curve algebriche di genere p si possono determinare nei due modi che seguono:

1) *Mediante il teorema d'esistenza (di Riemann) per le funzioni algebriche d'una variabile.*

Presi sulla retta (o nel piano d'una variabile complessa) $2n+2p-2$ punti di diramazione, si può costruire (in diversi modi il cui numero è stato determinato dal sig. Hurwitz) una superficie di Riemann ad n fogli, a cui corrisponde una *curva* C_p di genere p con una g_n'. I $2n+2p-2$ punti di diramazione danno luogo a

$$2n+2p-5$$

birapporti indipendenti. Ma, supposto per semplicità $n>2p-2$, si hanno su una C_p ∞^p g_n^{n-p} e quindi

$$\infty^{2n-p-2}$$

g_n'. Perciò la costruzione anzidetta conduce a determinare

$$2n+2p-5-(2n-p-2)=3p-3$$

costanti che, se la C_p non possiede trasformazioni in sè, corrispondono a C_p birazionalmente distinte. Si hanno quindi, per $p>1$,

$$3p-3$$

moduli.

2) *Valutando la dimensione della serie continua delle curve piane di dato ordine con un dato numero di punti doppi.*

Si considerino le curve piane d'ordine n e genere p, aventi

$$\delta = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - p$$

punti doppi. La serie continua di queste determina sopra una di esse, C_n^p, una serie lineare *caratteristica* (nel senso di SEVERI), i cui gruppi vengono segati dalle curve infinitamente vicine a C_n^p. La detta serie è completa e non speciale equivalendo alla serie segata su C_n^p dalle curve aggiunte d'ordine n; la sua dimensione vale dunque

$$n^2 - 2\delta - p = 3n - 2 + p;$$

e pertanto la serie delle C_n^p ha la dimensione

$$3n - 1 + p.$$

Ma supposto per semplicità $n > 2p - 2$, ad una C_n^p appartengono ∞^p serie g_n^{n-p}, ognuna delle quali contiene

$$\infty^{3(n-p)-6}$$

$g_n{}^2$; e ciascuna di tali $g_n{}^2$ dà luogo a

$$\infty^8$$

curve piane C_n^p proiettivamente identiche. Se ne deduce che vi sono

$$3n - 1 + p - (p + 3(n-p) - 6 + 8) = 3p - 3$$

costanti che, se le curve C_n^p non possiedono trasformazioni in sè, corrispondono a curve birazionalmente distinte. Così di nuovo si ritrovano i $3p - 3$ *moduli* da cui dipende una classe di curve di genere $p > 1$.

E confrontando i resultati ottenuti per le due vie se ne trae anche una dimostrazione elementare del teorema d'esistenza almeno nel senso che " *esistono funzioni algebriche ad* n *rami, di genere* p, *aventi* 2n + 2p — 2 *punti di diramazione arbitrariamente assegnati* „.

Seguendo la via sopra indicata si può anche fornire una semplice dimostrazione algebrico-geometrica del fatto che: *Le curve di genere* p *formano una sola famiglia irriducibile, che (per* $p > 1$) *è composta di* ∞^{3p-3} *classi distinte.*

Si supponga che la proposizione sia dimostrata per un certo valore di p; si dimostrerà che essa sussiste per le curve di genere $p+1$. Siccome la proposizione si verifica subito per i primi valori di p (e già per $p=1$, salvo che vi sono $3p-2=1$ invece che $3p-3=0$ moduli), così essa sarà stabilita in generale.

Nell'ipotesi che abbiamo ammesso, le curve piane C_{2p}^p d'ordine $2p$ e genere p, formano una serie continua irriducibile Σ_p. Ora questa serie è contenuta in quella, Σ_{p+1}, delle curve piane, C_{2p}^{p+1}, d'ordine $2p$ e genere $p+1$, le quali hanno un punto doppio di meno. Se la nuova serie fosse riducibile, cioè composta di un certo numero >1 di serie distinte, in ciascuna di queste si avrebbero delle curve con un punto doppio di più, e però ci sarebbero diverse serie di C_{2p}^p, contrariamente all'ipotesi fatta.

Invero è facile riconoscere che due serie complete, distinte, di curve piane C_{2p}^{p+1} con $\delta = 2(p-1)^2 - 2$ punti doppi, non potrebbero aver comune la serie, Σ_p, delle C_{2p}^p con $\delta+1$ punti doppi. A tale scopo si osservi che partendo da una C_{2p}^p con $\delta+1$ punti doppi, e scegliendo uno di questi da riguardarsi come virtualmente inesistente, si determina *una* serie completa di C_{2p}^{p+1} a cui C_{2p}^p appartiene; ma due serie così costituite, in corrispondenza a due punti doppi diversi di C_{2p}^p, coincidono, perchè — facendo variare per continuità C_{2p}^p entro il sistema Σ_p — i due punti doppi suddetti si possono far coincidere in un tacnodo e quindi si possono scambiare fra loro.

Ne risulta stabilita la proposizione enunciata.

2. Moduli d'una classe di superficie. — Passo al problema dei moduli per le superficie, del quale problema già mi sono occupato in una Nota del 1908 (*).

In mancanza di un *teorema d'esistenza* per le funzioni algebriche di due variabili, è naturale di cercare di estendere il

(*) *Sui moduli delle superficie algebriche*, " Rendic. Accad. dei Lincei ", 6 gennaio 1908.

secondo fra i procedimenti indicati innanzi. Anzi quel procedimento non è che l'applicazione al caso delle curve del metodo che fui condotto ad immaginare per il calcolo dei moduli delle superficie, nella mia Nota citata.

L'uso di codesto metodo conduce al resultato che una classe di superficie di generi p_a, p_g, $p^{(1)}$ (non appartenente alla famiglia delle rigate) dipende da

$$M = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta$$

moduli; $\theta \geq 0$ ha il seguente significato: essendo $|C|$ un qualsiasi sistema lineare irriducibile, puro, ∞^3, sopra la superficie, vi sono in generale sopra una curva C_j, jacobiana d'una rete contenuta in $|C|$, dei punti neutri, formanti un gruppo G, che sono doppi per ∞' curve C del sistema ∞^3; ora si consideri il sistema completo $|3C + C'|$ che ha come punti base i punti di G; θ designa la sovrabbondanza di questo sistema.

Nel caso di superficie regolari di genere $p_a = p_g = p > 3$, a sistema canonico irriducibile, si ha

$$\theta = p + \theta'$$

con

$$\theta' \geq 0,$$

e però

$$M = 10p - 2p^{(1)} + 12 + \theta'.$$

Facendo l'ipotesi $\theta' = 0$ si ottiene così il numero dei moduli a cui il sig. Noether (*) fu condotto dall'applicazione delle formule di postulazione; sicchè viene dimostrato che codesto numero vale almeno come un limite inferiore.

3. Moduli dei piani multipli. — Ora *supponiamo* che si abbia un *teorema d'esistenza* per le funzioni algebriche di due variabili, il quale assegni le condizioni perchè una curva piana sia curva di diramazione d'un piano multiplo, n-plo. Da questa semplice ipotesi dedurremo di nuovo il calcolo dei moduli

(*) *Anzahl der Moduln einer Classe algebraischer Flächen*, " Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin ", 1888.

da cui dipende una classe di superficie di generi p_a, p_g, $p^{(1)}$; e il confronto col resultato già stabilito innanzi ci permetterà di trarne un' effettiva conclusione intorno allo stesso teorema di esistenza.

Poniamo dunque che una superficie F_n, d'ordine n, senza curve eccezionali, a sezioni piane, di genere π, formanti un sistema regolare $|C|$, venga proiettata sopra un piano n-plo con curva di diramazione K_{2m} d'ordine

$$2m = 2n + 2\pi - 2.$$

Aggiungiamo anzi l'ipotesi semplificativa che $|C|$ contenga il sistema canonico di F. La K_{2m} possiederà in generale δ nodi e h cuspidi, dove

$$\delta = \frac{1}{2}\left[(n + 4\pi + 12p_a - p^{(1)} + 9)^2 - 3n - 78\pi - 84p_a + p^{(1)} - 7\right]$$
$$h = 3n + 18\pi + 3p^{(1)} - 12p_a - 33 \text{ (*)}.$$

Il sistema $|C|$, di dimensione

$$r = p_a + n - \pi + 1,$$

sarà contenuto in una serie di $\infty^{p_g - p_a}$ sistemi lineari analoghi; in corrispondenza alle reti contenute in siffatti sistemi (ognuna delle quali può essere riferita al piano in ∞^8 proiettività), si otterranno

$$\infty^{3r+2+p_g-p_a}$$

piani multipli, aventi curve di diramazione d'ordine $2m$ con δ nodi e h cuspidi, e appartenenti ad uno stesso sistema continuo $\{K_{2m}\}$ colla K_{2m} suddetta.

Ora cerchiamo di valutare la dimensione del sistema continuo completo $\{K_{2m}\}$, formata dalle curve piane d'ordine $2m$ con δ nodi e h cuspidi, a cui appartiene K_{2m}. Perciò si dovrà considerare la serie caratteristica determinata su K_{2m} dalle curve infinitamente vicine di $\{K_{2m}\}$.

(*) Le espressioni di δ e h risultano da note formule di Zeuthen-Noether e Severi. Cfr. Severi, " Atti Accad. di Torino ", 15 giugno 1902.

Questa serie caratteristica (completa) è definita dalle curve d'ordine $2m$ aggiunte a K_{2m} e toccanti nelle h cuspidi le relative tangenti cuspidali di quella curva; il suo grado vale

$$3n + 6\pi + 12p_a - p^{(1)} + 8.$$

Il genere di K_{2m} essendo

$$x = p^{(1)} + 9\pi - 9\,,$$

la dimensione della suddetta serie sarà

$$3n - 3\pi + 12p_a - 2p^{(1)} + 16 + \omega\,,$$

designando ω l'indice di specialità della serie stessa; e la dimensione del sistema $\}K_{2m}\{$ sarà

$$3n - 3\pi + 12p_a - 2p^{(1)} + 17 + \omega.$$

Se ogni curva del sistema, soddisfacente ad y condizioni, è curva di diramazione di un piano n-plo, si trova così una famiglia di superficie analoghe ad F, di dimensione

$$3n - 3\pi + 12p_a - 2p^{(1)} + 17 + \omega - y\,;$$

tra queste ci sono

$$3n - 3\pi + 12p_a - 2p^{(1)} + 17 + \omega - y - (3r + 2 + p_g - p_a) =$$
$$= 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \omega - y$$

superficie birazionalmente distinte.

Cerchiamo di valutare ω! A questo scopo riflettiamo che alla curva K_{2m} corrisponde su F la jacobiana C_j di una rete di sezioni piane (appartenente al sistema $|2C + C'|$), la qual curva C_j è segata su F da una superficie polare; le superficie polari analoghe passanti per i punti cuspidali (*pinch-points*) di F, che sono i punti neutri di $|C|$ su C_j, segano su C_j una serie che viene proiettata in quella segata su K_{2m} dalle curve polari di ordine $2m - 1$; e perciò la serie segata su K_{2m} dalle curve aggiunte d'ordine $2m$ è la proiezione di quella segata in C_j dalle

curve di $|3C + C'|$ passanti pel gruppo G dei punti neutri considerati. — Siccome (nelle ipotesi fatte) $|3C + C'|$ sega su C_j una serie non speciale, si deduce che ω equivale alla sovrabbondanza θ del sistema delle curve di $|3C + C'|$ passanti per i punti di G.

Dunque il numero dei moduli della classe di superficie, calcolato per questa via, risulta

$$M = 10p_a - p_g - 2p^{(1)} + 12 + \theta - y.$$

4. Intorno ad un teorema d'esistenza. — Confrontiamo le due espressioni ottenute per il numero M nei n[i] 2, 3; si deduce che

$$y = 0.$$

E pertanto si conclude che: *Se la curva piana* K_{2m} *d'ordine* 2m, *con* $\mathfrak{d}$ *nodi e* h *cuspidi, è curva di diramazione di un piano* n*-plo ottenuto per proiezione di una superficie* F *d'ordine* n (sotto le ipotesi semplificative di natura non essenziale adottate riguardo al sistema delle sezioni piane di F), *tutte le curve piane dello stesso ordine* 2m, *fornite parimente di* $\mathfrak{d}$ *nodi e* h *cuspidi, e appartenenti con* K_{2m} *ad uno stesso sistema continuo, sono pure curve di diramazione di analoghi piani* n*-pli.*

Questa conclusione suggerisce l'idea che valga un *teorema d'esistenza* enunciabile come segue: " le condizioni perchè una curva piana di un dato ordine sia curva di diramazione d'un piano n-plo (con dati caratteri p_a, p_g, $p^{(1)}$ . . .) consistono in ciò che la curva stessa possieda un certo numero di nodi e un certo numero di cuspidi ".

Ad una conclusione siffatta si sarebbe condotti dall'ipotesi che " le curve piane di dato ordine con un dato numero di nodi e di cuspidi formino in generale *una sola* serie continua irriducibile ". Ma approfondendo lo studio della questione si scopre invece che la totalità delle curve piane soddisfacenti alle condizioni indicate si spezza in generale *in più serie continue.* Ciò risulta già indirettamente dall'osservare che: *Le superficie con dati caratteri* p_a, p_g, $p^{(1)}$ *danno luogo in generale a diverse famiglie irriducibili, distinte fra loro per diversi caratteri numerici.*

Infatti si considerino le curve gobbe di dato ordine n e genere p; secondo HALPHEN e NOETHER esse si distribuiscono in generale in diverse famiglie irriducibili C, K ... Ora si può determinare un ordine m così elevato che esistano superficie regolari d'ordine m passanti doppiamente per C, K ... — Queste superficie avranno gli stessi caratteri $p_a = p_g$, $p^{(1)}$, ma apparterranno a famiglie distinte.

5. Conclusione. — Quale conclusione si può trarre dunque dalle considerazioni che precedono?

Affinchè una curva piana di dato ordine $f(xy) = 0$ sia curva di diramazione d'un piano multiplo n-plo con dati caratteri, occorrerà in generale non soltanto che essa possieda un dato numero di nodi e di cuspidi, ma anche che soddisfi a *certe condizioni di natura aritmetica* che non diminuiscono il numero dei moduli della classe di superficie corrispondente.

Questa conclusione pone in luce il carattere del *teorema d'esistenza* per le funzioni algebriche di due variabili. A prima vista la ricerca d'un teorema siffatto apparirebbe molto difficile. Ma un esame diretto della questione mostra il modo di superare la difficoltà *mediante l'analisi del gruppo di monodromia della funzione algebrica* y (x). Per questa via si è condotti a stabilire effettivamente il *teorema d'esistenza* di cui sopra si è discorso, come mostrerò in un altro lavoro.

Le Geometrie projettive nei campi di numeri duali.

Nota I di CORRADO SEGRE.

Il sig. P. Predella ha pubblicato recentemente un *Saggio di Geometria non-Archimedea* [1], in cui pone le basi di una geometria, avente per elementi, o *punti in nuovo senso*, le *omografie paraboliche* (cioè a punti uniti coincidenti) delle ordinarie rette punteggiate. Le lunghezze (e quindi anche gli angoli, ecc.) sono misurate, in questo campo, da numeri del tipo $a + b\eta$, ove η è una nuova unità tale che $\eta^2 = 0$ [2].

Si può confrontare l'ingegnosa idea del Predella con quella che era stata svolta dallo Staudt per i *punti imaginari*. Questi sono, secondo Staudt, *involuzioni* di punti reali sopra rette (con determinati *versi*); ed i numeri a cui essi danno origine (*Würfe*, ecc.) sono del tipo $a + bi$, con $i^2 = -1$. Questo concetto è stato pro-

(1) “ Giornale di matematiche di Battaglini „, vol. 49, 1911, pag. 281-299; seguíto da una “ Nota seconda „, con lo stesso titolo, pubblicata in opuscolo separato, a Torino (Tip.ª Bona, Ottobre 1911). L'Autore mi avverte che anche questa 2ª Nota verrà poi stampata nel “ Giornale di matematiche „.

(2) I numeri complessi di questa specie s'erano già adoperati ripetutamente, per enti geometrici diversi da quelli del Predella, e cioè in Geometria delle *rette*, e delle *dinami* o *viti*. Primo di tutti, in ordine cronologico, pare sia stato un lavoro di A. P. Kotjelnikoff (1895), seguìto da uno di D. Seiliger (1897) (lavori in lingua russa, che io conosco solo per le recensioni del “ Jahrbuch der Fortschritte der Mathematik „). Viene poi subito: J. Petersen (ora Hjelmslev), *Nouveau principe pour études de géométrie des droites*, “ Oversigt over k. Danske Videnskabernes Selskab „, 1898, pag. 283-344. Ma specialmente van citate le ricerche di E. Study, svoltesi indipendentemente da quelle, e in particolare l'opera del più alto interesse, *Geometrie der Dynamen* (Teubner 1903). Ritornerò, alla fine di questo scritto (n. 46), sul contenuto di quel libro, non che di altri lavori derivati da quelli dello Study. Solo conviene che sia fatta fin da ora la citazione seguente di uno di essi: J. Grünwald, *Ueber duale Zahlen und ihre Anwendung in der Geometrie*, “ Monatshefte für Mathematik und Physik „, 17. Jahrgang, 1906, pag. 81-136.

seguito, con l'introduzione di *punti bicomplessi*, rappresentati da involuzioni rettilinee fra punti complessi, ecc. ([3]).

Tale confronto porta a ricercare se le altre sorta di projettività rettilinee possano dar luogo a geometrie corrispondenti a sistemi più generali di numeri complessi.

Premesse sui numeri duali ([4]).

1. D'or innanzi, quando si parli di numeri o quantità, senza aggiungere alcun qualificativo, s'intenderà che siano *numeri complessi ordinari* $(a + bi)$; e similmente più innanzi per i punti, rette, ecc. (Ma potremmo invece convenire che si restringano le considerazioni ai *numeri reali*, e così ai *punti reali*, ecc. : quasi tutto ciò che esporremo varrebbe ancora, con lievi modificazioni).

Diciamo *numeri duali* un sistema di numeri complessi $a + b\epsilon$, a due distinte unità 1, ϵ, nel quale la moltiplicazione sia commutativa, e si abbia:

$$\epsilon^2 = g\epsilon + h, \tag{1}$$

ove g, h son due quantità *fisse* ([5]). Ne deriva che, ad esempio:

$$(a + b\epsilon)(x + y\epsilon) = ax + hby + (bx + ay + gby)\,\epsilon. \tag{2}$$

([3]) C. Segre, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici*, " Mathematische Annalen „, Bd. 40, 1892, pag. 413-467.

([4]) Queste premesse son cose ben note; e solo si metton qui per comodità del lettore, e per i riferimenti che ad esse saran da fare in seguito. — Per la teoria dei numeri complessi a più unità veggansi, ad esempio, le citazioni contenute a pag. 455 e segu.[1] della Memoria ([3]), e l'articolo di E. Study, *Theorie der gemeinen und höheren complexen Grössen*, IA4, a pag. 147-183 del 1° vol. della *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (1898-1904).

([5]) In questo significato generale è stata introdotta la denominazione " *numeri duali* „ dal sig. Study, ad es.° a pag. 122 del t. 11 (1902) del " Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung „. In qualcuno dei lavori posteriori è usata quella locuzione in senso più ristretto, cioè pel caso che la (1) si riduca a $\epsilon^2 = 0$.

Nel seguito avremo cura di usare, in generale, le lettere latine solo per indicare i numeri e gli enti geometrici *ordinari*, mentre per quelli *duali* si useranno lettere greche.

S'intende che alla considerazione dei numeri duali $a + b\epsilon$ si potrebbe sostituire sempre quella delle *coppie* di numeri ordinari (a, b); sicchè la legge di moltiplicazione (2) si potrebbe trasformare in una definizione del prodotto di due coppie (a, b), (x, y); ecc.

2. Siano e_1, e_2 le due quantità (ordinarie) radici dell'equazione (1), nella quale per un istante si riguardasse ϵ come quantità ordinaria. Varranno le seguenti relazioni, che scriviamo distesamente, perchè ci occorreranno:

$$e^2 - ge - h = 0 \qquad (e = e_1, e_2) \tag{3}$$

$$e_1 + e_2 = g, \qquad e_1 e_2 = -h \tag{4}$$

$$e_1 = \frac{g + \sqrt{\Delta}}{2}, \qquad e_2 = \frac{g - \sqrt{\Delta}}{2}, \tag{5}$$

ove si pone

$$\Delta = g^2 + 4h, \tag{6}$$

e si fisserà il significato di $\sqrt{\Delta}$.

Chiamiamo *parabolico* il sistema di numeri duali, quando $\Delta = 0$, ossia $e_1 = e_2$. (Se g ed h son reali, e reali le quantità che si considerano come ordinarie, si potrebbe chiamare *ellittico* il sistema se $\Delta < 0$, *iperbolico* se $\Delta > 0$).

La (1) si può scrivere così:

$$(\epsilon - e_1)(\epsilon - e_2) = 0. \tag{7}$$

Ma di qui non si penserà a dedurre che ϵ è uguale ad e_1, o e_2: poichè ϵ è un simbolo che non ha significato di quantità ordinaria. Così la (7) ci presenta un prodotto di numeri duali, che è nullo senza che sia nullo nessuno dei due fattori.

Più in generale, se vogliamo che si annulli il prodotto dei due numeri duali $a + b\epsilon$, $x + y\epsilon$, senza che alcuno di questi sia nullo, vale a dire, applicando la (2), se

$$\begin{cases} ax + hby = 0 \\ bx + (a + gb)y = 0, \end{cases} \tag{8}$$

senza che x ed y siano entrambe uguali a zero, dovrà essere

$$a^2 + gab - hb^2 = 0,$$

ossia

$$(a + be_1)(a + be_2) = 0.$$

Se è $a + be_1 = 0$, tenendo conto che a e b non sono ambedue nulle, dalle (8) si trae: $x + ye_2 = 0$; e così se invece $a + be_2 = 0$ si ottiene $x + ye_1 = 0$. La relazione $a + be_1 = 0$ equivale a: $a + b\epsilon = b(\epsilon - e_1)$; e analogamente per le altre. Concludiamo: *affinchè il prodotto di due numeri duali sia nullo, occorre e basta che uno dei fattori sia il prodotto di una quantità per* $\epsilon - e_1$; *e l'altro il prodotto di una quantità per* $\epsilon - e_2$.

Diciamo *nullifici, di 1ª e 2ª schiera*, risp. quei numeri duali, del tipo $b(\epsilon - e_1)$, $b(\epsilon - e_2)$, qualunque sia la quantità b (incluso lo zero): ossia numeri duali che danno un valor nullo, quando il simbolo ϵ che compare in essi si sostituisca con e_1, oppure con e_2.

Nel caso dei numeri duali *parabolici* le due schiere di nullifici coincidono. Allora il quadrato di un nullifico è sempre zero.

3. La *divisione* è possibile nel campo dei numeri duali, e dà un risultato ben determinato, solo se il divisore $a + b\epsilon$ non è un nullifico. Infatti, se il dividendo s'indica con $c + d\epsilon$, si avranno le equazioni (8), nei cui secondi membri al posto di 0 stanno c, d; e si dovran ricavare x, y. La cosa è possibile se il determinante dei coefficienti di x, y non si annulla: il che viene appunto a dire che $a + b\epsilon$ non è nullifico. Se invece fosse tale, le suddette equazioni non avrebbero in generale soluzioni; si trova subito che, affinchè ne abbiano (e allora saranno infinite) dev'essere il dividendo $c + d\epsilon$ un nullifico della stessa schiera di $a + b\epsilon$.

4. Si può fare un *cambiamento di unità* nel dato sistema di numeri duali, introducendo al posto di ϵ come nuova unità

$$\zeta = m + n\epsilon \qquad (9) \qquad (\text{ove } n \neq 0).$$

La (1) con questa sostituzione diventa

$$(\zeta - m)^2 = gn(\zeta - m) + hn^2,$$

ossia

$$\zeta^2 = G\zeta + H, \tag{10}$$

ove

$$\begin{cases} G = 2m + gn \\ H = -m^2 - gmn + hn^2. \end{cases} \tag{11}$$

Queste formole ci serviranno più tardi.

Ad esempio, se siamo in un campo di numeri duali *parabolici*, si può sostituire ad ϵ il nullifico $\eta = \epsilon - e_1$, sicchè (v. la fine del n. 2) sarà

$$\eta^2 = 0. \tag{12}$$

La (1) viene così semplificata nella (12).

5. Talvolta converrà anche *cambiare le due unità* 1, ϵ, esprimendole come forme lineari di due nuove.

Se il sistema non è parabolico, si posson prendere come nuove unità due nullifici di schiere diverse, sicchè poi ogni numero duale risulterà come somma di due tali nullifici. È opportuno scegliere in ogni schiera come unità quel nullifico che coincide col proprio quadrato. Il quadrato del nullifico $b(\epsilon - e_1)$ è, applicando la (7),

$$b^2(\epsilon - e_1)^2 = b^2[(\epsilon - e_1)^2 - (\epsilon - e_1)(\epsilon - e_2)] = b^2(e_2 - e_1)(\epsilon - e_1)$$

e quindi coincide con $b(\epsilon - e_1)$ se si ha $b(e_2 - e_1) = 1$, ossia, per le (5), $b = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}$. Così nella 1ª schiera il nullifico che uguaglia il suo quadrato è

$$\eta_1 = \frac{e_1 - \epsilon}{\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{2} + \frac{g - 2\epsilon}{2\sqrt{\Delta}}. \tag{13}$$

Similmente quello della 2ª schiera è

$$\eta_2 = \frac{e_2 - \epsilon}{-\sqrt{\Delta}} = \frac{1}{2} - \frac{g - 2\epsilon}{2\sqrt{\Delta}}. \tag{13'}$$

Queste nuove unità η_1, η_2 verificano dunque le relazioni

$$\eta_1^2 = \eta_1, \quad \eta_2^2 = \eta_2, \quad \eta_1\eta_2 = 0; \tag{14}$$

e con esse si esprimono le primitive unità 1 e ϵ nel seguente modo:

$$(15) \qquad \begin{cases} 1 = \eta_1 + \eta_2 \\ \epsilon = e_2\eta_1 + e_1\eta_2 . \end{cases}$$

I numeri duali $a + b\epsilon$ si rappresenteranno ora con $a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2$, ove

$$a_1 = a + be_2 , \quad a_2 = a + be_1 :$$

cioè a_1, a_2 sono i numeri ordinari che si deducono dal numero duale dato $a + b\epsilon$, sostituendo ad ϵ risp. e_2 ed e_1.

Basandosi sulle relazioni (14) si dimostra subito che, se f è il simbolo di una funzione razionale (i cui coefficienti son numeri ordinari), si ha in generale:

$$f(a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2 , \ b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2 , \dots) =$$
$$= f(a_1 , b_1 \dots). \eta_1 + f(a_2 , b_2 , \dots). \eta_2 .$$

6. In un sistema qualunque di numeri duali diciamo *coniugato* di $a + b\epsilon$ il numero duale $(a + gb) - b\epsilon$.

Si vede subito che la relazione tra due numeri duali coniugati è reciproca. Se poi si fa il cambiamento d'unità (9), basta applicare la 1ª delle (11) per verificare che il coniugio definito in base all' unità ϵ equivale al coniugio relativo all'unità ζ.

Un numero duale $a + b\epsilon$ coincide col coniugato quando $b = 0$, cioè quando si riduce ad un numero ordinario.

Il coniugato di ϵ è $g - \epsilon$.

La somma, il prodotto, ... di due o più quantità duali hanno per coniugate la somma, il prodotto, ... delle coniugate di quelle.

Formando il prodotto di un numero duale $a + b\epsilon$ pel suo coniugato si ha:

$$(a + b\epsilon)(a + gb - b\epsilon) = a^2 + gab - hb^2 = (a + be_1)(a + be_2),$$

quantità ordinaria, che può chiamarsi *norma* di $a + b\epsilon$, e s'annulla (n. 2) quando $a + b\epsilon$ è un nullifico.

Dalla definizione dei nullifici si trae che il coniugato di un

nullifico è ancora un nullifico. Se il campo non è parabolico, i nullifici di una schiera han per coniugati quelli dell'altra. Così sono coniugati η_1, η_2 (n. 5).

Ne segue che, se rappresentiamo un numero duale con $a_1 \eta_1 + a_2 \eta_2$ (n. 5), il suo coniugato sarà $a_2 \eta_1 + a_1 \eta_2$. Ossia, se in base alle unità η_1, η_2 riguardiamo i numeri duali come *coppie* di numeri ordinari (a_1, a_2), son coniugate due coppie *invertite*, come (a_1, a_2) e (a_2, a_1).

I punti nel campo duale.

7. Diciamo *punto duale* l' insieme dei valori di 4 numeri duali

$$\xi_i = x_i + y_i \epsilon, \qquad (i = 1, \ldots 4) \tag{16}$$

quando questi non siano nullifici di una stessa schiera, e si considerino come equivalenti ad essi i valori che si deducono moltiplicandoli tutti per uno stesso numero duale, che non sia un nullifico. Le ξ_i si diranno *coordinate omogenee* del punto, e questo s'indicherà pure con ξ, o con $x + y\epsilon$. (Occorrendo, si considereranno come *coordinate non omogenee* i rapporti di tre delle ξ_i alla rimanente, supposto che questa non sia un nullifico).

Per ottenere una rappresentazione geometrica di questo ente, interpretiamo le x_i, y_i come coordinate omogenee di *punti ordinari* (complessi: cfr. n. 1) x, y in uno stesso sistema di riferimento; e vediamo come variano questi punti se alteriamo le ξ_i moltiplicandole per uno stesso fattore $\rho = a + b\epsilon$. Diventeranno x', y', se

$$(a + b\epsilon)(x_i + y_i \epsilon) = x_i' + y_i' \epsilon. \tag{17}$$

Applicando la (2), ed omettendo l'indice i nelle coordinate omogenee dei punti ([6]), avremo

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= ax + hby \\ y' &= bx + (a + gb)y. \end{aligned} \right. \tag{18}$$

([6]) Intenderemo cioè d'or innanzi che una relazione lineare omogenea fra simboli, che han significato di punti, stia per indicare le 4 relazioni che si deducono da essa, scrivendo successivamente in luogo di quei simboli le coordinate $1^a, \ldots 4^a$ dei punti.

Se i punti x, y coincidono, cioè $y_i = mx_i$, coincideranno con essi anche i punti x', y'. Le ξ_i sono uguali alle x_i moltiplicate per uno stesso numero duale non nullifico. Diciamo che il punto duale ξ *si riduce allora ad un punto ordinario* x.

8. Siano invece x, y due punti distinti. Le (18) provano che, al variar del fattore duale $\rho = a + b\epsilon$, i punti x', y' variano in generale sulla retta che unisce x, y. Introducendo per i punti di questa la coordinata projettiva non omogenea w corrispondente alla rappresentazione dei punti stessi con $x + wy$, indichiamo con w, w' i valori di quel parametro che spettano ad x', y'. Le (18), supposto $ab \neq 0$, danno

$$w = \frac{hb}{a}, \quad w' = \frac{a}{b} + g,$$

donde

$$ww' = gw + h. \tag{19}$$

Dunque sulla retta xy i due punti x', y', tali che il punto duale $x' + y'\epsilon$ coincida col punto duale $x + y\epsilon$, variano come punti omologhi di una omografia, o projettività, ben determinata, avente per equazione la (19). Quest'omografia ha per discriminante $-h$; essa non sarà degenere se, *come supporremo d'or innanzi, salvo esplicita ipotesi contraria*, si ha

$$h \neq 0. \tag{20}$$

Ponendo nella (19) $w' = w$, e confrontando colla (3), si vede che i punti uniti della projettività sono

$$z = x + e_1 y, \quad t = x + e_2 y. \tag{21}$$

Li diremo risp. *1° e 2° punto unito*. Essi si ottengono dal dato punto duale ξ (16) sostituendovi il simbolo ϵ risp. con e_1, e_2. Coincidono, cioè la projettività è *parabolica*, se è parabolico il sistema di numeri duali, ossia se $\Delta = 0$.

Il *birapporto dell'omografia*, vale a dire il birapporto k del 1° e del 2° punto unito coi due punti omologhi x e y, o con altri due punti omologhi qualunque x' e y', vale $k = \frac{e_1}{e_2}$. Non muta dunque, se si cambia il punto duale ξ; dipende solo dal sistema

di numeri duali, ossia dalle costanti g, h. Esso è dato (col suo reciproco) dall'equazione in k

$$h(k+1)^2 + g^2 k = 0. \tag{22}$$

In luogo del birapporto si può considerare l'invariante razionale $I = \frac{g^2}{h}$ (7).

9. Viceversa, sia data su una retta un'omografia di birapporto $k = e_1 : e_2$, od invariante $I = g^2 : h$. Si potrà sempre trovare, nel nostro campo di numeri duali, un punto duale che la rappresenti. In fatti fissiamo due punti omologhi distinti x, y di quell'omografia, e rappresentiamo con $x' = x + wy$, $y' = x + w'y$ due punti omologhi variabili. L'equazione della corrispondenza sarà della forma

$$ww' = g_1 w + h_1, \tag{19'}$$

ove, in causa dell'ipotesi fatta sul birapporto od invariante,

$$\frac{g^2_1}{h_1} = \frac{g^2}{h}.$$

Quindi, se le y_i moltiplicate per la costante $g_1 : g$ s'indicano di nuovo con y_i, e così pure i parametri w, w' divisi per la stessa costante, la (19′) si trasformerà nella (19); la quale così rappresenterà la projettività data, essendo sempre omologhi due punti come $x + wy$, $x + w'y$. Ora appunto la projettività (19) si era ottenuta dal punto duale $x + y\epsilon$.

Concludiamo: *I punti duali, che non si riducono a punti ordinari, son rappresentati geometricamente dalle omografie, col birapporto fisso* k, *fra i punti ordinari delle varie rette dello spazio.*

Così le *involuzioni* rettilinee si hanno dalla (19) se $g = 0$: d'accordo con la (22) che dà allora $k = -1$. *Le involuzioni ret-*

(7) Per una projettività qualunque del campo binario, rappresentata così:

$$a_0 ww' + a_1 w + a_2 w' + a_3 = 0,$$

è invariante assoluto, ad esempio, l'espressione

$$I = \frac{(a_1 - a_2)^2}{a_1 a_2 - a_0 a_3}.$$

tilinee son rappresentate dai punti duali di un sistema di numeri duali pei quali

$$\epsilon^2 = h,$$

con $h \neq 0$. Si può prendere, per esempio, $h = -1$, oppure $h = +1$.

Le omografie rettilinee paraboliche si rappresentano mediante un sistema di numeri duali parabolici, cioè con

$$(\epsilon - l)^2 = 0,$$

ove $l \neq 0$.

10. *La rappresentazione esposta dei punti duali mediante projettività rettilinee dipende essenzialmente dalla unità* ϵ *che si pone a base del sistema di numeri duali.* Se si cambia quell'unità (n. 4), muteranno in generale le omografie corrispondenti ai vari punti duali.

Invero introduciamo, al posto di ϵ, l'unità ζ data dalla (9). Con quella sostituzione verrà

$$x_i + y_i \epsilon = X_i + Y_i \zeta \tag{23}$$

(le X_i, Y_i essendo quantità ordinarie). E poichè queste relazioni derivano unicamente dall'essere i simboli ϵ e ζ legati dalla (9), indipendentemente da ogni significato che a loro si attribuisca, avremo pure che la sostituzione tra u, w

$$u = m + nw, \tag{24}$$

avente gli stessi coefficienti che la (9), produrrà:

$$x_i + wy_i = X_i + uY_i. \tag{25}$$

Così il cambiamento (9) dell'unità duale si riflette, per i punti ordinari della nostra retta, su cui stanno i punti x, y, X, Y, nel cambiamento del primitivo parametro w (mediante cui i punti si rappresentano con $x + wy$) nel nuovo u, dato da (24) (mediante il quale i punti stessi si rappresentano con $X + uY$).

Coi nuovi parametri l'omografia analoga a (19) sarà:

$$uu' = Gu + H, \tag{26}$$

ove G, H, quantità analoghe a g, h, sono espresse dalle (11). Sostituendo dunque nella (26) queste espressioni, ed anche quelle di u, u' in funzione dei primitivi parametri w, w' date dalla (24), quell'omografia diventa:

$$(m+nw)(m+nw')-(2m+gn)(m+nw)+m^2+gmn-hn^2=0,$$

ossia, dividendo per n:

$$n(ww'-gw-h)+m(w'-w)=0. \tag{27}$$

È questa la projettività che si ottiene sulla retta, come imagine del punto duale ξ che ha per coordinate le (23), quando si ponga a fondamento, anzi che ϵ, come ai n[i] 7-9, l'unità duale $\zeta=m+n\epsilon$. Si vede che: *al mutar dell'unità ζ l'omografia rappresentante di un dato punto duale varia in un fascio di omografie dotate degli stessi punti uniti*: poichè nel fascio, che si ha dalla (27) variando $m:n$, sta l'*identità* $w'-w=0$.

11. Se si esclude il caso *parabolico*, vale a dire la coincidenza dei due punti uniti, risulta che si potrà, a nostro arbitrio, rappresentare i punti duali colle projettività che hanno un dato invariante, o con quelle che ne hanno un altro. Sarà solo questione di scegliere la unità duale, entro al dato campo di numeri duali ([8]). Così, se si prende $2m+gn=0$, ossia ad esempio $\zeta=2\epsilon-g$, si ottiene l'*involuzione*.

Solo i punti uniti risultan fissati, indipendentemente dall'unità duale. Essi erano i punti z e t, dati dalle (21). Escludendo ancora il caso parabolico, le (15) daranno subito:

$$x+y\epsilon=t\eta_1+z\eta_2. \tag{28}$$

Rappresentando in questo modo il punto duale, cioè per mezzo

([8]) Questo fatto, a primo aspetto un po' strano, che la rappresentazione con projettività del nostro punto duale non dipenda solo da questo ente, cioè dalle sue coordinate, ma anche dall'unità duale con cui queste coordinate vengono espresse, si può confrontare coll'altro fatto che l'ordinario punto analitico, cioè l'insieme (per esempio) di 3 numeri, quando questi si assumano come coordinate cartesiane, viene ad avere per imagine un punto geometrico oppure un altro, a seconda dell'unità di misura che si sceglie per le lunghezze.

delle due unità η_1, η_2 in luogo di 1, ϵ (n. 5), non vi è più da rilevare una determinata omografia del fascio, e invece restan messi in evidenza i due punti uniti. E si noti che, indicando con c, d due costanti qualunque non nulle, il punto duale rappresentato da $ct\eta_1 + dz\eta_2$ sarà sempre lo stesso che quel $t\eta_1 + z\eta_2$: si ottengono in fatti le coordinate di quello dalle coordinate di questo, moltiplicandole pel fattore $c\eta_1 + d\eta_2$.

Da questo punto di vista i punti duali non parabolici non sono altro che le coppie di punti ordinari (z, t), *presi in un determinato ordine.*

Invece che *1° e 2° punto unito dell'omografia* (n. 8), diremo z e t rispettivamente *1° e 2° nucleo del punto duale* [9]. —

Se il campo di numeri duali è parabolico, i due nuclei di ogni punto duale coincidono. Allora il concetto del punto duale, indipendente dall'unità duale che si pone a base, si ridurrebbe a quello di *un punto e una retta ordinari incidenti*: la retta *sostegno* del punto duale, ed il *nucleo* di questo. Mentre, nel caso non parabolico, il concetto del punto duale equivale indifferentemente a quello di projettività avente un dato invariante, oppure di coppia ordinata di punti ordinari, nel campo parabolico non vi è più un'analoga equivalenza. I punti duali, secondo la nostra primitiva definizione, sono sempre ∞^6, sia il campo parabolico o no; laddove gli enti " *punto e retta ordinari incidenti* " sono solo ∞^5.

Nei paragrafi seguenti, volendo nei nostri ragionamenti abbracciare il caso parabolico con quello non parabolico, dovremo conservare come concetto di *punto duale* quello che si ha, fissando l'unità ϵ, base del campo di numeri duali. L'imagine geometrica del punto duale sarà dunque, di regola, una projettività rettilinea di birapporto k, anzi che una coppia di punti ordinari: se anche questo spezzamento in punti ordinari, nel caso non parabolico, abbrevierebbe o renderebbe superflue alcune dimostrazioni che ci accadrà di fare.

12. Per un momento riguardiamo come *ordinari* i numeri ed elementi geometrici *reali.* Si abbia un sistema di numeri

---

[9] Questa denominazione " *nucleo* " è usata dal sig. PREDELLA, nel caso parabolico.

duali *ellittici* (n. 2), cioè con $\Delta < 0$, onde $h < 0$. Le omografie che rappresentano i punti duali saranno prive di punti uniti reali. Con una scelta conveniente dell'unità duale ([10]) si possono ottenere *involuzioni* (n. 9) in corrispondenza alla riduzione dell'equazione (1) a

$$\epsilon^2 = -1 .$$

Otteniamo così, con STAUDT, le involuzioni come enti geometrici rappresentativi dei punti (analitici) imaginari $x + y\sqrt{-1}$. Ma se, invece che all'unità $\epsilon = \sqrt{-1}$, riferiamo le coordinate di quei punti ad una nuova unità

$$\zeta = m + n\sqrt{-1} ,$$

noi otterremo nel modo esposto al n. 10, come rappresentanti dei punti imaginari, non più le involuzioni, ma le omografie di dato invariante I: che nel caso attuale, cioè calcolato per la (27) in cui $g = 0$, $h = -1$, in base alla nota ([7]), risulta:

$$I = -\frac{4m^2}{m^2 + n^2} .$$

Ritroviamo così, sotto una nuova luce, l'idea di F. KLEIN ([11]) di assumere, per definire i punti imaginari, delle projettività diverse dalle involuzioni introdotte da STAUDT. Si tratta semplicemente di un cambiamento nell'unità imaginaria!

13. Nel campo dei numeri duali *parabolici* va rilevato che, se si adopera l'unità duale ϵ tale che

$$\epsilon^2 = 0 ,$$

non si può più applicare direttamente la rappresentazione dei n[i] 8 e seguenti, perchè non è più verificata la condizione (20). E invero la (19) si ridurrebbe ora a $ww' = 0$, omografia degenere.

([10]) Si ricavano valori reali per m, n dalle equazioni (11), ove $G = 0$, $H = -1$.

([11]) *Zur Interpretation der complexen Elemente in der Geometrie*, " Mathematische Annalen ", t. 22, 1883, pag. 242-245 (dalle " Göttinger Nachrichten ", 1872).

Ma si può ovviare a ciò, assumendo come imagini geometriche dei punti duali $x + y\epsilon$ quelle che, seguendo il metodo esposto, ci son date da un'altra unità duale fissata, per esempio

$$\zeta = 1 + \epsilon . \tag{29}$$

Allora la (27), applicata al caso attuale, cioè con $g = h = 0$, $m = n = 1$, diventa

$$ww' + w' - w = 0 ,$$

ossia, ponendo $w = \frac{1}{v}$, $w' = \frac{1}{v'}$,

$$v' = v + 1 .$$

In conseguenza, come imagine del punto duale $x + y\epsilon$, si considererà l'omografia della retta xy, nella quale al punto $vx + y$, per ogni valor di v, corrisponde il punto $(v + 1)\,x + y$. Questa omografia si può anche determinare, dicendo che ha x come unico punto unito, e trasforma il punto y nel punto $x + y$.

14. Due punti duali si diranno *coniugati* quando le loro coordinate omologhe sono numeri duali coniugati (n. 6). Cerchiamo quale legame passa tra le omografie che li rappresentano, in base alla stessa unità duale fissa ϵ.

Osserviamo anzi tutto che se al n. 10 si suppone che la nuova unità ζ sia precisamente la coniugata di ϵ, ossia (n. 6)

$$\zeta = g - \epsilon ,$$

sicchè $m = g$, $n = -1$, la projettività (27) diventa:

$$ww' = gw' + h ,$$

che è l'*inversa* della (19). Sono cioè inverse fra loro l'omografia in cui si corrispondono i punti x, y e quella in cui sono omologhi X, Y, quando $x + y\epsilon$ e $X + Y\zeta$ rappresentano uno stesso punto duale. Ma il punto duale coniugato di $X + Y\zeta$ è $X + Y\epsilon$. Quindi, riferendoci ai due punti $x + y\epsilon$, $X + Y\epsilon$, concludiamo: *Due punti duali coniugati hanno per imagini (fissata una stessa unità duale ϵ) due omografie inverse l'una dell'altra.*

Se il campo duale non è parabolico, rappresentiamo i suoi elementi in base alle due unità η_1, η_2. Allora si passa da una

quantità duale alla sua coniugata scambiando η_1, η_2 (n. 6); e in conseguenza (n. 11) da un punto duale al suo coniugato, scambiando fra loro i due nuclei: vale a dire *il coniugato del punto duale* (z, t) *è il punto duale* (t, z). — Ciò si accorda bene col risultato precedente, riguardando i nuclei z, t come punti uniti delle omografie.

15. Indichiamo con ξ e ξ' due punti duali *distinti*; e domandiamo se essi posson essere *legati linearmente*, cioè se possono esservi due numeri duali non nulli α, α', tali che

$$\alpha\xi_i + \alpha'\xi_i' = 0 \qquad (i = 1, \ldots 4). \tag{30}$$

I 4 prodotti $\alpha\xi_i$, e così i loro uguali $-\alpha'\xi_i'$, saranno nullifici di una stessa schiera, per esempio della 1ª: se no, si potrebbero assumere come coordinate di un punto duale, il quale coinciderebbe sì con ξ che con ξ'. Ora le ξ_i non son tutte nullifici della 1ª schiera: dovrà dunque essere il fattore α un tale nullifico. E similmente α'. Poniamo $\alpha = a\eta_1$, $\alpha' = a'\eta_1$, ove a e a' saranno quantità ordinarie non nulle. La (30) diventa

$$\eta_1 (a\xi_i + a'\xi'_i) = 0,$$

e prova che le $a\xi_i + a'\xi'_i$ sono nullifici della 2ª schiera. Ciò è come dire che queste espressioni si annullano se nelle ξ_i e ξ_i' al posto del simbolo ϵ si pone e_2. Ma con questa sostituzione le ξ_i e ξ_i' dànno le coordinate dei secondi nuclei di ξ e ξ' (n[i] 8 e 11). Dunque questi secondi nuclei coincidono.

Un legame lineare (30) *fra due punti duali distinti significa che questi punti han comune il 1° nucleo, oppure il 2°. Quando si verifichi, per esempio, il secondo caso, i fattori* α, α' *saranno nullifici della 1ª schiera.*

I piani nel campo duale.

16. Consideriamo i punti duali $x + y\epsilon$, le cui coordinate verificano un'equazione lineare omogenea (nel campo fissato di numeri duali)

$$\Sigma (u_i + v_i\epsilon)(x_i + y_i\epsilon) = 0, \tag{31}$$

ove i coefficienti $u_i + v_i \epsilon$ non siano nullifici di una stessa schiera. L'insieme di quei punti si dirà un *piano duale*; e quei coefficienti, *coordinate* (omogenee) del piano. Essi si possono evidentemente moltiplicare per uno stesso numero duale, che non sia un nullifico.

Interpretiamo le u_i, v_i come coordinate di due piani ordinari u, v nello stesso sistema di riferimento che ci servì per i punti x, y. Se quei due piani coincidono, cioè ad esempio $v_i = m u_i$, la (31) si riduce a

$$\Sigma\, u_i\,(x_i + y_i \epsilon) = 0\,,$$

e quindi si spezza nelle due

$$(ux) = 0\,, \qquad (uy) = 0\,, \tag{32}$$

ove (come anche nel seguito) si scrive (ux) in luogo di $\Sigma\, u_i x_i$, ecc. Distinguendo i due casi di x, y coincidenti, oppure distinti, queste (32) provano che i punti $x + y\epsilon$ sono: i punti ordinari giacenti nel piano u, ed i punti non ordinari che stanno su rette ordinarie giacenti nel piano u. Diciamo che in questo caso *il piano duale si riduce al piano ordinario* u.

17. Supponiamo ora che i due piani u, v siano distinti, e sia anzitutto la retta uv sghemba colla retta xy.

Nel fascio di piani (ordinari) determinato da u, v si avrà un'omografia come imagine del piano duale $u + v\epsilon$, nello stesso modo in cui per un punto (non ordinario) $x + y\epsilon$ ottenevamo un'omografia fra i punti della retta xy. Come qui erano omologhi x e y, ed anche due punti qualunque x', y', quando valeva la (17), cioè moltiplicando le $x_i + y_i \epsilon$ per uno stesso fattore duale $a + b\epsilon$, si mutavano in $x_i' + y_i'\epsilon$; così nell'omografia del fascio di piani si corrisponderanno u e v, come pure altri due piani u', v' tali che, mediante moltiplicazione delle $u_i + v_i\epsilon$ per un fattore $c + d\epsilon$, si ottengano le $u_i' + v_i'\epsilon$.

In quelle ipotesi la (31), moltiplicata per i due fattori $a + b\epsilon$, $c + d\epsilon$, diventa:

$$\Sigma\,(u_i' + v_i'\epsilon)\,(x_i' + y_i'\epsilon) = 0\,,$$

che si spezza in due equazioni, una delle quali è:

$$(u'x') + h(v'y') = 0 .$$

Di qui, poichè si suppone la (20), segue che: quando $(u'x') = 0$ è pure $(v'y') = 0$. Ossia: se un punto x' della retta xy sta su un piano u' del fascio uv, il punto omologo ad x' nell'omografia della retta xy sta nel piano omologo ad u' nell' omografia del fascio uv. Dunque, nell'attuale ipotesi generale: *dire che un punto duale non ordinario sta in un piano duale non ordinario equivale a dire che la projettività imagine del punto è sezione di quella che rappresenta il piano.*

In particolare, considerando gli elementi uniti, ed estendendo ai piani duali la locuzione " *nucleo* „ (n. 11), si ha che il 1° ed il 2° nucleo del punto duale staranno rispettivamente nei piani ordinari che sono 1° e 2° nucleo del piano duale. Ciò risulta pure direttamente scrivendo che l'equazione (31) vale ancora, se al posto di ϵ vi si mette e_1, oppure e_2.

18. Se la retta uv coincide colla retta xy, si vede subito che l'equazione (31) è verificata.

Infine, se quelle due rette sono incidenti, ma distinte, si può applicare, con lievi modificazioni, il ragionamento del numero precedente. Si trova che l'appartenersi del punto duale $x + y\epsilon$ e del piano duale $u + v\epsilon$ equivale allora a dire che il punto comune alle due rette xy, uv è il 1° o 2° nucleo del punto duale, mentre il piano comune a quelle rette è rispettivamente il 2° o il 1° nucleo del piano duale.

Le rette duali.

19. Il fatto che le equazioni *lineari* nel campo dei numeri duali si trattano *in generale* come quelle fra numeri reali (tranne qualche riserva, su casi d'impossibilità o d'indeterminazione, che vedremo poi), permette di dire che: *in via generale* la *geometria lineare* nel campo duale (ad esempio relazioni fra punti duali e piani duali) è pienamente analoga a quella del campo geometrico ordinario.

Così è pel concetto della retta. Diciamo *retta duale* l'insieme dei punti duali, le cui coordinate son forme lineari, a coefficienti duali, di due parametri duali variabili λ, λ':

$$(33) \qquad \lambda\xi_i + \lambda'\xi_i',$$

con la condizione che non esistan valori (che non siano entrambi nulli) per λ, λ', tali da annullare quelle forme. Possiamo anche esprimerci così: son punti di una *retta duale* i punti che sono combinazioni lineari (a coefficienti duali) di due punti duali ξ. ξ', purchè questi non sian *legati linearmente*, cioè (n. 15) non abbian comune il 1° nucleo, od il 2°.

Per due punti duali qualunque, purchè non legati linearmente, passa *una sola* retta duale.

Su una retta duale (33) stanno ∞^2 punti duali. Per essi i parametri λ, λ' si posson riguardare come coordinate omogenee *sulla retta*, nel senso solito, cioè della alterabilità per un fattore duale non nullifico [12]. In fatti, se uno stesso punto duale corrisponde a due coppie di valori di quei parametri, per esempio (λ, λ') e (μ, μ'), sarà

$$\lambda\xi + \lambda'\xi' = \rho(\mu\xi + \mu'\xi'),$$

ossia

$$(\lambda - \rho\mu)\xi + (\lambda' - \rho\mu')\xi' = 0;$$

e quindi, per l'indipendenza lineare di ξ, ξ',

$$\lambda = \rho\mu, \qquad \lambda' = \rho\mu'.$$

Se un piano duale contiene due punti duali linearmente indipendenti, conterrà pure gli ∞^2 punti della loro retta duale. Così una retta duale giace in ∞^2 piani duali; e si può definire come l'insieme dei punti comuni a due piani duali linearmente indipendenti. Ecc. ecc.

---

[12] Osserviamo fin da ora che, ponendo nelle (33) e_1 in luogo di ϵ, risulta che il 1° nucleo di quel punto duale sta sulla retta dei primi nuclei di ξ, ξ', ed ha su questa retta come coordinate omogenee i valori che si deducono da λ, λ' con quella sostituzione di e_1 ad ϵ. Analogamente per il 2° nucleo.

20. Che cos'è, dal punto di vista geometrico, la retta duale?

Due punti duali, dati in modo generico, saranno due projettività (p), (q), di birapporto k, fra i punti di due rette ordinarie p, q. *Siano queste rette sghembe.* Quelle due projettività saran subordinate su esse da una ben determinata collineazione biassiale Ω, di birapporto k, avente per *assi* o *direttrici* le rette u_1, u_2 (coincidenti, se il campo è parabolico) che uniscono rispettivamente i primi ed i secondi punti uniti di (p), (q) (nuclei dei dati punti duali). Ogni retta unita di Ω diversa dagli assi (come p, q), o, come dirò pure, ogni retta *generatrice* di Ω, è sostegno di una projettività di punti, e di una projettività di piani, di birapporto k, contenute in Ω. Tutte le ∞^2 omografie di punti, e quelle di piani, che così si ottengono, sono mutuamente prospettive, quando hanno i sostegni sghembi: poichè piani omologhi in Ω segano una retta generatrice secondo punti omologhi. Così i due punti duali dati (p), (q) stanno sugli ∞^2 piani duali rappresentati dalle omografie dei fasci di piani attorno alle rette generatrici di Ω (13). E questi piani duali hanno in comune ∞^2 punti duali. La retta duale, coi suoi punti duali e piani duali, ci è ben rappresentata dalla collineazione biassiale Ω (14).

21. *Siano invece incidenti le due rette* p, q. Otterremo una specie particolare di retta duale.

Supponiamo da prima che il punto comune a p, q non coincida con alcuno dei suoi omologhi nelle projettività (p), (q)

(13) E saranno quelli i soli piani duali contenenti i due dati punti duali. In fatti un piano passante per questi avrà il 1° nucleo passante per i loro primi nuclei, cioè per la retta u_1, sicchè la retta sostegno del piano duale incontrerà u_1. Due piani omologhi qualunque (generici) nella projettività imagine del piano duale segheranno p, q, u_1 in due terne di punti corrispondentisi in Ω, e quindi saranno omologhi per questa collineazione, e la loro retta d'intersezione (sostegno del piano duale) sarà retta direttrice di Ω.

(14) Nel caso delle ordinarie rette imaginarie (di 2ª specie), e nell'altro delle projettività paraboliche, si ritrovan le collineazioni biassiali già introdotte dallo Staudt e dal Predella.

Analiticamente si giunge pure immediatamente alla collineazione Ω, se, indicati i due punti duali dati con $x + y\epsilon$, $x' + y'\epsilon$, si assumono come nuovi punti fondamentali delle coordinate i punti x, y, x', y'.

(non sia nucleo per nessuno dei due punti duali). La retta che unisce questi omologhi taglierà la retta che congiunge i primi punti uniti di quelle projettività in un punto O, da cui uscirà, nel piano ω delle p, q, un fascio di raggi con una omografia avente per sezioni quelle due date (p), (q) [15]. La retta duale si compone ora, come luogo di punti duali, di quelli rappresentati dalle projettività puntuali, segate sulle ∞^2 rette del piano ω da quell'omografia del fascio di raggi; e come insieme di piani duali, di quelli che hanno per sostegni le ∞^2 rette della stella O e per imagini le projettività projettanti da queste rette quella stessa omografia tra raggi. Questa omografia, possiamo ora dire, è l'imagine geometrica della retta duale; e non più una collineazione biassiale, come si aveva nel caso più generale. *La retta duale è ora caratterizzata dal giacere in un piano ordinario* ω, *od anche dal contenere un punto ordinario* O.

Non si ottiene nulla di diverso, se supponiamo che il punto comune a p, q sia ad esempio il 1° unito della projettività (p), e quindi non il 1° unito della (q), poichè i due punti duali si son presi linearmente indipendenti (n. 15). Allora, applicando il n. 18, si trova che il punto O, centro del fascio di raggi dianzi considerato, sarà il 2° punto unito della (q), e che l'omografia di questo fascio si avrà projettando (p) da O; a meno che il punto pq sia precisamente quel 2° unito O della (q), nel qual caso l'omografia del fascio O sarà definita dall'avere come 1° raggio unito q e come 2° p.

Se infine le rette p, q *coincidessero*, i punti duali della retta duale, quale s'è definita al n. 19, sarebbero gli ∞^2 punti duali di una stessa retta ordinaria. Diremo che in tal caso *la retta duale si riduce ad una retta ordinaria*. —

(Il seguito ad una 2ª Nota).

(15) Si tenga sempre presente che si tratta di omografie aventi tutte lo stesso birapporto k.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSI UNITE

Adunanza del 21 Gennaio 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: il Vice-Presidente CAMERANO e i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, D'OVIDIO, SEGRE, PEANO, JADANZA, GUARESCHI e BALBIANO. — Scusano l'assenza GUIDI, MATTIROLO e SOMIGLIANA;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche i Soci: CARLE, RENIER, PIZZI, RUFFINI, STAMPINI, BRONDI, SFORZA, EINAUDI, BAUDI DI VESME e DE SANCTIS Segretario. — Scusa l'assenza GRAF.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente a Classi Unite, 14 maggio 1911.

Si procede a schede segrete alla nomina del rappresentante dell'Accademia nel Consiglio di Amministrazione del R. Politecnico. È confermato in quell'ufficio il Socio SOMIGLIANA.

Entra il Socio CHIRONI.

Invitato dal Presidente il Socio NACCARI legge la relazione sulle opere che la Commissione del premio Vallauri (quadriennio 1907-1910) ritenne degne di essere prese in considerazione.

Queste sono:

Henri BOUASSE, *Cours de Physique* (presentata al concorso dall'A.);

Jean PERRIN, *Mouvement Brownien et réalité moléculaire* (proposta da Soci);

Augusto RIGHI, *La materia radiante e i raggi magnetici*, ed altri scritti sullo stesso argomento (proposta da Soci).

Il Presidente dichiara aperta la discussione. Ma nessuno prendendo la parola intorno alle conclusioni della relazione nè facendo nuove proposte, è chiuso il campo delle proposte pel premio, e conforme all'art. 5 del regolamento interno pel premio Vallauri si leggeranno le conclusioni definitive della Giunta intorno al conferimento di esso in una prossima adunanza a Classi Unite.

Il Socio Renier legge quindi la relazione sul premio Gautieri per la Letteratura (triennio 1908-1910). La relazione, firmata da Graf, Sforza e Renier, propone che il premio sia diviso tra i signori:

Ezio Levi, pel volume *Francesco di Vannozzo e la lirica nelle corti lombarde durante la seconda metà del sec. XIV*, Firenze, tip. Galletti e Cocci, 1908; ed

Eugenio Donadoni, per la monografia su *Ugo Foscolo pensatore, critico, poeta*, Milano-Palermo, Sandron, 1910.

Il Presidente dichiara aperta la discussione. Nessuno prendendo la parola, in una prossima adunanza si procederà senz'altro al voto pel conferimento del premio.

Il Socio Segre presenta all'Accademia a nome della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali, la proposta di promuovere la pubblicazione di uno o due volumi di memorie di Matematica di valenti autori italiani e stranieri, da dedicarsi alla memoria di Lagrange in occasione del centenario della sua morte, che ricorre il 10 aprile 1913. L'Accademia non dovrebbe far altro che concedere il suo appoggio morale alla Direzione e all'editore degli " Annali di Matematica „ di Milano, i quali son disposti a dedicare a tal fine uno o due dei loro volumi; sicchè a nome dell'Accademia e sotto i suoi auspici gli " Annali di Matematica „ provvederebbero a quella pubblicazione.

Dopo brevi spiegazioni del Socio D'Ovidio la proposta è approvata con voto unanime.

LETTURE

Relazione della Commissione dei Premii Gautieri.

Ecco le conclusioni, onorevoli Colleghi, a cui giunse unanime la Commissione eletta per proporre il conferimento d'un premio di fondazione Gautieri all'opera di Letteratura, Storia letteraria e Critica letteraria giudicata migliore tra quelle pubblicate in italiano da autori italiani negli anni 1908 a 1910.

Considerazioni d'ordine generale già più volte espresse a proposito del premio letterario, consigliarono la Commissione a fermarsi particolarmente su opere d'indagine severa, che per la natura loro non possono ottenere quel largo compenso materiale, di cui il pubblico suole esser largo alle produzioni più applaudite dell'arte. Inoltre, la non grande entità del premio indusse anche questa volta la Commissione a considerarlo in particolar guisa come incoraggiamento a giovani, anzichè come compenso a lavoratori provetti e celebrati. In questa guisa, se mal non ci apponiamo, si corrisponde anche alle intenzioni del benefico testatore, al quale stava a cuore l'incremento degli studi e per conseguenza il vantaggio che dai premi da lui istituiti poteva ridondare alle nuove energie sviluppantisi nella nobile palestra scientifica. Due lavori, pertanto, di giovani, poderosi entrambi ed entrambi, in varia guisa, assai utili, attrassero l'attenzione nostra, sicchè, dopo esame maturo, decidemmo di proporveli pel premio Gautieri. Nè l'uno nè l'altro sono cosa perfetta; ma possiamo affermare con pienissima convinzione che nell'uno e nell'altro concorrono non ordinarie facoltà d'ingegno, laboriosità rara, coscienza piena delle esigenze metodiche e critiche odierne.

I due libri, di mole ragguardevole ambedue, sono la monografia di Ezio Levi, *Francesco di Vannozzo e la lirica nelle corti lombarde durante la seconda metà del sec. XIV*, Firenze, tip. Galletti e Cocci, 1908, ed il volume di Eugenio Donadoni, *Ugo*

Foscolo pensatore, critico, poeta, Milano-Palermo, Sandron, 1910. Concedete, o Colleghi, che della loro importanza e dei loro pregi brevemente vi informiamo.

Sebbene l'ingegno penetrante di Niccolò Tommaseo avvertisse il valore del vecchio Vannozzo e più volte, con particolare predilezione, di lui si occupasse, la cognizione di esso era rimasta chiusa nella cerchia ristretta degli eruditi specialisti, tanto più che il patrimonio poetico di quel singolar rimatore era affidato ad un codice pressochè inaccessibile della biblioteca del Seminario di Padova. Il merito di Ezio Levi, investigatore dotto ed acuto della nostra letteratura trecentesca, non sta solamente nell'avere studiato a fondo quel bizzarro tipo di verseggiatore girovago, mezzo giullare e mezzo confidente di principi, anima aperta, tra l'imperversare della scapigliatura, ai sentimenti più gentili e generosi, musicista di vaglia, tutto spontaneità e brio, tutto vita, tutto arte non riflessa; il merito del Levi, lo ripetiamo, non consiste solo (e sarebbe già merito non mediocre) nella ricostruzione di quel singolare soggetto, ma nell'avere dimostrato la sua importanza, finora quasi del tutto sfuggita, come figura *rappresentativa* della seconda metà del sec. XIV. La vasta monografia del Levi, condotta su di un grande materiale manoscritto, ricercato pazientemente e valutato degnamente in archivi ed in biblioteche diverse della penisola, con una rara aristocrazia dell'erudizione, che solo agli esperti è palese, assorge dal Vannozzo a conclusioni più larghe ed importanti sulla vita spirituale cortigiana de' tempi di lui. A raggiungere tale intento il giovane autore non trascurò di giovarsi, nonchè della storia delle lettere, degli elementi che potevano essergli forniti dalla storia civile, da quella dell'arte e da quella del costume. Chiamare così a raccolta, per la dimostrazione di una tesi letteraria, tutte le ragioni concomitanti di vita e d'uso, attesta non pure preparazione non comune di studi, ma modernità di criterio. Il libro del Levi dimostra un fatto che nella storia delle lettere era sinora passato quasi inavvertito: l'importanza della regione *lombarda*, largamente intesa, cioè del vasto territorio, dominato da splendide signorie, ch' è disposto intorno al corso medio ed inferiore del Po, nella seconda metà del Trecento. È una rivendicazione vera e propria della vita spirituale del medioevo nel settentrione della penisola. Mentre

per la gran luce raggiata dalle *tre corone* rifulse nella prima metà del sec. XIV e predominò la Toscana; nel secondo cinquantennio, promosso da altre correnti culturali, progredì il territorio lombardo a tal segno, crede il Levi, che una vera e rude scissura sarebbe seguita, se ad impedirla non fossero sopraggiunti “ il culto e l'amore per i due grandi randagi del Tre“ cento, Dante e il Petrarca „. Così, dallo studio di un poeta oscuro e bizzarro, che sembrava destinato ad essere pasto di topi di biblioteca (nel senso reale e nel senso figurato dell'espressione), un uomo d'ingegno seppe trarre conclusioni così rilevanti, che ormai non sarà più lecito il trascurarlo a nessuno storico dalle lettere.

Studioso in tutto diverso dal Levi è Eugenio Donadoni, noto già per una serie di lavori di poesia e di critica singolarmente fini, originali ed efficaci. Il suo libro su Ugo Foscolo, che nonostante la mole non indifferente reca il modesto titolo di “ saggio „, ha il merito di essere il primo lavoro di critica introspettiva che s'abbia sulla complessa, varia ed ardua attività intellettuale ed artistica del Foscolo. Sinora gli storici si erano dato pensiero molto più della vita che della produzione di quel grande, e le opere considerarono più specialmente nei rapporti con la vita, e delle opere predilessero quelle che hanno valore d'arte. Nel volume del Donadoni è bensì considerato e scrutato e valutato l'artista, ma con preferenza è investigato, nella sua formazione e nella sua esplicazione, il pensatore ed il critico. Nessuno, finora, aveva condotto così innanzi l'analisi del mondo interiore di Ugo Foscolo; lo stesso De Sanctis, a cui siffatto genere di critica era particolarmente grato, si limitò a delinearne solo alcuni tratti caratteristici. Il Donadoni, non rifuggendo neppure dal pericolo di prolissità, pur di vedere a fondo nel suo tema, volle rappresentarci il pensiero del Foscolo, coordinando a quel pensiero gran parte delle funzioni della sua vita e tutte le funzioni della critica e dell'arte sua. Per siffatta indagine restano spiegate le molte contraddizioni del Foscolo, sia nel pensiero letterario, sia in quello storico e politico, perocchè la concezione hobbesiana dello Stato cozzava in lui con molti elementi tratti dal Vico, al quale risaliva la sua concezione poetica. Del pari cozzavano in quella mente la preoccupazione classica, che aveva nel suo ingegno e nella sua cultura

così profonde radici, con la tendenza romantica, voluta dalla temperie e più dalle esigenze dell'animo irrequieto, anzi turbinoso. Utilissimo è specialmente l'esame che il Donadoni istituisce del Foscolo come critico, giacchè l'attività di critico è in esso solo inferiore a quella altissima di poeta. Anche qui molte incertezze sono nel Foscolo, derivanti dal connubio di due tendenze diverse, l'una delle quali mette capo al Muratori e l'altra al Vico. Ma sebbene il preclaro zacintio non si foggiasse mai nel poderoso cervello una teoria estetica del tutto nitida, conseguente, precisa, la sua critica di fatti e di idee, la sua persuasione che gli avvenimenti letterari si dovessero collegare a quelli politici, il concetto, insomma, che le lettere sono fattore di civiltà e quindi dalla storia della civiltà non debbono essere mai disgiunte, son tutte conquiste di pensiero degnissime di nota, contrapposte alla maniera retorica ed esteriore di considerare il fatto letterario, nonchè alla ristretta critica biografica e bibliografica, che nel glorioso Settecento italiano aveva fruttato così largamente. In quella critica aveva introdotto vena abbondante di idee nuove la rivoluzione francese, la quale quanto potesse sugli intelletti italiani provò recentemente in un'opera laboriosa ed estesa Paolo Hazard. Anche nel Foscolo critico v'è molto d'incomposto, d'incompiuto, di transitorio, di provvisorio; ma quella sua direttiva elevata doveva esercitare un influsso duraturo sulla critica italiana che venne dopo. La dimostrazione minuta e sicura di questa verità si desume dalla esauriente disamina del Donadoni, che non si perita di dedicare ad essa più di dugento pagine del suo nutrito volume.

Colleghi,

Due mentalità affatto diverse e due diversi indirizzi rappresentano i libri di Ezio Levi e di Eugenio Donadoni: critica storica e filologica da una parte; critica psicologica, estetica, filosofica dall'altra. I due indirizzi rispondono entrambi a esigenze scientifiche ugualmente rispettabili. La Commissione è lieta che le si porga il destro di affermare, con l'esempio di due opere letterarie pregevolissime uscite nel triennio di cui ha l'obbligo di occuparsi, non solo il rispetto che si deve ai due

indirizzi, ma anche il decoro che può provenire ad un Corpo scientifico come il nostro nel premiarne due prodotti ugualmente ragguardevoli. Unanimi in questa convinzione e nel giudizio, noi vi proponiamo di dividere in due parti uguali il premio Gautieri per la letteratura fra Ezio Levi, pel volume sul *Vannozzo*, ed Eugenio Donadoni, per la monografia su *Ugo Foscolo*.

Arturo Graf
Giovanni Sforza
Rodolfo Renier, *relatore*.

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre.
Gaetano De Sanctis.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi unite.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

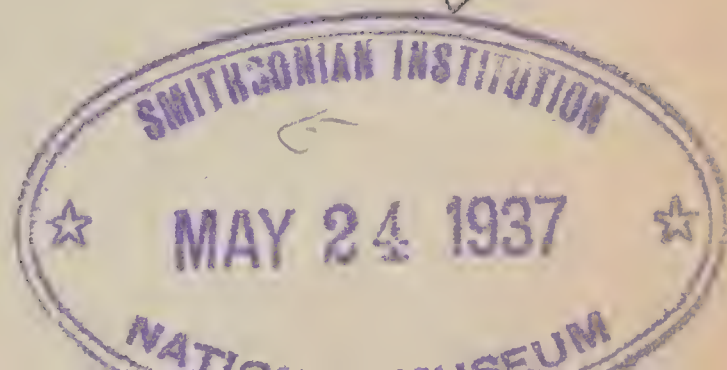
PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLVII, Disp. 6ª e 7ª, 1911-1912.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

176

CLASSI UNITE

Adunanza del 28 Gennaio 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Camerano, Vice Presidente dell'Accademia, Naccari, Direttore della Classe, D'Ovidio, Segre, Jadanza, Foà, Guareschi, Fileti, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana e Fusari;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Carle, Renier, Ruffini, Stampini, D' Ercole, Brondi, Sforza, Baudi di Vesme, Schiaparelli e De Sanctis, Segretario.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi Unite, 21 gennaio 1912.

Il Presidente comunica una circolare della Società Reale delle Scienze di Londra, che invita la nostra Accademia alle feste per il 250° anniversario della fondazione della Società stessa. Si delibera di deferire alla Presidenza la nomina di un delegato.

Si procede quindi alla votazione pel conferimento del premio Gautieri per la letteratura (triennio 1908-1910). Approvata con voto unanime la divisione del premio, secondo la proposta della Commissione, si conferisce con pienezza di voti segreti il premio Gautieri per la letteratura (triennio 1908-1910), ai signori:

Ezio Levi, pel volume su *Francesco Vannozzo e la lirica nelle Corti lombarde durante la metà del sec. XIV*;

Eugenio Donadoni, per la sua monografia su *Ugo Foscolo pensatore, critico e poeta.*

Invitato dal Presidente, il Segretario della Commissione pel premio Vallauri (Scienze fisiche, quadriennio 1907-1910), legge le conclusioni definitive della Commissione stessa. Questa propone di dividere il premio Vallauri in parti eguali tra i professori:

Jean Perrin di Parigi,
Augusto Righi di Bologna.

Nessuno prendendo la parola, in una prossima adunanza si procederà senz'altro alla votazione pel conferimento del premio.

Il Socio Camerano dà lettura della relazione sul XVII premio (internazionale) di fondazione Bressa. La Relazione distingue gli autori delle opere prese in considerazione in due gruppi e presenta in ordine alfabetico i quattro autori del primo gruppo, richiamando l'attenzione sui dati da essa posti in luce per la loro valutazione comparativa, affinchè l'Accademia scelga tra essi quello che stimerà più degno del premio. Essi sono:

H. J. Hamburger,
J. Perrin,
A. Werner,
R. Willstaetter.

Dopo breve discussione, il Presidente avvisa che in una prossima adunanza si voterà intorno al conferimento del premio.

LETTURE

Relazione della Commissione pel Premio Vallauri.

Egregi Colleghi,

Le opere, che la Commissione per il premio Vallauri di scienze fisiche ritenne degne di essere prese in considerazione, sono le seguenti:

H. Bouasse, *Cours de Physique* (opera presentata dall'autore al concorso).

I. Perrin, *Mouvement brownien et réalité moléculaire* (proposta da soci).

A. Righi, *La materia radiante e i raggi magnetici* ed altri scritti sullo stesso argomento (proposta da soci).

A nome dei miei colleghi e in grazia della loro valida collaborazione io Vi darò alcuni cenni intorno a queste opere.

Il corso di Fisica del Bouasse è un trattato molto pregevole. L'autore vi dà prova di un'ampia e profonda conoscenza degli argomenti trattati e ha il merito di avervi compreso certe teorie recenti, le quali finora nei trattati francesi non avevano avuto lo svolgimento che meritano. L'opera consta di sei volumi che furono tutti pubblicati entro il quadriennio, a cui si riferisce il nostro premio.

Certo in quest'opera la parte sperimentale della Fisica non ha lo svolgimento consueto e appare trascurata rispetto alla

teoria, ma ciò risponde probabilmente all'intento dell'autore, e ciò non toglie che l'opera sia lodevole, come s'è detto, per notevoli pregi.

Il prof. Perrin nella memoria intitolata " *Mouvement brownien et réalité moléculaire* „ riuscì a dare alla teoria atomica della materia e alla teoria cinetica dei gas una base sperimentale, di cui mancavano ancora.

Egli si servì a tal fine dello studio del così detto *moto browniano*. Osservando col microscopio una goccia di liquido, vi si scorgono per lo più delle particelle, che si movono rapidamente. Sono moti incessanti ed irregolari simili a quelli del pulviscolo atmosferico, che vediamo quando un fascio di raggi solari entra in una stanza buia. La sola spiegazione plausibile è che questi moti sieno effetto dell'agitazione perpetua delle molecole del liquido. Prima del Perrin altri avevano espresso questo concetto e particolarmente il Gouy nel 1888. Ma il Perrin, valendosi di emulsioni da lui preparate con grande abilità sperimentale, ebbe il merito di mostrare che valgono per le particelle, in cui si osserva il moto browniano, le leggi stesse della teoria cinetica dei gas.

Egli stabilì che in tali emulsioni la concentrazione delle particelle va crescendo dall'alto al basso come avviene per l'azione della gravità in un gas che sia in equilibrio, cioè secondo la legge esponenziale che è conseguenza della legge del Boyle.

Le particelle dell'emulsioni usate dal Perrin sono enormemente più grandi delle molecole dei gas, sicchè il peso di una particella d'emulsione può valutarsi a più milioni di volte il peso d'una molecola di azoto. Tuttavia nell'emulsioni e nei gas si verificano le stesse leggi. Di qui viene a queste leggi il carattere di universalità. Con ciò esse acquistano una base sperimentale affatto nuova.

La teoria cinetica dei gas conduce a considerare alcune costanti, che diconsi *universali*. Tale è la costante di Avogadro, cioè il numero delle molecole contenute in una grammo-molecola: tale è il medio valore dell'energia cinetica di traslazione delle molecole gassose, e tale è pure il così detto atomo di elettricità. Ora l'esperienze del Perrin forniscono una nuova de-

terminazione della costante di Avogadro e da questa per mezzo di relazioni teoriche si possono calcolare le altre due costanti.

Un altro ordine di conclusioni teoriche fu oggetto d'un'importante verificazione da parte del Perrin. L'Einstein nel 1906 era giunto teoricamente a stabilire l'eguaglianza tra la media energia del moto di rotazione delle molecole di un gas e la media energia molecolare di traslazione. Il Perrin riuscì a dare per l'emulsioni una verificazione sperimentale di quella proposizione e a dedurne con nuovi metodi i valori delle costanti anzidette.

La concordanza dei valori della costante d'Avogadro dedotti per vie diverse e in condizioni diverse da quest'esperienze sull'emulsioni con quelli dedotti dai gas e dalle soluzioni è valido argomento a favore dell'esattezza del concetto fondamentale ed è molto notevole che alla distanza d'un secolo la geniale intuizione del grande fisico torinese trovi una così bella conferma.

Quando una scarica elettrica attraversa un gas rarefatto e ad un tratto nello spazio occupato dal tubo si produce un campo magnetico, appaiono in certe condizioni dei fenomeni luminosi speciali. Alcuni di questi, che vengono osservati quando il campo magnetico vien prodotto da un rocchetto magnetizzante, il cui asse prolungato coincide con l'asse del tubo, vennero già osservati dal Plücker. Parecchi fisici ne diedero spiegazioni diverse. Taluni li attribuirono a raggi diversi dai catodici. Il Righi pensa che tali raggi sieno costituiti da sistemi elettricamente neutri, ciascuno dei quali si comporrebbe di un ione positivo e di un elettrone girante intorno all'ione sotto l'azione dell'attrazione elettrica reciproca come un pianeta intorno al sole. Il Righi diede a questi raggi il nome di *magnetici* e con una lunga serie d'esperienze raccolse validi argomenti in favore della sua ipotesi.

La stabilità d'una coppia formata da un ione e da un elettrone che giri intorno ad esso in un'orbita, il cui piano sia perpendicolare alle linee di forza, sarà favorita o contrastata dal campo magnetico a seconda del senso, in cui ruota l'elettrone.

Le coppie, la cui stabilità è favorita dal campo, daranno origine, secondo l'ipotesi, ai fenomeni luminosi sopra accennati.

Il Righi non crede però che un raggio magnetico sia costituito da tante coppie che percorrano inalterate il cammino segnato dal raggio. Egli ammette che ciascuna coppia abbia vita breve, e venga subito surrogata da un'altra e così via.

Le prime esperienze del Righi furono dirette ad esaminare le cariche trasportate dai raggi magnetici. A confermare pienamente l'ipotesi esse avrebbero dovuto esser nulle. L'esperienze, se non diedero tale risultato, mostrarono tuttavia che la carica diminuiva grandemente e quasi si annullava quando si creava un campo di opportuna intensità. E fu cura del Righi il dare tal forma all'esperienza e l'eseguirla in tali condizioni, che non avessero valore contr'essa le obbiezioni che erano state fatte ad esperienze consimili d'altri fisici.

Il Righi studiò poi il modo di comportarsi dei raggi magnetici allorchè si propagano nel senso, in cui il campo magnetico decresce in intensità. Modificò opportunamente la forma dei tubi e potè osservare dei fenomeni di particolare interesse. Misurò la differenza di potenziale necessaria alla scarica quando va gradatamente crescendo l'intensità del campo magnetico e notò i punti critici che corrispondono alla comparsa e alla scomparsa dei raggi magnetici.

Collocando un secondo rocchetto magnetizzante in vicinanza del tubo e col proprio asse perpendicolare a quello del tubo il Righi osservò parecchie particolarità, dalle quali trasse nuovi argomenti favorevoli alla sua teoria.

Benchè questa teoria debba ancora considerarsi come una ipotesi, che ha bisogno d'ulteriori conferme e come tale debba accogliersi con quel riserbo, che l'autore stesso non esclude, è certo che il lavoro del Righi fu eseguito con quella sagacia e profondità di giudizio e con quella maestria di espedienti sperimentali che da così valente fisico era naturale aspettarsi. È certo che l'ipotesi è avvalorata da gran numero di fatti, ma anche prescindendo dal valore dell'ipotesi, resta sempre a questi studi del Righi il merito d'un importante contributo alla conoscenza delle scariche elettriche nei gas rarefatti.

Dopo aver diligentemente esaminato i meriti delle opere di cui Vi ho parlato, la Commissione passò a discutere le proposte per il premio. Essa pensò che i lavori originali del Perrin e del Righi dovessero essere posti innanzi ad un trattato, quantunque molto pregevole, come quello del Bouasse e in ciò seguì l'esempio d'altre Commissioni, alle quali per altri premi della nostra Accademia si presentarono consimili casi.

I lavori del Perrin e del Righi sono d'indole affatto diversa, sicchè non ne riesce facile il confronto, ma, tenuto conto del loro grande valore scientifico, parve alla Commissione che il più equo partito fosse quello di dividere il premio in parti eguali. La Commissione dunque Vi propone di dividere il premio Vallauri in parti eguali fra i professori

Jean Perrin di Parigi,
Augusto Righi di Bologna.

Se l'Accademia darà voto favorevole alla nostra proposta, premierà nel Righi un illustre scienziato italiano, già chiaro prima che ponesse mano al lavoro da noi lodato, per numerosissime scoperte e ricerche di grande valore, e premierà nel Perrin un valoroso sperimentatore che diede una base concreta a concezioni teoriche, la cui importanza è riconosciuta da tutto il mondo scientifico. Essa renderà pure in tal modo un nuovo omaggio ad Amedeo Avogadro, le cui idee rafforzate da nuove esperienze vanno aprendo all' indagine scientifica sempre nuovi orizzonti.

Il Segretario della Commissione
A. Naccari.

Relazione sul XVII Premio Bressa.

CHIARISSIMI COLLEGHI,

Ho l'onore di riferire alle Classi unite dell'Accademia il risultato dei lavori della seconda Giunta per il XVII premio (internazionale) di fondazione Bressa.

Nella adunanza delle Classi unite, tenuta il 14 maggio 1911, venne letta la relazione della prima Giunta, dalla quale risulta che gli autori delle opere, che la Giunta stessa ritenne degni di essere presi in considerazione per il premio, sono i seguenti:

L. LEIGH FERMOR
H. J. HAMBURGER
P. KOEBE
J. PERRIN
Aldo PERRONCITO
A. WERNER
R. WILLSTAETTER.

Nessun altro nome essendo stato proposto nella seduta anzidetta, si dichiarò chiuso il concorso.

Ecco il risultato dell'esame che la seconda Giunta ha fatto delle opere degli autori ora nominati.

1° L'opera del L. LEIGH FERMOR, presa in esame nel presente concorso, ha per titolo: *Manganese-ore deposits of India* — Calcutta, 1909, 4 vol. in 8°.

L'opera del Fermor è una importante contribuzione intorno alla conoscenza dei giacimenti manganesiferi della regione indiana. L'A. ha trattato l'argomento con vedute sue personali, studiando la diffusione dell'elemento chimico, *il manganese*, e

facendo un elenco di tutti i minerali che ne contengono anche in minima quantità. L'A. descrive anche delle rocce nuove sia basandosi sulla presenza in esse di minerali di manganese, sia considerando come rocce alcune associazioni speciali di minerali inerenti ai giacimenti manganesiferi, le quali non avrebbero il carattere specifico petrografico della estensione per essere ritenute come rocce.

L'opera del Fermor è senza alcun dubbio di grande interesse mineralogico, perchè essendo condotta, nella parte descrittiva ed analitica, con accurate e minuziose osservazioni, corredate da disegni, da microfotografie, da rilievi geologici, presenta al minerologo un prezioso e sicuro materiale per ulteriori ricerche. La parte sintetica dell'opera è trattata dal Fermor con geniale originalità di idee.

2° Le opere di H. J. Hamburger, pubblicate nei limiti di tempo stabiliti dal presente concorso e prese in esame dalla seconda Giunta, sono le seguenti, comprendendovi anche due pubblicazioni fatte in collaborazione rispettivamente con J. de Haan, e con F. Bubanovic:

De invloed van het Hoogland op het Menschelijk Organisme, Groningen, 1907; 8°.
A method to extract enzymes and pro-enzymes from the mucous membrane of the digestive tube and to establish the topic distribution of them. Amsterdam, 1907; 8°.
Sur une méthode d'extraction des enzymes et pro-enzymes de la muqueuse du canal digestif et la détermination de leur distribution topique. Harlem, 1908.
A method of cold injection of organs for histological purposes. Amsterdam, 1908; 8°.
Kunstmatige ademhaling bij drenkelingen. Harlem, 1909; 8°.
De onstandvastigheid van colloïdaal zilver en de daaruit voortspruitende gevaren. Harlem, 1909; 8°.
Ueber den Einfluss von *Ca*-Jonen auf die Chemotaxis. Firenze, 1909.
Ueber den Durchtritt von *Ca*-Jonen durch die Blutkörperchen und dessen Bedingungen. Leipzig, 1909; 8°.
Zur Biologie der Phagocyten. Berlin, 1910; 8°.
Permeabilität von Membranen in zwei entgegengesetzten Richtungen. Berlin, 1908; 8°.
Arbeitslähmung durch Stoffwechselproducte, nachgewiesen am Filimmerepithel. Jena, 1910; 8°.

The influence of small amounts of Calcium on the motion of Phagocytes. Amsterdam, 1910; 8°.

25 Jahre " Osmotischer Druck „ in den Medizinischen Wissenschaften. Harlem, 1910; 8°.

And **Bubanovic** (F.). The permeability of red blood-corpuscles in physiological conditions, especially to alkali- and earth alkali metal. Amsterdam, 1910; 8°.

La perméabilité physiologique des globules rouges spécialement vis-à-vis des cations. Liège-Paris, 1910; 8°.

And **Haan** (J. de). Zur Biologie der Phagociten, V, VI. Berlin, 1910; 8°.

Sur la Phagocytose. Harlem, 1907; 8°.

Quantitative researches on Phagocytose. A contribution to the biology of Phagocytes. Amsterdam, 1907.

Quantitative Studien über Phagocytose. I. Resistenz von Phagocyten gegenüber Wasserzusatz. Berlin, 1907; 8°.

Quantitative Studien über Phagocytose. Berlin, 1907, 1908; 8°.

Zur Biologie der Phagocyten. IV. Berlin, 1908; 8°.

L'opera complessiva dell'Hamburger appare molto importante nel campo fisiologico, in questi ultimi anni, per essere stato fra i primi a portare con grande competenza nelle discipline biologiche i metodi ed i risultati della chimica fisica.

Affermato e chiarito il concetto di pressione osmotica, e scoperta la nota legge dei coefficienti isotonici, l'Hamburger ne applicò i risultati allo studio delle soluzioni fisiologiche, dello stato dei sali nei liquidi dell'organismo, dell'origine della linfa, del meccanismo dell'assorbimento e via discorrendo. Egli trovò con l'esperienza diretta una quantità rilevante di fatti, che ebbero poi la loro completa spiegazione teorica nelle esperienze di Arrhenius sulla dissociazione elettrolitica. Da queste prime ricerche ebbero origine gli studi successivi dell'Hamburger sulla permeabilità delle cellule animali e sulla proprietà che esse hanno di trattenere alcune sostanze e di lasciarne passare altre.

Lo studio della permeabilità cellulare è argomento di grande interesse, poichè in esso risiede, si può dire, la base del problema riguardante il ricambio organico, quello della nutrizione e quelli dell'assimilazione, dell'azione dei farmaci, e della specificità cellulare.

L'Hamburger, nel 1902, in un primo volume, e nel 1904, in altri due, riunì in un corpo di dottrina l'ingente messe di risultati sperimentali da lui ottenuti, scrivendo così, per primo,

un'opera fondamentale sopra uno dei capitoli più difficili e più importanti della fisiologia.

L'azione esercitata da questa pubblicazione dell'Hamburger nel campo fisiologico fu grandissima e ne fanno fede la lunga serie di ricerche, che molti studiosi vennero eseguendo in questi ultimi tempi sulle orme del maestro.

Pubblicata questa opera di sintesi, l'attività dell'Hamburger non si arrestò. Applicati i concetti degli equilibri chimici e della velocità di reazione allo studio dei processi catalitici, sorgeva la chimico-fisica dei colloidi e dei fermenti e si apriva un nuovo campo per lo studio dei fenomeni biologici. Esso venne con grande successo coltivato dall' Hamburger colle sue ricerche sui metodi per estrarre gli enzimi e i pro-enzimi della mucosa del tubo gastro-enterico, sull'azione catalitica dell'argento colloidale nel sangue, sull'importanza dei colloidi nei liquidi dell'organismo, nella specificità delle precipitine, per lo studio delle quali introdusse nella scienza un metodo quantitativo che permise a lui e ad altri, dopo di lui, di studiare le leggi che governano l'importante fenomeno della precipitazione con sieri specifici, e con colloidi inorganici e quindi di portare una luce notevole sui complessi problemi dell'immunità. Le ricerche dell'Hamburger in questo campo sono oramai divenute classiche.

Nè sono da dimenticarsi i lavori dell'Hamburger sul metodo di determinazione della pressione osmotica di piccole quantità di un liquido per mezzo dei globuli rossi e quelle sulla permeabilità dei globuli rossi del sangue e, in particolar modo, i suoi studi intorno all'azione che il calcio-ione esercita sulla mobilità dei globuli bianchi e sulla chemotassi.

Nel gruppo di lavori pubblicati in questi ultimi anni, l'Hamburger si occupa dello studio intorno alla fagocitosi, della permeabilità dei globuli bianchi e dei globuli rossi del sangue e degli elementi istologici con ciglia vibratili di fronte a diverse sostanze, giungendo a risultamenti di grande importanza circa l'azione fagocitaria esercitata dai globuli bianchi, a seconda del mezzo nel quale si trovano, e intorno all'azione delle soluzioni fisiologiche.

L'opera complessa dell' Hamburger è stata compiuta ed è stata pubblicata parte in un periodo di tempo che non entra nei limiti stabiliti per il presente concorso, e parte nei limiti stessi. I

lavori pubblicati dall'Hamburger nell'ultimo quadriennio non sono la parte più voluminosa delle sue opere: ma essi non sono meno importanti di quelli pubblicati antecedentemente e sono di questi una logica continuazione e una integrazione necessaria.

3° Gli scritti di P. KOEBE, professore nella Università di Lipsia, che la Giunta ha preso in esame, sono i seguenti pubblicati nel quadriennio 1907-1910:

Ueber konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche. Leipzig, 1907; 8°.

Ueber die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven. Göttingen, 1907; 8°.

Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. Göttingen, 1907-1909, I-IV, 4 fasc. 8°.

Zur Uniformisierung der algebraischen Kurven. Göttingen, 1907; 8°.

Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven. Imaginäre Substitutionsgruppen (Voranzeige). Mitteilung eines Grenzübergangs durch iterierendes Verfahren. Göttingen, 1908; 8°.

Konforme Abbildung der Oberfläche einer von endlich vielen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten körperlichen Ecke auf die schlichte ebene Fläche eines Kreises. Göttingen, 1908; 8°.

Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe. Göttingen, 1909; 8°.

Sur un principe général d'uniformisation. Paris, 1909; 4°.

Fonction potentielle et fonction analytique ayant un domaine d'existence donné à un nombre quelconque (fini ou infini) de feuillets. Paris, 1909; 8°.

Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven. I, II. Leipzig, 1909; 2 fasc. 8°.

Ueber die Hilbertsche Uniformisierungsmethode. Göttingen, 1910; 8°.

Ueber die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe (Fortsetzung und Schluss). Göttingen, 1910, 8°.

Ueber die konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender Bereiche. Leipzig, 1910; 8°.

Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. I Teil: Das allgemeine Uniformisierungsprinzip. II. Die zentralen Uniformisierungsprobleme. Berlin; 4°.

Ueber ein allgemeines Uniformisierungsprinzip. Roma, 1909; 8°.

Essi si possono considerare come relativi tutti ad una stessa teoria.

Si tratta di quella che in questi ultimi tempi è stata chiamata *uniformizzazione* delle funzioni di una variabile a più

valori, o delle curve rappresentate da tali funzioni. Nel campo costituito dai punti complessi di una linea algebrica, o più in generale di una linea analitica, — ossia sulla superficie di Riemann corrispondente, — si vuol distendere una variabile complessa t, per modo che i valori di questa risultino in corrispondenza analitica *biunivoca* coi punti della linea, sicchè le coordinate di questi punti riesciranno funzioni analitiche *uniformi* di t.

È questo un problema che, per le curve *algebriche*, era stato risolto intorno al 1880 dal Poincaré per mezzo delle sue ben note funzioni Fuchsiane e Kleiniane; ed anche il Klein in quegli stessi anni lo aveva incontrato nelle sue geniali ricerche sulla teoria Riemanniana delle funzioni. Nel 1883 poi, con metodo affatto diverso, il Poincaré aveva esteso il teorema d'esistenza della variabile t *uniformizzante* al caso più generale di funzioni o linee *analitiche*, anzi che algebriche.

Però le dimostrazioni esposte da quegli Autori non erano complete. Si adoperava, ad esempio, il così detto " metodo di continuità ", non completamente giustificato; e la t non riusciva sempre ben determinata in tutti i punti della curva.

Il Koebe ha ripreso l'argomento cercando di riempire tutte le lacune che ancora rimanevano nella dimostrazione dei teoremi fondamentali di Poincaré e Klein, ed aggiungendo altri risultati della stessa natura.

Secondo i concetti di Riemann e dei suoi continuatori, il problema si può riguardare come una questione di rappresentazione conforme. Il parametro t realizza cioè una rappresentazione piana conforme della superficie di Riemann imagine della linea o funzione iniziale, tale da soddisfare a certe condizioni. — Di qui deriva il fatto che in questi lavori del Koebe noi troviamo anche la risoluzione di notevoli problemi di rappresentazioni.

Citiamo solo i seguenti due teoremi generali:

" Ogni superficie di Riemann semplicemente connessa, aperta, anche se ad infiniti fogli, si può rappresentare conformemente sull'intero piano semplice, dal quale si tolga il punto all'infinito; oppure sull'interno di un cerchio finito ".

" Ogni area piana $p+1$ volte connessa (limitata da $p+1$ linee analitiche regolari) si può rappresentare conformemente su

di un'area analoga limitata da $p+1$ cerchi: e la rappresentazione è ben determinata, a meno d'inversioni per raggi reciproci „.

L'Autore giunge a questi risultati principalmente con due metodi: un processo d'iterazione, del quale egli dimostra la proprietà di convergenza, ed un altro che trasforma il piano semplice della data area in uno multiplo, col porre un passaggio da una pagina all'altra del piano lungo ogni linea di contorno.

Quanto alla *uniformizzazione* essa viene approfondita dal Koebe non solo nei due casi prima citati, l'algebrico e l'analitico, ma anche in quello speciale delle curve analitiche reali, e specialmente delle curve algebriche reali. Si può cioè, data una curva algebrica reale (o la corrispondente superficie Riemanniana simmetrica), determinare su essa la t in modo che i punti reali della curva siano quelli che corrispondono a valori reali di t. Anzi l'A. stabilisce anche qui la *unicità*, sotto determinate restrizioni, della t, a meno di sostituzioni lineari. — Questi lavori del Koebe portano un contributo rilevante, in un argomento che interessa profondamente tanto la teoria analitica delle funzioni, quanto la geometria; e, se anche per una parte della ricerca la via era già stata tracciata da altri, il Koebe ha saputo anche in quella, con nuovo paziente lavoro e con ingegnosi suoi procedimenti, eliminare varie difficoltà.

4° Il professore J. Perrin nella sua memoria intitolata " Mouvement Brownien et réalité moléculaire „ riuscì a dimostrare che il movimento Browniano fornisce un argomento di molto valore per la verosimiglianza della reale esistenza delle molecole.

Il naturalista Brown notò per il primo nel 1827 che osservando col microscopio una goccia di un preparato liquido, vi si scorgono spesso delle particelle che si movono continuamente. È un moto irregolare, che procede lungo linee spezzate e può assomigliarsi in qualche modo a quello del pulviscolo dell'aria, che vediamo quando un fascio di raggi solari entra in una stanza buia.

Se si versa dell'acqua in un vaso, nota il Perrin, tutto il liquido si move violentemente e dapprima le varie parti di esso hanno velocità poco diversa per grandezza e per direzione;

poi il moto a poco a poco si suddivide e si rallenta. Le riflessioni contro le pareti, gli urti delle varie parti del liquido, l'attrito fanno sì che il moto si smorzi e alla fine si spenga. Ma il moto browniano non cessa mai e in un liquido di temperatura costante non perde della sua intensità coll'andare del tempo.

La persistenza di questo moto favorisce il concetto della esistenza delle molecole. Possiamo ammettere che queste, essendo in continuo movimento, urtino le particelle, nelle quali osserviamo il movimento browniano. Molte molecole devono urtare contemporaneamente quelle particelle, e se gli urti non si compensano, le particelle verranno spostate successivamente in direzioni diverse. Così può spiegarsi il moto browniano e della verosimiglianza di questa ipotesi tratta appunto il Perrin.

In un gas, ad una temperatura determinata, la media energia cinetica di una molecola ha un valore indipendente dalla natura del gas. Ciò vale anche per le soluzioni. Può estendersi questa legge anche alle particelle, nelle quali osserviamo il moto browniano e il valore dell'energia cinetica è anche in questo caso quello stesso che fu trovato per i gas e per i corpi disciolti? Se così fosse, potremmo applicare a quelle particelle le leggi dei gas e il numero di esse che costituisce una grammo-molecola sarebbe quello stesso dei gas, cioè sarebbe eguale alla così detta costante di Avogadro.

Per rispondere al quesito non è possibile ricorrere ad una misura diretta della velocità delle particelle d'una emulsione. Il Perrin procedette quindi col seguente metodo indiretto.

Se le leggi dei gas valgono per le particelle d'un'emulsione lasciata per lungo tempo in riposo, esse devono distribuirsi lungo una verticale colla stessa legge esponenziale che vale per le densità degli strati atmosferici. Considerando la condizione di equilibrio che sotto l'azione della pressione osmotica e della gravità deve raggiungere l'emulsione, si ottiene un'equazione, che può servire a determinare la media energia cinetica delle particelle, qualora si conosca il medio raggio di queste, la loro densità, quella del liquido e il rapporto tra i numeri delle particelle contenute in eguali volumi dell'emulsione in due strati la cui distanza verticale sia nota.

Conveniva anzitutto verificare se la legge esponenziale della

distribuzione lungo la verticale si verificava. Il Perrin se ne accertò con diverse emulsioni di gomma-gotta e di mastice. Egli adattava il microscopio all'osservazione d'un certo strato orizzontale di una goccia d'emulsione e contava le particelle che vi si trovavano dopo aver ristretto con un diaframma e ridotto a piccola superficie il campo. Per esplorare le varie parti dello strato egli spostava successivamente il diaframma. Una determinazione consimile si faceva poi in un altro strato a diverse altezze e la distanza verticale dei due strati veniva misurata dallo spostamento che era necessario operare nel microscopio per adattarlo all'osservazione del nuovo strato.

La verificazione della legge esponenziale diede un primo indizio che le leggi dei gas potevano applicarsi alle particelle delle emulsioni. Determinati i valori delle altre quantità, da cui dipendeva quello dell'energia cinetica media, si potè calcolare quest'ultimo e dedurne il valore della costante di Avogadro. Si trovò in media $N = 70.10^{22}$, valore prossimo a quello calcolato per i gas.

L'energia cinetica media delle particelle di un'emulsione è dunque, ad una data temperatura, eguale a quella delle molecole di un gas o d'una sostanza disciolta. Questa legge vale dunque per particelle materiali le cui masse differiscono enormemente.

Le esperienze del Perrin che furono eseguite sopra parecchie emulsioni con particelle di grandezza molto diversa, mostrano come le leggi che teoricamente ammettiamo per le molecole, valgono per le particelle visibili delle emulsioni. Queste esperienze ci mostrano la grande verosimiglianza della reale esistenza delle molecole e della spiegazione del moto browniano che lo attribuisce agli urti delle molecole stesse.

Il lavoro del Perrin è ben pensato e ben eseguito. Esso comprende una serie di determinazioni delicatissime e la sua grande importanza per la conoscenza della costituzione della materia già affermò la Giunta per il premio Vallauri della nostra Accademia proponendolo a voi per la metà del premio stesso.

5° La memoria del dott. Aldo Perroncito ha per titolo: *Contributo allo studio della biologia cellulare* (" Atti Acc. dei Lincei „, 1910). Essa riguarda i Mitocondri, i Cromidii e l'ap-

parato reticolare interno delle cellule spermatiche. L'A. prende in esame le cellule spermatiche di buon numero di animali vertebrati ed invertebrati e specialmente quelli della Paludina vivipara.

Le questioni trattate dall'A. sono varie ; anzitutto dimostra l'esistenza nelle cellule spermatiche dell'apparato reticolare interno del Golgi. Di questo apparato, stato rilevato per primo dal Golgi nelle cellule nervose e poi dai numerosi suoi allievi in altre sorta di elementi istologici, non si conosceva che la forma. Circa il suo significato, da alcuni (Holmgren) venne ritenuto l'espressione di piccoli spazi canalicolari esistenti nel protoplasma, che venivano nei preparati a riempirsi di precipitati di argento.

Il dott. A. Perroncito dimostra che l'apparato reticolare è un elemento morfologico della cellula ; ma che esso al pari del nucleo, al pari del centrosoma passa, durante la divisione cellulare, dalla cellula madre alla figlia. Nella scissione l'apparato reticolare dà luogo ad una serie di figure caratteristiche, che offrono una notevole rassomiglianza con quelle della mitosi nucleare ; a questo fenomeno l'A. dà il nome di *dictocinesi.*

L'A. si occupa nel suo lavoro anche felicemente di altre questioni inerenti alla struttura della cellula. Era noto, per opera particolarmente di Newes e di Benda, che in molte cellule, e sopratutto nelle cellule seminali, esistevano delle formazioni granulari e filamentose cui vennero dati diversi nomi: mitocondri, condrosomi, condroniti, secondo la loro apparenza; ma cui veniva attribuito un significato comune. L'A. distinse nettamente due categorie di formazioni mitocondrali con evoluzione e destino finale diversi : esse sono i condrosomi di Newes e i mitocondri di Benda.

Cresciuto alla scuola del Golgi, il dott. A. Perroncito fa con questo suo lavoro onore al grande Maestro e arricchisce la scienza di un importante contributo intorno alla conoscenza del difficile e controverso problema della struttura della cellula.

6° Il lavoro del professore A. Werner, sul quale la Giunta del premio Bressa rivolse il suo esame, è la seconda edizione, stampata nel 1909, del suo trattato di chimica inorganica.

Il prof. Werner, fin dal 1892, intraprese lo studio dei così detti " composti molecolari ", capitolo esteso ed importantissimo

della chimica, e fin dall'inizio del suo lavoro gettò le basi di nna nuova teoria, introducendo il concetto di " numero di coordinazione „, teoria atta a spiegare la costituzione di questi composti ed a prevedere fatti nuovi, che l'esperienza andò man mano confermando splendidamente.

Il concetto kekulejano della valenza fissa per ogni atomo dovette cedere il passo al fatto sperimentale della valenza variabile, perchè l'interpretazione della polimeria, invocata per rappresentare con formule strutturali i composti, non trovò appoggio nei risultati ottenuti coi diversi metodi di determinazione dei pesi molecolari.

Inoltre molecole nelle quali le valenze degli atomi componenti sono reciprocamente saturate, e quindi teoricamente dovrebbero comportarsi come sature, hanno invece la capacità di saldarsi fra di loro, il che dimostra che il solo concetto di valenza non serve più alla determinazione strutturale delle formule dei composti chimici complessi di ordine superiore.

Il Werner escogitò il concetto di " numero di coordinazione dell'atomo „, cioè quel numero che indica quanti altri atomi, o gruppi negativi, o molecole sature possono essere collegate direttamente al medesimo. L'esperienza ha insegnato che per un gran numero di elementi il massimo numero di coordinazione è 6, perciò immaginando che l'atomo occupi il centro di un ottaedro, gli atomi, i gruppi negativi e le molecole sature si disporranno ai sei vertici del solido. Da ciò nasce la possibilità dell'esistenza d'isomeri spaziali, che l'esperienza ha confermato in gran numero di casi.

Altri fatti, che la teoria della valenza non arriva a spiegare, trovano facile e logica interpretazione nel nuovo concetto; così, ad esempio, il diverso comportamento analitico manifestato dagli atomi o dai radicali coordinati, a seconda che si trovano nella sfera di azione dell'atomo centrale del nucleo, o fuori di essa, manifestando, in quest'ultimo caso, le loro proprietà ionogene.

Nel volume sopra menzionato, il Werner espone, in una 2ª edizione, molto ampliata, della 1ª edita nel 1905, le sue idee e la arricchisce di nuovi capitoli in cui tratta del copioso lavoro sperimentale che ha servito a completare l'abbozzo presentato nella 1ª edizione. In questa seconda edizione egli fa la storia critica delle considerazioni teoriche che lo condussero alla fertile

ipotesi, accenna alle numerose sue esperienze, a quelle dei suoi allievi diretti, e di tutta quella schiera di chimici che si occuparono di composti complessi, che appoggiano le sue vedute.

L'importanza dell'opera del Werner sta in ciò, che essa non solo ha servito a collegare fra loro serie di fenomeni di cui prima si intravedevano confusamente le relazioni; ma ha servito a prevedere nuovi fatti di isomeria geometrica, che l'esperienza ha confermato, epperciò l'opera assume un'importanza direttiva nelle ricerche di chimica inorganica, come viene ampiamente attestato dalla schiera numerosa di chimici di tutte le nazionalità che seguono con successo la via tracciata dal Maestro.

L'azione esercitata dall'opera del Werner sullo sviluppo della chimica dei sali complessi si può paragonare a quella esercitata dal libro del Blomstrand, *Die Chemie der Jetztzeit*, 1869, sull'applicazione ed estensione della teoria della valenza.

Nella seconda edizione dell'opera sopra citata del Werner, che rientra per la sua data di pubblicazione nei limiti di tempo del concorso, una parte importante si riferisce alla prima edizione, che è del 1905; ma non meno importanti sono le aggiunte della 2ª edizione, le quali vengono a necessario complemento della prima e sono documento della grande efficacia dell'opera del Werner.

7° Le numerose memorie che R. Willstaetter ha pubblicato dal 1907 al 1910, oggetto dell'esame della Giunta per il Premio Bressa, si riferiscono a vari grandi gruppi di ricerche per loro natura assai difficili.

Composti ciclici in generale. Sintesi nel gruppo del cicloeptano, della atropina e della cocaina.

Gli alcaloidi di questo gruppo, come mostrò l'A. in ricerche anteriori, sono dei derivati del cicloeptano con un nocciolo interno di azoto. Rotto questo nucleo, si ha una catena a sette atomi di carbonio, senza ramificazioni, che prima non si conosceva. Egli riuscì dalla tropina a passare al suberone e fu da questo che egli riuscì poi a fare la sintesi totale della atropina e basi analoghe.

La sintesi degli acidi ecgonici, igrici, pirrolidici, che Emilio Fischer scoprì un poco più tardi tra i prodotti della decompo-

sizione delle sostanze proteiniche, confermò pienamente tutte le ipotesi relative alla costituzione degli alcaloidi del gruppo tropinico escogitate dal Willstätter. Questi lavori condussero il Willstätter alla sintesi totale di un gran numero di corpi nuovi ed importanti che hanno stretta relazione col nucleo a sette atomi di carbonio.

Le ricerche del Willstätter sui composti ciclici da 4 a 9 atomi di carbonio riguardano specialmente quelli tra essi i cui noccioli sono formati da atomi di carbonio con legami alternativamente semplici e doppi. Dalla pseudopelletierina, ad esempio, potè ottenere il cicloottano puro, il cicloottene, il cicloottodiene, ecc., tutti idrocarburi che hanno proprietà molto rimarchevoli. Questi carburi non saturi si polimerizzano facilmente, specialmente l'α cicloottodiene, che è quello che ora si considera come il principio fondamentale del *caoutchouc*: esso si trasforma con una grande violenza in composti bimeri e polimeri. E qui egli notò per la prima volta il curioso ed importantissimo fenomeno, che a seconda della posizione del doppio legame in uno stesso idrocarburo questo può essere venefico od esplosivo oppure inattivo e stabile. Questi lavori hanno servito come sorgente di nuove ricerche e specialmente di quelle classiche di Harries.

In questo gruppo di nuove sostanze il Willstätter ha notato un nuovo ed assai interessante genere di trasformazione, vale a dire, la formazione di catene intermolecolari o intercicliche.

Queste ricerche diedero occasione al Willstätter di trovare nuovi metodi di riduzione molto efficaci, sia coll'acido jodidrico concentratissimo, sia col platino e l'idrogeno a temperatura ordinaria; riuscì così a delle riduzioni che in altro modo sarebbero state impossibili.

Il nucleo ciclico con maggior numero di atomi di carbonio è quello scoperto dal Willstätter nel 1907, il ciclononano, cioè a 9 atomi di carbonio. Pareva ai chimici quasi impossibile ottenere composti ciclici con più di sei atomi di carbonio: ma gli studi del Willstätter hanno dimostrato l'esistenza di composti con 7, 8 e 9 atomi di carbonio ciclici.

Ricerche sui composti chinoidi o chinonimidi.

Le numerose ricerche sui chinoidi e specialmente sui dimidochinoni, incominciate nel 1907 e proseguite nel 1908 e 1909, condussero il Willstätter allo studio del nero o dei *neri* di *anilina*,

di cui riuscì a svelare la costituzione chimica, problema dei più intricati relativamente alle materie coloranti.

Queste ricerche portano un importantissimo contributo ai rapporti tra la costituzione chimica e il colore dei corpi organici, e alla costituzione dei coloranti in generale, in guisa che esse si possono considerare fra le più importanti state fatte in questi ultimi tempi intorno alle sostanze coloranti.

Ricerche sulla clorofilla.

Le ricerche numerose (diciotto memorie) del Willstätter sulla clorofilla sono indubbiamente le più notevoli che si abbiano su tale argomento, la di cui importanza non ha d'uopo di essere qui dimostrata. Lo studio comparativo fatto dal Willstätter di più di 200 specie di piante appartenenti ad ogni classe, dimostrò che la clorofilla di tutte le piante verdi ha le stesse proprietà e la stessa composizione; dimostrò innanzi tutto che la clorofilla non contiene ferro, ma che la molecola della clorofilla di tutte le piante contiene un terzo di fitolo, 3,75 $^0/_0$ di magnesio e fornisce per saponificazione della sua feofilina le stesse quantità degli stessi prodotti di decomposizione, la fitoclorina e la fitorodina. Il magnesio sarebbe, pare, combinato nella forma complessa. Risultano perciò analogie notevolissime scoperte dal Willstätter fra la clorofilla e la emoglobina; la funzione di questi due corpi è dovuta ai due metalli che funzionano come catalizzatori, il magnesio nelle piante e il ferro negli animali.

Questi risultamenti del Willstätter (inaspettati ai chimici), che portano un così nuovo e grande contributo alla conoscenza dei fenomeni fondamentali della vita degli organismi vegetali ed animali, sono oggimai prezioso patrimonio acquisito alla scienza.

Da quanto si è venuto fin qui dicendo appare che i lavori del Willstätter coltivano con grande successo larghi tratti del vastissimo campo della chimica organica ed alcuni hanno anche riferimento a generali ed importantissimi fenomeni biologici: in tutti questi lavori il Willstätter si rivela sperimentatore di primo ordine e geniale.

Dopo aver discusso il merito assoluto e relativo delle varie opere la Giunta riconobbe che esse, benchè tutte pregevoli, potevano venir divise in due gruppi.

Stanno nel primo gruppo i lavori dell'Hamburger, del Perrin, del Werner e del Willstätter.

All'altro gruppo, che, a parere della Giunta, comprende opere, il cui merito è certamente grande, ma un po' minore, spettano i lavori del Fermor, del Koebe e del Perroncito.

La Giunta vi presenta i quattro autori del primo gruppo in ordine alfabetico, richiamando l'attenzione sui dati da essa posti in luce per la loro valutazione comparativa, affinchè scegliate fra essi quello che stimate più degno. Qualunque sia, fra gli autori indicati, quello che raccoglierà la maggioranza dei vostri voti, verranno onorate le fatiche ed i meriti di un valoroso cultore della scienza.

Il Segretario della Giunta
L. Camerano.

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre.
Gaetano De Sanctis.

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Gennaio 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-presidente Camerano, ed i Soci: Naccari, Direttore della Classe, D'Ovidio, Jadanza, Foà, Guareschi, Fileti, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari e Segre, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Guidi.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Socio Parona presenta in omaggio una sua commemorazione di Giorgio Spezia; e così il Socio Fusari un suo discorso su *Carlo Giacomini nella vita e nelle opere*. Inoltre lo stesso Socio Fusari offre, a nome dell'autore Dr. Angelo Bruni, un opuscolo intitolato: *Ueber die evolutiven und involutiven Vorgänge der Chorda dorsalis in der Virbelsäule mit besonderer Berücksichtigung der Amnioten*.

Il Socio corrispondente Taramelli ha inviato in dono un suo scritto su *Antonio Stoppani*, ed il Socio corrispondente Issel tre suoi opuscoli: *Origine e conseguenze delle frane; L'evoluzione delle rive marine in Liguria; Cenni intorno ai littorali italiani considerati dal punto di vista geologico*.

Il Socio Segre presenta, per la stampa negli *Atti*, una sua Nota II, su *Le Geometrie projettive nei campi di numeri duali*.

Il Socio Grassi presenta, per la pubblicazione fra le *Memorie* un lavoro del Dr. A. G. Rossi su *Apparecchi galvanometrici ed elettrometrici per corrente alternata a vibrazioni torsionali di risonanza in fili metallici*. Vengono incaricati di riferire su di esso i Soci Naccari e Grassi.

LETTURE

Le Geometrie projettive nei campi di numeri duali.

Nota II di CORRADO SEGRE (*).

Rappresentazione del campo binario duale sui punti di una quadrica.

22. Un modo ovvio per rappresentare gli ∞^2 punti duali di una retta duale coi punti ordinari di una quadrica consisterebbe nel ridursi, ad esempio con una projezione, al caso di una retta duale generale come quella del n. 20. I punti duali di una tal retta stanno rispettivamente sulle ∞^2 rette di una congruenza lineare (le generatrici della collineazione biassiale Ω); e basta riferire questa congruenza, in modo noto, ai punti di una quadrica ([16]).

Modificando lievemente questo concetto, prendiamo le due variabili duali omogenee λ, λ', che al n. 19 abbiamo assunto quali coordinate omogenee dei punti duali sulla retta duale (33). Posto

$$\lambda = z_1 + z_2 \epsilon, \quad \lambda' = z_3 + z_4 \epsilon,$$

il punto duale si potrà allora rappresentare col punto ordinario $(z_1 z_2 z_3 z_4)$: al quale però si dovrà (n. 19) riguardare come equivalente il punto $(z_1' z_2' z_3' z_4')$ se esiste un numero duale (non nullifico) $a + b\epsilon$ tale che

$$(34) \qquad \begin{cases} z_1' + z_2' \epsilon = (a + b\epsilon)(z_1 + z_2 \epsilon) \\ z_3' + z_4' \epsilon = (a + b\epsilon)(z_3 + z_4 \epsilon) \end{cases}$$

(*) V. pag. 308.

([16]) Cfr. il lavoro citato in ([3]).

ossia

$$(35) \qquad \begin{cases} z_1' = az_1 + hbz_2 \\ z_2' = bz_1 + (a + gb)\, z_2 \\ z_3' = az_3 + hbz_4 \\ z_4' = bz_3 + (a + gb)\, z_4 . \end{cases}$$

Queste formole danno una collineazione biassiale (ad assi distinti o coincidenti), determinata, come la Ω del n. 20, dalle due omografie di birapporto k che essa subordina sulla retta $z_3 = z_4 = 0$ e sulla retta $z_1 = z_2 = 0$. In conseguenza al variar di a e b il punto z' scorre su una retta passante per z ed appartenente ad una congruenza lineare fissa. Possiamo assumere le rette di questa congruenza come imagini dei nostri punti duali.

23. Calcoliamo le coordinate $p_{ij} = z_i z'_j - z_j z_i'$ della retta che unisce z, z', applicando le formole (35). Divise per b (che è $\neq 0$ se quei punti son distinti), risultano:

$$(36) \qquad \begin{cases} p_{12} = p_1 , \quad p_{34} = p_2 , \quad p_{14} = p_3 , \quad p_{24} = p_4 \\ p_{13} = -hp_4 , \quad p_{23} = -p_3 - gp_4 , \end{cases}$$

ove si pone

$$(37) \qquad \begin{cases} p_1 = z_1^2 + gz_1z_2 - hz_2^2 \\ p_2 = z_3^2 + gz_3z_4 - hz_4^2 \\ p_3 = z_1z_3 + gz_1z_4 - hz_2z_4 \\ p_4 = z_2z_3 - z_1z_4 . \end{cases}$$

Sostituendo le (36) nella nota relazione quadratica tra le 6 coordinate p_{ij}, si ha:

$$(38) \qquad p_1p_2 - p_3^2 - gp_3p_4 + hp_4^2 = 0 ,$$

equazione che si può anche verificare colla sola sostituzione delle (37), grazie a cui si riduce ad una identità nelle z.

Interpretando ora $p_1 \dots p_4$ come coordinate di *punto*, anzi che di retta, sostituiremo alla congruenza lineare di rette una quadrica F, rappresentata da quell'equazione (38), o dalle espressioni parametriche (37). Sui punti (ordinari) di questa quadrica saran rappresentati biunivocamente i punti duali della retta duale.

Formando, sull'equazione (38) (moltiplicata per 2), il discriminante di F, si trova Δ, quale è dato dalla (6):

$$\Delta = g^2 + 4h.$$

Sarà dunque F *un cono* se il campo duale è parabolico. Se g, h son reali, sarà F a punti reali ellittici se $\Delta < 0$, cioè se il campo duale è ellittico (n. 2); a punti iperbolici, se $\Delta > 0$, ossia se il campo è iperbolico.

24. Quali punti duali corrispondono ai punti di F posti su una stessa generatrice?

Mettiamo in evidenza le generatrici rettilinee di F scrivendo la (38) così:

$$p_1 p_2 = (p_3 + e_1 p_4)(p_3 + e_2 p_4).$$

Una *1ª schiera* di generatrici sarà rappresentata dalle due equazioni

$$\text{(39)} \qquad \begin{cases} p_1 = s(p_3 + e_2 p_4) \\ s p_2 = p_3 + e_1 p_4 , \end{cases}$$

ove s è un parametro, coordinata projettiva della generatrice entro quella schiera. Sostituiamo, ad esempio nella prima di queste equazioni, le espressioni (37) delle p, dopo d'avervi introdotto e_1, e_2 invece di g, h, per mezzo delle (4). Diventa:

$$(z_1 + e_1 z_2)(z_1 + e_2 z_2) = s(z_1 + e_2 z_2)(z_3 + e_1 z_4),$$

ossia (con una divisione che è permessa, finchè $\lambda = z_1 + z_2 \epsilon$, $\lambda' = z_3 + z_4 \epsilon$ non sono nullifici e quindi $z_1 + e_2 z_2 \neq 0$, $z_3 + e_1 z_4 \neq 0$)

$$\text{(40)} \qquad \frac{z_1 + e_1 z_2}{z_3 + e_1 z_4} = s.$$

Ora, per la nota ([12]), il 1° membro di questa relazione è il rapporto delle 2 coordinate omogenee che ha il 1° nucleo del punto duale (λ, λ'), sulla retta ordinaria che esso percorre. Dunque: *La rappresentazione della retta duale sulla quadrica* F *fa corrispondere projettivamente le generatrici della 1ª schiera di questa ai primi nuclei dei punti duali della retta duale: i punti di una stessa generatrice essendo imagini di quei punti duali che hanno lo stesso 1° nucleo* ([17]). — Analogamente per la 2ª schiera.

Così, se il campo non è parabolico, l'attuale rappresentazione risulta equivalente alla ben nota rappresentazione delle coppie di punti (1° e 2° nucleo del punto duale) presi da due rette distinte, o coppie *ordinate* di punti di una stessa retta, sopra i punti di una quadrica: rappresentazione che si ottiene riferendo le due schiere di generatrici di questa rispettivamente a quelle due rette punteggiate ([18]).

25. Possiamo rappresentare i punti duali della retta duale con una sola variabile (coordinata non omogenea) duale $u + v\epsilon$, cioè il rapporto delle due coordinate omogenee duali λ, λ':

$$u + v\epsilon = \frac{z_1 + z_2\epsilon}{z_3 + z_4\epsilon}. \tag{41}$$

Moltiplicando ambi i membri di questa uguaglianza per $z_3 + z_4\epsilon$, e poi confrontando i due membri e risolvendo rispetto a u, v, si trova

$$u = \frac{z_1 z_3 + g z_1 z_4 - h z_2 z_4}{z_3^2 + g z_3 z_4 - h z_4^2}$$

$$v = \frac{z_2 z_3 - z_1 z_4}{z_3^2 + g z_3 z_4 - h z_4^2},$$

([17]) A ciò si giunge anche subito, senza calcoli, servendosi della congruenza lineare, com'è detto in principio del n. 22.

([18]) Se la retta, di cui consideriamo gli ∞^2 punti duali, è una retta ordinaria, possiam sostituire quei punti colle ∞^2 omografie di birapporto k della retta. Appunto per tali omografie si trovano come imagini i punti di una quadrica, a pag. 309 del *Mémoire sur la représentation des homographies binaires par des points de l'espace avec application à l'étude des rotations sphériques*, par C. Stéphanos (“ Mathematische Annalen „, t. 22, 1883, pag. 299-367).

ossia, in base alle (37),

$$(42) \qquad u = \frac{p_3}{p_2}, \qquad v = \frac{p_4}{p_2}.$$

Dunque (19): la variabile duale distesa sui punti $(p_1\, p_2\, p_3\, p_4)$ della quadrica F è semplicemente

$$\frac{p_3 + \epsilon p_4}{p_2}.$$

Projettando F sul piano $p_1 = 0$ dal punto fondamentale opposto, che sta su F (ed ha per piano tangente $p_2 = 0$), si viene a distendere la variabile duale su quel piano. Determinando i punti del piano colle tre coordinate omogenee $p_2\, p_3\, p_4$, od anzi coi 2 rapporti $u = \frac{p_3}{p_2}$, $v = \frac{p_4}{p_2}$ (coordinate non omogenee), il punto (u, v) viene ad essere precisamente l'imagine del numero duale $u + v\epsilon$: *appunto come nella ordinaria rappresentazione sul piano dei numeri complessi* a + b i.

26. Se la retta, di cui consideriamo i punti duali, è ordinaria, otterremo due punti *coniugati* (n. 14) prendendo per coordinate non omogenee $u + v\epsilon$, $u' + v'\epsilon$ due valori coniugati, cioè (n. 6) tali che

$$u' = u + gv, \quad v' = -v.$$

Ne segue, per le (42), indicando con p, p' i punti di F imagini di quei punti duali:

$$\frac{p_3'}{p_2'} = \frac{p_3}{p_2} + g\frac{p_4}{p_2}, \qquad \frac{p_4'}{p_2'} = -\frac{p_4}{p_2},$$

sicchè si potrà prendere:

$$p_1' = p_1, \quad p_2' = p_2, \quad p_3' = p_3 + gp_4, \quad p_4' = -p_4.$$

---

(19) A questa espressione di $u + v\epsilon$ mediante le p_i si giungerebbe anche, nel caso non parabolico, osservando che dalle (41), (40), e dalla 2ª delle (39) segue $u + e_1 v = \frac{p_3 + e_1 p_4}{p_2}$; e analogamente, mutando e_1 in e_2.

Si riconosce subito che questa corrispondenza tra i punti p, p' della quadrica (38) non è altro che l'omologia armonica, avente per piano d'omologia $p_4 = 0$ e per centro il suo polo rispetto ad F, cioè il punto $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, $2p_3 + gp_4 = 0$.

I punti ordinari (coniugati di se stessi) han per imagini i punti di F che stanno sul piano $p_4 = 0$, vale a dire i punti di una conica (irriducibile) ([20]).

27. Se $g = h = 0$, cioè pei numeri duali parabolici, coll'unità ϵ tale che

$$\epsilon^2 = 0,$$

la quadrica F definita dalla (38) si riduce al cono

$$(43) \qquad p_1 p_2 - p_3^2 = 0.$$

Quest'equazione, insieme colle (42), dà:

$$(44) \qquad p_1 : p_2 : p_3 : p_4 = u^2 : 1 : u : v\,,$$

che sono precisamente le formole ottenute da J. Grünwald (a pag. 83 del lavoro citato nella nota ([2])), per rappresentare la variabile duale $u + v\epsilon$, con $\epsilon^2 = 0$, sul cono quadrico.

Se invece il campo binario duale è dato dalle due coordinate omogenee $z_1 + z_2\epsilon$, $z_3 + z_4\epsilon$, sempre con quella particolare unità, dalle (37) abbiamo, in luogo delle (44):

$$(45) \qquad p_1 = z_1^2\,, \quad p_2 = z_3^2\,, \quad p_3 = z_1 z_3\,, \quad p_4 = z_2 z_3 - z_1 z_4\,.$$

Si osservi che ai punti della retta duale aventi uno stesso nucleo (fissata cioè u, ossia $z_1 : z_3$) corrispondono i punti del cono situati in una stessa generatrice $(p_1 : p_2 : p_3)$. Il vertice del cono $(p_1 = p_2 = p_3 = 0)$ è un *punto eccezionale* per la nostra rappresentazione, non ha più per omologo un punto duale determinato: poichè un tal punto duale dovrebbe avere ∞ nuclei, e d'altronde avrebbe le due coordinate omogenee ridotte ai due nullifici $z_2\epsilon$, $z_4\epsilon$, il che è escluso nella definizione dei punti duali.

([20]) Anche la 4ª delle (37), se si pone $z_2 = 0$, $z_4 = 0$, per i punti ordinari, dà $p_4 = 0$.

Cenno sulla rappresentazione analoga pel campo ternario duale, ecc.

28. Il metodo con cui siam giunti alla rappresentazione del campo binario duale coi punti di una quadrica si estende facilmente a un numero qualunque di variabili duali. Però, se il campo di questi numeri duali *non è parabolico*, le varietà rappresentative che così si ottengono sono già note. Basta in fatti, in tale ipotesi, pensare i numeri duali espressi colle unità η_1, η_2 (n. 5), e quindi i punti duali come coppie (ordinate) di punti ordinari, per capire che si tratta allora semplicemente di rappresentare come singoli punti di una varietà le coppie di punti di due piani, o spazi. Si otterranno precisamente le varietà a cui già io ebbi ricorso per gli ordinarî punti complessi del piano o spazio ([21]). Così, ad esempio, i punti duali di un piano duale vengono rappresentati dai punti di una V_4^6 di S_8, luogo di due schiere ∞^2 di piani, ecc. ecc.

29. Vediamo invece come *nel caso parabolico* la rappresentazione del campo ternario duale si faccia con una varietà, già introdotta a questo scopo dal sig. Study ([22]); la quale può riguardarsi come una degenerazione della V_4^6 ora ricordata, allo stesso modo come il cono quadrico al n. 27 era una degenerazione, pel caso parabolico, della quadrica F dei n[i] precedenti.

Potremo anche qui ridurci all'unità ϵ tale che

$$\epsilon^2 = 0,$$

e inoltre (per semplicità di enunciati) al caso che il piano dei punti duali sia un piano ordinario.

Procedendo come ai n.[i] 22, 23, rappresentiamo il punto duale $z + t\epsilon$, di coordinate omogenee duali (nel piano)

$$z_1 + t_1\epsilon, \quad z_2 + t_2\epsilon, \quad z_3 + t_3\epsilon,$$

([21]) *Sulle varietà che rappresentano le coppie di punti di due piani o spazi*, " Rendic.[i] del Circolo matematico di Palermo ", t. 5, 1891, p. 192-204. — V. anche p. 421 della Memoria ([3]).

([22]) *Geometrie der Dynamen*, p. 367 e seg.[i]

col punto dello spazio S_5 che ha per coordinate omogenee $z_1 z_2 z_3\ t_1 t_2 t_3$; e quindi (stando al concetto di punto duale) anche col punto $(z_1' z_2' z_3'\ t_1' t_2' t_3')$, se si ha

$$z_i' + t_i' \epsilon = (a + b\epsilon)(z_i + t_i\epsilon),$$

ossia:

$$z_i' = az_i, \qquad t_i' = bz_i + at_i \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{46}$$

Calcoliamo le 15 coordinate della retta di S_5 che unisce quei due punti $(z_i\, t_i)$, $(z_i'\, t_i')$, e quindi anche il 1° di essi con $(z_i' - az_i,\ t_i' - at_i)$ cioè, per le (46), con $(0\ 0\ 0\ z_1\, z_2\, z_3)$. Risultan 3 coordinate nulle, e poi:

$$p_{14} = z_1^2, \qquad p_{25} = z_2^2, \qquad p_{36} = z_3^2$$

$$p_{26} = p_{35} = z_2 z_3, \qquad p_{34} = p_{16} = z_3 z_1, \qquad p_{15} = p_{24} = z_1 z_2$$

$$p_{56} = t_2 z_3 - t_3 z_2, \qquad p_{64} = t_3 z_1 - t_1 z_3, \qquad p_{45} = t_1 z_2 - t_2 z_1.$$

Indicando con $u_1 u_2 u_3$ le coordinate della retta ordinaria del dato piano, sulla quale sta il punto duale $z + t\epsilon$, sicchè $u_1 = t_2 z_3 - t_3 z_2$, ecc., ed assumendo quelle quantità p_{ij} come coordinate omogenee di punti; otterremo per imagini dei punti duali $z + t\epsilon$ i punti ordinari dello spazio S_8, aventi le coordinate $p_1 \dots p_9$ espresse nel seguente modo:

$$p_1 = u_1, \qquad p_2 = u_2, \qquad p_3 = u_3 \tag{47}$$

$$p_4, p_5, \dots, p_9 = z_1^2,\ z_2^2,\ z_3^2,\ z_2 z_3,\ z_3 z_1,\ z_1 z_2 \tag{48}$$

colla condizione

$$z_1 u_1 + z_2 u_2 + z_3 u_3 = 0. \tag{49}$$

30. Le formole (47), (48) rappresentano, coi parametri u_i, z_i, legati dalla (49), una varietà V_4 dello S_8, che è appunto quella citata dello STUDY. Si riconosce subito che il suo ordine è 6 [23].

---

[23] Basta in fatti cercare il numero delle soluzioni di 4 equazioni lineari omogenee tra le p_l, ove queste quantità siano espresse come sopra. Ora, se da 3 di quelle 4 equazioni si ricavano p_1, p_2, p_3 come forme lineari di $p_4 \dots p_9$, e si sostituiscono nella rimanente, non che nella (49) al posto

Vediamone anche la generazione geometrica, data da quello scienziato.

In S_8, sul piano fondamentale 123 (cioè piano i cui punti han nulle tutte le coordinate diverse da $p_1 p_2 p_3$), diciamo z la retta che ha per coordinate $z_1 z_2 z_3$, vale a dire per equazione la (49), in cui le u_i significhino, secondo le (47), coordinate di punto mobile. Poi, nello spazio S_5 fondamentale opposto $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, consideriamo i punti dati dalle (48) al variar di z. Essi costituiscono una superficie del 4° ordine F^4 di VERONESE, rappresentata nel modo noto sui punti z del piano dato, oppure, per una reciprocità fra questo e il piano 123, sulle rette z del piano 123. Le formole (47), (48) che definiscono, insieme colla (49), la nostra $V_4{}^6$, provano che ogni punto di essa sta sulla retta che congiunge un punto z di questa F^4 ad un punto u della retta z del piano 123; e quindi sta pure sul piano che unisce il punto z della F^4 a questa retta z. Dunque: *In* S_8 *sono dati un piano* S_2 *ed una* F^4 *di* VERONESE (*in un* S_5 *non incidente a quel piano*). *Si riferiscano in modo noto i punti di questa alle rette* (*non ai punti*) *di* S_2 (*cioè con corrispondenza biunivoca, tale che ad ogni sezione iperpiana della superficie corrispondano in* S_2 *le rette di un inviluppo di* 2ª *classe*). *Congiungendo ogni punto della* F^4 *colla retta omologa di* S_2 *si otterranno* ∞^2 *piani costituenti la* $V_4{}^6$ *di* STUDY.

31. Dal significato geometrico che hanno, nel piano dato, il punto z e la retta u, pel punto duale $z + t\epsilon$, si trae subito quanto segue:

I punti della V situati su una stessa retta appoggiata allo S_2 ed alla F^4 son le imagini dei punti duali che hanno uno stesso nucleo ed una stessa retta sostegno. — Invece i punti duali che han comune il solo nucleo han per imagini i punti di un piano generatore della V. Quelli che stanno su una stessa retta ordinaria son rappresentati sui punti di un cono quadrico, col

di u_1, u_2, u_3; indi in luogo di $p_4 \dots p_9$ si mettono le espressioni (48); si ottengono due equazioni omogenee fra $z_1 z_2 z_3$, l'una di 2° e l'altra di 3° grado, e perciò 6 soluzioni.

Collo stesso procedimento si verifica che i punti della V_4 provenienti da $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ sono *doppi* per quella varietà.

vertice sullo S_2 (e projettante la conica di F^4, corrispondente a questo punto di S_2).

I punti della F^4, avendo nulle $p_1 p_2 p_3$, ossia $t_2 z_3 - t_3 z_2, \ldots$, corrispondono a punti duali $z + t\epsilon$, tali che i punti ordinari z e t coincidono: dunque a punti duali che si riducono a punti ordinarî.

Invece i punti dello S_2 (*punti doppi* della V, come s'è detto ([23])) avendo nulle $z_1 z_2 z_3$, corrisponderebbero a terne $z_i + t_i \epsilon$ ridotte a tre nullifici: non sono dunque imagini di punti duali del dato piano (cfr. la fine del n. 27).

32. Similmente, per rappresentare gli ∞^6 punti duali dello spazio ordinario, *nel caso parabolico*, si avrà la varietà a 6 dimensioni dello S_{15}, i cui punti han le 16 coordinate omogenee rappresentate parametricamente dalle 10 espressioni $z_i z_j$ $(i, j = = 1, \ldots 4)$ e dalle 6 p_{ij} che son coordinate di una retta dello spazio, passante pel punto z. — Ecc.

Protofili ed altre varietà analoghe. *Legami lineari fra punti duali.*

33. Come nell'ordinario campo di punti complessi si considerano quelle infinità di punti che io ho chiamato (v. nota ([3])) *fili* (∞^1), *tele* (∞^2), . . .; così si può pur fare nel campo dei punti duali. Basterà assumere le coppie di componenti delle coordinate duali (non omogenee) funzioni (analitiche, o, se si vuole, algebriche, ecc.) di 1, 2, . . . parametri ordinarî. O, in altre parole, si assumeranno come imagini, sulle varietà rappresentative introdotte nei §§ precedenti (la quadrica F, la $V_4{}^6, \ldots$), i punti di una linea, o di una superficie, ecc.

Anzitutto, sulle rette duali, si potran considerare i *protofili* (*di 1ª o 2ª schiera*), aventi per imagini sulla quadrica F (n. 23 e segⁱ) le generatrici rettilinee (risp. della 1ª o 2ª schiera). Il n. 24 dice che: *Un protofilo della 1ª schiera (o 2ª) si compone di ∞^1 punti duali aventi in comune il 1° nucleo (od il 2°).*

Se stiamo ai protofili contenuti in una retta ordinaria, la proprietà ora enunciata basta a definirli sulla retta. Ogni tal protofilo contiene sempre un punto ordinario.

Prendasi invece un protofilo della 1ª schiera su una retta duale non ordinaria. Pensando alla rappresentazione dei punti duali con projettività rettilinee, e alla retta duale come collineazione biassiale (n. 20), oppure, nel caso del n. 21, come projettività in un fascio di rette; si vede che i punti del protofilo equivalgono alle ∞^1 *projettività che un'omologia piana (di birapporto k) definisce sulle rette passanti pel centro d'omologia*: questo centro è il 1° nucleo, comune a tutti i punti duali del protofilo. Se il campo non è parabolico, il 2° nucleo descrive l'asse d'omologia, e questo non passa pel centro. Se invece il campo è parabolico, l'asse d'omologia passa pel centro d'omologia.

34. Riconosciuto così il significato geometrico dei protofili, ne deriva subito che *gli* ∞^1 *punti di un protofilo son comuni ad infinite* (∞^2) *rette duali* [24].

In fatti, se il protofilo non sta su una retta ordinaria, esso definisce, come ora s'è detto, un' omologia piana, di centro A, asse a, in un piano ω. Quest'omologia è contenuta in ∞^2 collineazioni biassiali Ω. Esse hanno a per un asse. Se A non è su a, si può scegliere come secondo asse una retta generica per A. Se A sta su a (caso parabolico), si determina invece Ω, fissando i due piani per a che contengono le rette unite di Ω uscenti da due dati punti di a, diversi da A. — D'altronde il protofilo dato sta anche sulle ∞^1 rette duali, della specie particolare del n. 21, che son rappresentate dalle ∞^1 projettività che la data omologia piana subordina entro ai fasci di rette di ω aventi i centri su a.

Se invece il protofilo sta su una retta ordinaria r, e sia per es. un protofilo della 1ª schiera, si riconosce, in base al n. 18, che tutti i suoi punti duali giaceranno in ogni retta duale rappresentata da una projettività (di birapporto k) di un fascio di raggi avente il centro nel 1° nucleo comune a tutti quei punti, e per 2° raggio unito la r. Risultano anche allora ∞^2 rette duali contenenti quel protofilo.

35. Colla locuzione “ *protofilo* „ l'osservazione del n. 15 si può enunciare così: *Due punti duali legati linearmente sono due*

---

[24] Cfr., pel caso parabolico, Predella, Nota I, n. 15.

punti di uno stesso protofilo. E dai n[i] 20, 21, 34 si ha che: *Se due rette duali distinte han comune più di un punto duale, i punti duali comuni costituiranno un protofilo.*

Si può vedere ciò anche nel seguente modo. Consideriamo, anche in questo campo, come 6 coordinate della retta duale che unisce due punti duali ξ, ξ', i determinanti

$$\rho_{ij} = \xi_i \xi_j' - \xi_j \xi_i'.$$

La retta non è determinata se queste espressioni si riducono a nullifici di una stessa schiera: vale a dire se, mettendovi al posto di ϵ il numero e_1, od e_2, esse si annullano. Ciò significa che, col cambiamento di ϵ ad es. in e_1, le ξ_i e le ξ_i' diventano due quaterne di numeri proporzionali. Ma con quella sostituzione si ottengono (n.[i] 8 e 11) le coordinate dei primi nuclei di ξ, ξ'. Dunque l'indeterminazione della retta duale di ξ e ξ' significa che coincidono per es. i primi nuclei di questi punti duali, cioè che e ξ' stanno in uno stesso protofilo.

36. Domandiamo, analogamente al n. 15, il significato di un legame lineare fra n ($= 3, 4$) punti duali $\xi, \xi', \xi'', \ldots$, cioè

$$\alpha\xi_i + \alpha'\xi_i' + \alpha''\xi_i'' + \ldots = 0 \tag{50}$$

($i = 1, \ldots 4$), coi coefficienti $\alpha, \alpha', \alpha'', \ldots$ non tutti nulli. Supponiamo anzi, per semplicità, che non vi sia già un tal legame lineare fra $n - 1$ di quei punti.

Se uno almeno dei coefficienti, per es. α, non è un nullifico, dividendo per esso le (50) si avrà che ξ è una combinazione lineare di $\xi', \xi'', \ldots$; cioè uno dei dati punti duali sta sulla retta duale, o piano duale, che congiunge i rimanenti.

Escludiamo questo caso. Allora i coefficienti $\alpha, \alpha', \ldots$ saran tutti nullifici. Dico che saranno nullifici di una stessa schiera. Se no, riunendo nella (50) in un solo i termini per cui i coefficienti son nullifici della 1[a] schiera, e in un altro quelli per cui sono della 2[a] schiera (col mettere in evidenza ad es. nei primi il fattore η_1, negli altri η_2), si verrebbe a scrivere un legame lineare tra *due* punti duali, con due coefficienti (η_1, η_2) che non sarebbero nullifici della stessa schiera: e quindi, pel

n. 15, quei due punti coinciderebbero. Ora si vede subito che questo fatto equivarrebbe a ciò che già abbiamo escluso: che uno dei punti duali dati stia sulla retta duale, o piano duale determinato dagli altri.

Sian dunque $\alpha, \alpha', \ldots$ nullifici, ad esempio, della 1ª schiera, e quindi uguali ad $a\eta_1$, $a'\eta_1, \ldots$, ove $a, a', \ldots$ son quantità ordinarie. La (50), con questa sostituzione, viene a dire che le quantità duali

$$a\xi_i + a'\xi_i' + a''\xi_i'' + \ldots$$

son nullifici della 2ª schiera; ossia s'annullano, ponendo in esse ϵ_2 al posto di ϵ. Così, analogamente al n. 15, concludiamo: *Un legame lineare* (50) *fra tre o quattro punti duali* (*senza che sian legati linearmente una parte di essi*) *significa: che sono legati linearmente* (*cioè risp.: allineati, o complanari*) *i primi nuclei di quei punti duali; ovvero i secondi nuclei.*

37. Quando un piano duale si assoggetta a passare per due, o tre punti duali dati, ognuna delle equazioni lineari omogenee, che si vengono a scrivere per le coordinate duali del piano stesso, si spezza in due equazioni ordinarie fra le quantità ordinarie, componenti di quelle coordinate. Ma le 4 o 6 equazioni ordinarie così ottenute equivalgono ad un minor numero, se i 2 o 3 punti duali son legati linearmente.

È così che per due punti duali aventi a comune il 1° (o 2°) nucleo, cioè situati in uno stesso protofilo, non passano solo ∞^2 piani duali, ma bensì ∞^3. Sono, nel caso che i due punti duali non stiano in una stessa retta ordinaria, i piani duali, che hanno per sostegno una qualunque retta appoggiata all'asse a dell'omologia piana del n. 34, e che projettano da una tal retta l'un punto duale e quindi anche l'altro. Questi ∞^3 piani duali passano per tutto il protofilo che contiene questi due punti; i piani ordinari che sono i loro secondi nuclei passano per la retta fissa a.

38. Diamo invece tre punti duali legati linearmente, cioè (n. 36) tali che, ad esempio, i loro primi nuclei siano allineati su una retta ordinaria a, senz'altra particolarità. Essi non individueranno più un piano duale.

Siano p, q, r le rette ordinarie (appoggiate ad a) sostegni dei tre punti duali, ossia delle projettività (p), (q), (r) che li rappresentano. In queste projettività ai punti d'incontro di p, q, r con una retta, ad esse incidente, diversa da a, corrisponderanno 3 punti complanari con un punto O di a. Nella stella O le omografie di fasci di raggi, ottenute proiettando le (p), (q), (r), si potran riguardare come definite dall'avere per birapporto k, come 1° elemento unito a, e per raggi omologhi le tracce sui 3 fasci di due determinati piani della stella. In conseguenza esse saran contenute in una stessa omologia della stella, avente per asse la a, e un piano d'omologia ω che conterrà i secondi elementi uniti delle dette omografie, ossia i secondi nuclei dei tre punti duali dati (e passerà quindi per a, se siamo in un campo parabolico). Da ogni retta ordinaria m del fascio $O\omega$ si projetteranno le 3 projettività (p), (q), (r) mediante una stessa omografia del fascio di piani m: vale a dire i tre punti duali dati staranno in uno stesso piano duale di asse m.

Mutando m nel fascio $O\omega$ abbiamo ∞^1 piani duali passanti per quei tre punti duali. È chiaro, pel modo come sono rappresentati, che essi formano l'ente geometrico che, per una ordinaria reciprocità o legge di dualità, corrisponde agli ∞^1 punti duali di un protofilo. E come di questi s'era detto (vedi fine del numero preced.) che stanno in ∞^3 piani duali; così quegli ∞^1 piani duali hanno in comune a due a due, non solo ∞^2 punti duali, cioè una retta duale, ma bensì una ∞^3 di punti duali determinata dai tre dati: sì che su ogni retta ordinaria appoggiata ad a sta uno di quei punti. —

Per combinazione lineare (con coefficienti duali) di due punt duali aventi in comune il 1° (o 2°) nucleo, non si ottengono tutti i punti duali di una retta duale, ma solo quelli di un protofilo. Similmente, per combinazione lineare di tre punti duali aventi i primi (o secondi) nuclei allineati, si ottengono non già gli ∞^4 punti duali di un piano duale, ma solo ∞^3 punti duali, disposti in generale nel modo anzi detto, e comuni ad ∞^1 piani duali.

39. Altri casi più particolari di eccezioni, indeterminazioni, ecc., nella Geometria lineare, si posson presentare. Citiamo solo il caso che sian dati tre punti duali, legati linearmente

fra loro a due a due, pel fatto di aver comune il 1° nucleo O, senza ulteriori particolarità. Allora le tre omografie rettilinee (p), (q), (r) che li rappresentano stanno in una determinata omologia spaziale di centro O. Le ∞^2 projettività che questa subordina sulle rette ordinarie passanti per O, dànno i punti duali che son combinazioni lineari dei tre dati; essi risultano ora ∞^2, anzi che ∞^4 come nel caso generale, e ∞^3 come nel caso del numero precedente. Le ∞^2 rette ordinarie del piano d'omologia son sostegni dei piani duali passanti pei tre punti duali dati (e quindi per tutta quella ∞^2): i quali piani sono ora ∞^2, anzi che uno solo come s'avrebbe se quei tre punti fossero generici, od ∞^1 come avveniva nel caso del n. 38.

Se il campo duale è parabolico, l'ente così ottenuto, di ∞^2 punti duali e ∞^2 piani duali, può riguardarsi come una *degenerazione della retta duale*, nel senso in cui l'omologia solida *speciale*, ossia *parabolica*, può considerarsi come degenerazione della collineazione biassiale ad assi coincidenti. Non così, se il campo non è parabolico.

Projettività e antiprojettività nel campo duale.

40. Si ponga, fra le coordinate omogenee di due punti duali variabili ξ, ξ', una sostituzione lineare a coefficienti duali

$$\xi_i' = \sum_j \alpha_{ij}\xi_j \,. \tag{51}$$

Si avrà una *collineazione duale* tra due spazi. Questa corrispondenza godrà di proprietà analoghe a quelle delle ordinarie collineazioni. Così essa muterà *in generale* le rette duali ed i piani duali in rette duali e piani duali; i gruppi armonici in gruppi armonici; ecc.

Ma le collineazioni duali non trasformeranno in generale, come le collineazioni ordinarie, i punti ordinari in punti ordinari, ecc. Esse dipendono da un numero di parametri ordinari doppio di quello delle collineazioni ordinarie. Si riducono a queste ultime (ampliate coll'applicarle anche agli elementi duali), quando i coefficienti α_{ij} della sostituzione si riducono a numeri ordinari.

Una proprietà, che si prova per le collineazioni duali come l'analoga per quelle ordinarie, è quella di lasciare invariato il

birapporto duale. Se cioè su una retta duale s'introduce una coordinata duale non omogenea, intendiamo per *birapporto di 4 punti duali della retta* quello delle loro 4 coordinate $\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta$, vale a dire

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = \frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\beta-\gamma)(\alpha-\delta)}.$$

Quando il campo duale non è parabolico, ponendo (n. 5) $\alpha = a_1\eta_1 + a_2\eta_2$, ecc., quel birapporto duale risulta uguale a

$$(a_1 b_1 c_1 d_1)\,\eta_1 + (a_2 b_2 c_2 d_2)\,\eta_2;$$

ossia è dato da due birapporti ordinari, quello dei primi nuclei e quello dei secondi nuclei, dei 4 punti duali. Se invece il campo è parabolico, si trova che, oltre al birapporto dei 4 nuclei vi è da considerare un altro numero ordinario, la cui definizione è meno immediata ([25]).

41. Come nella ordinaria geometria complessa ([26]), così nel campo attuale si potranno anche introdurre le *anticollineazioni duali.* Esse si definiscono, ponendo che le coordinate del punto duale ξ' siano date forme lineari dei numeri duali *coniugati* (n. 6) alle coordinate del punto duale ξ: cioè ponendo una collineazione duale tra i punti ξ' ed i coniugati (n. 14) dei punti ξ (o viceversa).

Per queste corrispondenze varranno in parte le proprietà accennate (n. 40) delle collineazioni duali. Ma, ad esempio, non saranno più invarianti per esse i birapporti duali: essi si mutano nei numeri duali coniugati.

Analogamente si definiranno le *reciprocità duali* e le *antireciprocità duali.* Le riuniamo alle corrispondenze precedenti, coi due nomi di *projettività duali* e *antiprojettività duali.*

42. Sostituendo nelle equazioni che, come le (51), dànno quelle varie corrispondenze, al posto di ϵ la quantità ordinaria e_1 od e_2; si vede che, per esempio, una collineazione duale deter-

---

([25]) Cfr. Study, *Geometrie der Dynamen*, pag. 241 e seg.; Grünwald (citato in ([2])), pag. 99 e seg.; Predella, Nota I, n.i 38 e seg., Nota II, n.i 87, 88.

([26]) V. oltre la Mem.a cit.a in ([3]) le 4 Note su *Un nuovo campo di ricerche geometriche*, negli "Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino", vol. 25 e 26 (1890).

mina una collineazione ordinaria tra i primi nuclei dei punti duali omologhi, ed una collineazione ordinaria tra i secondi nuclei. Invece un' anticollineazione duale, di cui siano ξ, ξ' i punti duali omologhi, pone (v. la fine del n. 14) una collineazione ordinaria tra i primi nuclei dei ξ ed i secondi nuclei dei ξ', ed una pure tra i secondi nuclei dei ξ ed i primi nuclei dei ξ'.

Se il campo duale non è parabolico, ciò definisce completamente le collineazioni duali, come anche le anticollineazioni duali.

43. Rappresentiamo il campo dei punti duali di una retta, ordinaria o duale, su una quadrica F, come ai n.i 23 e 24. Una projettività duale di quella retta porrà una projettività ordinaria tra le generatrici della 1ª schiera di F, ed una tra le generatrici della 2ª schiera. Se dunque non siamo nel caso parabolico, le ∞^6 projettività duali della retta saran rappresentate dalle ∞^6 collineazioni *di 1ª specie* di F in sè. Le ∞^6 collineazioni *di 2ª specie*, cioè quelle che scambiano tra loro le due schiere di generatrici, saranno invece le imagini delle antiprojettività duali della retta.

Nel campo dei numeri parabolici non si può più dire così. Ed in fatti, quando la quadrica è un cono, le collineazioni che la trasformano in sè salgono a ∞^7, mentre ancora rimangono ∞^6 le projettività e antiprojettività duali della retta.

Cerchiamo, appunto nel caso parabolico, la rappresentazione analitica delle ∞^6 trasformazioni del cono quadrico F, corrispondenti a queste projettività e antiprojettività duali. Indichiamo, come al n. 22, con

$$z_1 + z_2\epsilon\,, \qquad z_3 + z_4\epsilon$$

le due coordinate omogenee duali dei punti duali della retta, ove ora supporremo

$$\epsilon^2 = 0\,.$$

La sostituzione lineare, o projettività, duale sarà:

$$(52)\quad \begin{cases} z_1' + z_2'\epsilon = (a_1 + b_1\epsilon)(z_1 + z_2\epsilon) + (a_2 + b_2\epsilon)(z_3 + z_4\epsilon) \\ z_3' + z_4'\epsilon = (a_3 + b_3\epsilon)(z_1 + z_2\epsilon) + (a_4 + b_4\epsilon)(z_3 + z_4\epsilon) \end{cases}$$

donde si trae

$$(53)\quad \begin{cases} z_1' = a_1 z_1 + a_2 z_3 \\ z_3' = a_3 z_1 + a_4 z_3 \\ z_2' = b_1 z_1 + a_1 z_2 + b_2 z_3 + a_2 z_4 \\ z_4' = b_3 z_1 + a_3 z_2 + b_4 z_3 + a_4 z_4 \end{cases}$$

[Le prime due formole di questa quaterna dànno la trasformazione projettiva ordinaria che subiscono i nuclei $(z_1 z_3)$ dei punti duali]. Formando ora, per mezzo delle formole (45), le coordinate dei punti p, p' del cono F, che sono imagini dei due punti duali fra loro omologhi sulla retta data, e sostituendo nelle espressioni delle p'_i le (53), si ha:

$$(54)\quad \begin{cases} p_1' = a_1^2 p_1 + a_2^2 p_2 + 2a_1 a_2 p_3 \\ p_2' = a_3^2 p_1 + a_4^2 p_2 + 2a_3 a_4 p_3 \\ p_3' = a_1 a_3 p_1 + a_2 a_4 p_2 + (a_1 a_4 + a_2 a_3)\, p_3 \\ p_4' = (13)\, p_1 + (24)\, p_2 + [(14) + (23)]\, p_3 + A p_4 , \end{cases}$$

ove si è posto

$$(55)\qquad (ij) = b_i a_j - b_j a_i , \qquad A = a_1 a_4 - a_2 a_3 \ \text{([27])}.$$

Le (54) rappresentano una collineazione che muta F in sè. Essa dipende dalle 2 quaterne di parametri a e b. Ma dividendo i secondi membri per $a^2{}_4$, si mettono in evidenza come 6 parametri essenziali i 3 rapporti delle a, ed i 3 primi coefficienti della quarta equazione.

Queste ∞^6 collineazioni del cono son le imagini delle projettività duali della retta. Quanto alle antiprojettività, si ricordi (n[i] 26, 27) che due punti duali coniugati (di una retta ordinaria) hanno per imagini due punti p di F differenti solo pel segno della p_4 (ossia corrispondenti in una determinata omologia

---

([27]) Nella Mem.ª cit.ª del Grünwald, che studia a fondo la rappresentazione del campo binario duale parabolico sul cono quadrico, si trovano le formole (54), a pag. 90.

armonica che ha per centro il vertice del cono). Basta dunque, per avere le collineazioni imagini delle antiprojettività duali della retta, che nelle (54) si cambi la A, che compare nella quarta, in $-A$.

44. È facile caratterizzare geometricamente il gruppo G_6 di collineazioni, che abbiamo rappresentato colle equazioni (54).

Trasformiamo con una reciprocità, o legge di dualità nello spazio: sì che il cono F si muti nel cerchio imaginario all'infinito. Il gruppo di tutte le ∞^7 omografie che trasformano questo cerchio in sè è il gruppo delle similitudini. Entro esso, com'è noto ([28]), esiste un solo sottogruppo G_6 che non tenga fisso un punto del cerchio: è il G_6 dei movimenti. Sarà dunque questo l'omologo del G_6 projettivo di prima. *Le projettività duali della retta si rispecchiano nei movimenti dello spazio, quando si assumano come imagini dei punti duali della retta (in luogo dei punti di* F*) i piani tangenti al cerchio assoluto* ([29]).

Ora i moti dello spazio si possono ottenere come prodotti di rotazioni intorno a rette, ed ogni tal rotazione si può scomporre nel prodotto di due simmetrie rispetto a piani per l'asse: sicchè ogni moto è il prodotto di un numero pari di simmetrie rispetto a piani. Considerando queste simmetrie come omologie armoniche, e ritornando poi, con passaggio inverso, al primitivo cono quadrico F, concludiamo: *Il gruppo* G_6 *delle collineazioni del cono quadrico* F, *che sono imagini delle projettività duali della retta, si compone di quelle collineazioni che son prodotti di un numero pari di omologie armoniche trasformanti* F *in sè, vale a dire proiezioni del cono su se stesso da punti esterni.*

Ed ora subito possiamo dire (cfr. la fine del numero precedente): *Le antiprojettività duali della retta hanno per imagini quelle collineazioni del cono quadrico che si possono ottenere come prodotti di un numero impari di projezioni* ([30]). — Nello spazio

---

([28]) V. Lie (und Engel), *Theorie der Transformationsgruppen*, III. Band, 1893, pag. 214 e 218.

([29]) Cfr. Grünwald, pag. 109.

([30]) Le ultime due proposizioni valgono pure nel caso non parabolico, poichè, com'è ben noto, ogni trasformazione collineare in sè di una quadrica, *che non sia un cono*, è un prodotto di projezioni (in numero pari o dispari, secondo che la collineazione è di 1ª o di 2ª specie).

euclideo di poc'anzi si avrebbe così un numero dispari di simmetrie rispetto a piani: e quindi, come imagini delle antiprojettività duali della retta, le *uguaglianze inverse* o *movimenti di* 2ª *specie.*

Infine osserviamo che, se la data retta è ordinaria, le ∞^3 projettività e antiprojettività ordinarie saranno rappresentate da quelle fra le collineazioni considerate, che tengon fisso il piano $p_4 = 0$ (cfr. la fine del n. 26).

Avvertenze finali.

45. A questo punto credo bene di troncare la trattazione che già è riuscita fin troppo lunga. Aggiungerò solo poche osservazioni.

Anzi tutto, chi confronti le cose precedenti con quelle di altri miei lavori citati, vedrà subito come in questa *Geometria duale* si potrebbero continuare le ricerche parallele a quelle dell'ordinaria Geometria complessa: ad esempio, trattando le projettività e antiprojettività duali che riescono *involutorie*; i luoghi dei punti duali uniti; gli enti analoghi alle *catene*, alle *iperconiche* ed *iperquadriche*, ecc., e le intersezioni di questi enti; come pure le questioni generali sulle varietà di punti duali (cfr. il principio del n. 33), e l'ampliamento che si può fare delle ordinarie curve, superficie, ecc., coll'aggiungere ai loro punti ordinari altri punti duali ([31]).

Se il campo di numeri duali non è parabolico, si otterrà una sorta di *geometria delle coppie di punti ordinari* (cfr. n. 11 e altrove). Molte cose, ma non tutte, coincideranno allora, in sostanza, colla citata geometria complessa ordinaria, ove s'introducano anche quelli che ho chiamato *punti bicomplessi* (che si posson rappresentare come coppie ordinate di punti complessi).

Non così se il campo è parabolico. Allora s'incontreranno differenze più profonde. Non sempre vengon facilmente le proprietà relative al caso parabolico come limite di quelle del caso generale delle coppie di punti. Quindi si capisce che la geometria duale parabolica, come l'algebra dei corrispondenti numeri duali,

---

([31]) Esempio di ciò si ha, per le coniche ordinarie, in PREDELLA, Nota I, n.ⁱ 46, 47; e poi per curve qualunque nella Nota II, n.ⁱ 80 e seg.ⁱ.

abbia un'importanza a sè. La rappresentazione geometrica dei punti duali, che in quel caso fa il PREDELLA colle projettività rettilinee paraboliche, acquista perciò un interesse speciale ([32]).

46. D'altra parte è pur d'uopo rilevare come alcune delle ricerche di cui si parla nel presente lavoro si trovino già avviate o svolte, sotto un'apparenza un po' diversa, in quelli del sig. STUDY e di alcuni suoi discepoli ([33]).

Si prendano, in un campo duale ternario, le tre coordinate omogenee

$$\xi_1 = x_1 + y_1 \epsilon , \qquad \xi_2 = x_2 + y_2 \epsilon , \qquad \xi_3 = x_3 + y_3 \epsilon .$$

Esse si posson moltiplicare per un fattore duale $a + b\epsilon$, e così si trasformano in $x_i' + y_i' \epsilon$, ove le x', y' son date dalle (18) del n. 7. Ciò posto, s'interpretino le 6 quantità $x_1\, x_2\, x_3\, y_1\, y_2\, y_3$ come coordinate omogenee di un complesso lineare di rette, nello spazio ordinario. Il concetto di *punto duale* di un dato piano riuscirà rappresentato da quel complesso lineare, anzi da tutto *un fascio di complessi lineari* (rappresentati dalle $x_i'\, y_i'$, col parametro variabile $a : b$). In particolare si avrà come imagine la *coppia di rette* che sono gli assi dei due complessi speciali del fascio: rette che risultano fra loro *polari rispetto ad una quadrica fissa* (da assumersi come *assoluto*: ellittico, iperbolico, parabolico, secondo la specie dei numeri duali).

([32]) Prima di finire, sarà bene avvertire che il sig. PREDELLA è giunto alle sue projettività paraboliche, cercando le imagini geometriche dei numeri non-Archimedei. Quando si trattano i numeri duali parabolici $a + b\epsilon$ (ove a e b sian reali) con $\epsilon^2 = 0$, vien naturale di chiamare ϵ un *infinitesimo* (attuale), rispetto all'unità ordinaria, in quanto che le sue potenze superiori alla 1ª sono $= 0$. Così quei numeri $a + b\epsilon$ appajono come *non-Archimedei.*

([33]) V. specialmente, oltre la *Geometrie der Dynamen*, e lo scritto del GRÜNWALD citato in ([2]), le seguenti tre Dissertazioni:

J. COOLIDGE, *Die dual-projektive Geometrie im elliptischen und sphärischen Raume*, Greifswald, 1904.

E. DAVIS, *Die geometrische Addition der Stäbe in der hyperbolischen Geometrie*, Greifswald, 1904.

H. BECK, *Die Strahlenketten im hyperbolischen Raume*, Hannover, 1905.

Si può anche consultare con vantaggio l'esposizione che il sig. G. FANO fa delle ricerche dello STUDY a pag. 325-339 della *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, III 1, Heft 2, 1907.

È appunto in questo modo che, prima lo Study, e poi gli altri Autori citati furon condotti a rappresentare il campo delle coordinate omogenee duali, per mezzo della Geometria delle rette e dei complessi lineari: sicchè i *punti duali* (di un piano), che io ho trattato qui direttamente, o per mezzo della rappresentazione con omografie rettilinee (di dato birapporto), sono sostituiti in quei lavori da *raggi* dello spazio ordinario, o da fasci convenienti di complessi lineari, ecc. ([34]). Per questi enti geometrici vengono considerate le *collineazioni e anticollineazioni duali*, come pure le *catene* a cui alludevo nel n° prec., taluni *fili* (n. 33), ecc. ecc. — Chi volesse proseguire nell'indirizzo da me tracciato, dovrebbe cominciare col tradurre in proposizioni sui *punti duali* quelle che in Study e negli altri compajono come proposizioni sui *raggi*, ecc.

In questa traduzione si dovrà tener conto della differenza, dipendente dai gruppi di trasformazioni che sono a fondamento: poichè, mentre io ho considerato le cose dal lato *projettivo*, quegli Autori trattano varie sorta di geometrie *metriche* (euclidee e non-euclidee).

Il raffronto indicato porterà anche, seguendo gli esempi notevoli dati dallo Study, e continuati poi dalla sua scuola, a ricercare il modo di *render chiuso*, nel caso parabolico, l'aggregato dei nostri punti duali coll'aggiungergli altri enti convenienti. Il fatto che, nel detto caso, quell'aggregato non è chiuso è legato all'altro: che nella definizione (n. 7) dei punti duali si son dovuti escludere quei gruppi di valori delle coordinate omogenee, che son nullifici di una stessa schiera ([35]).

([34]) Nel caso dei numeri duali parabolici, del quale principalmente si occupa lo Study (appunto in causa dell'importanza sua speciale), si ottiene nell'ordinario spazio euclideo un fascio di complessi lineari coassiali. — Nell'Appendice alla *Geometrie der Dynamen* (v. pag. 557 e seg.[i]) si prendono poi *quattro* variabili duali omogenee come coordinate di un “ *Soma* „, ossia una delle ∞^6 posizioni di un corpo rigido: sicchè questo ente fornisce una rappresentazione geometrica, diversa dalla nostra, dei punti duali *dello spazio*.

([35]) Si terrà presente che appunto da ciò provenivano gli elementi *eccezionali*, nelle rappresentazioni geometriche dei campi di punti duali parabolici, rilevati alla fine dei n.[i] 27 e 31.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSI UNITE

Adunanza del 4 Febbraio 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: Naccari, Direttore della Classe, D'Ovidio, Segre, Jadanza, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Grassi e Fusari. — È scusata l'assenza del Vice Presidente Camerano;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Renier, Pizzi, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli e De Sanctis, Segretario. — Scusa l'assenza il Socio Carle.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi Unite, 28 gennaio 1912.

Il Presidente comunica i ringraziamenti del Ministro della R. Casa, a nome di S. M. il Re, per l'omaggio del vol. LXI della 2ª serie delle *Memorie* accademiche.

Legge poi le lettere con cui i proff. Ezio Levi ed Eugenio Donadoni ringraziano del premio Gautieri ad essi conferito.

Si procede quindi al conferimento del premio Vallauri. Approvata con voto unanime la divisione proposta dalla Giunta, si vota a schede segrete sui nomi dei candidati.

Risultano vincitori, con pienezza di voti, del premio Vallauri di scienze fisiche (quadriennio 1907-1910) i signori:

Jean Perrin di Parigi, per l'opera: *Mouvement brownien et réalité moléculaire*;

Augusto Righi di Bologna, per l'opera: *La materia radiante ed i raggi magnetici*, ed altri scritti sullo stesso argomento.

Entrano i Soci Chironi e Foà.

Si passa quindi al conferimento del premio Bressa, e si vota a schede segrete sui singoli nomi proposti dalla Giunta pel premio stesso.

Dalla votazione risulta vincitore del XVII premio (internazionale) di fondazione Bressa pel quadriennio 1907-1910 il prof. Riccardo Willstätter di Zurigo, per i suoi importanti lavori di chimica organica e specialmente sulla clorofilla.

Si procede alla nomina della prima Giunta pel XVIII premio Bressa (nazionale, quadriennio 1909-1912). Le Classi votano separatamente.

La Giunta rimane costituita per la Classe di scienze fisiche dai Soci Naccari, Guareschi, Camerano e Fusari; per la Classe di scienze morali dai Soci De Sanctis, Renier, Ruffini e Sforza.

Il Socio Foà presenta gli " Atti del 1º Congresso dei Patologi tenutosi in Torino nell'ottobre 1911 ", rilevando il numero e l'importanza delle memorie che vi son pubblicate.

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre,
Gaetano De Sanctis.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza dell'11 Febbraio 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SALVADORI, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI e SEGRE, Segretario.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente comunica i telegrammi di ringraziamento inviati dai signori PERRIN, RIGHI, WILLSTAETTER, per i premi Vallauri e Bressa ad essi conferiti dall'Accademia. Comunica inoltre un invito dell'Accademia di Scienze naturali di Filadelfia, alle feste centenarie della sua fondazione.

Il prof. G. LOCKEMANN ha inviato, come speciale omaggio alla nostra Accademia, un suo opuscolo: *Zum hundertjährigen Jubiläum von Avogadros Hypothese.*

Il Socio MATTIROLO offre in dono la *Relazione di Perizia* scritta da lui e dai Proff. CUBONI e NASINI per la causa *Garroni contro Società Anonima di lavorazione dei Carboni Fossili in Savona.*

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

SOMMARIO

Classi unite.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi Unite.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLVII, Disp. 8ª e 9ª, 1911-1912.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 25 Febbraio 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: SALVADORI, D'OVIDIO, JADANZA, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, MATTIROLO e SEGRE Segretario. — Scusano l'assenza i Soci PARONA e FUSARI.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Si dà comunicazione delle lettere con cui i proff. PERRIN, RIGHI e WILLSTAETTER ringraziano l'Accademia per i premi Vallauri e Bressa ad essi conferiti.

Infine è presentato un invito dell'Università di Dublino (Collegio medico) alle feste bicentenarie della sua fondazione, che si celebreranno il 5 e 6 luglio prossimo.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 3 Marzo 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE BARONE ANTONIO MANNO
DIRETTORE DELLA CLASSE.

Sono presenti i Soci: Renier, Pizzi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza del Socio Carle.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 18 febbraio 1912.

Si comunicano i ringraziamenti delle sorelle del compianto Socio Rossi signorine Emilia ed Olimpia.

Si partecipa una lettera d'invito del Comitato del III Congresso archeologico internazionale (Roma, 1912). Si designa il Socio De Sanctis a rappresentarvi ufficialmente l'Accademia.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 10 Marzo 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Peano, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Parona, Grassi, Fusari e Segre Segretario. — Scusano l'assenza i Soci D'Ovidio e Camerano.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Fra le pubblicazioni inviate in dono all'Accademia, vien segnalato il vol. II dell'opera di T. J. J. See, *Researches on the Evolution of the Stellar Systems*.

Il Socio Parona presenta per la stampa negli *Atti* una sua Nota, *Rudiste della Scaglia veneta*; ed il Socio Peano una Nota di Annibale Pastore, *Le definizioni matematiche secondo Aristotele e la Logica matematica*.

Il Socio Grassi, anche a nome del collega Naccari, legge la Relazione sulla Memoria del Dr. A. G. Rossi, *Apparecchi galvanometrici ed elettrometrici per corrente alternata a vibrazioni torsionali di risonanza in fili metallici*. Con votazione unanime si accolgono le conclusioni di quella Relazione, per l'accoglimento della Memoria nei volumi accademici.

LETTURE

Rudiste della *scaglia* veneta.

Nota del Socio CARLO FABRIZIO PARONA.

(Con 1 Tav. e 2 figg. nel testo).

In altra mia pubblicazione ho riassunto i dati, conosciuti fino al 1903 (1), relativi alla *scaglia* cretacea veneta; essi furono successivamente arricchiti col notevole contributo portato dall'Airaghi (2) alla conoscenza degli echinidi e degli inocerami, che ne confermò l'età senoniana, e per i risultati, del pari pregievolissimi, delle ricerche istituite dallo Squinabol (3) sulla fauna a radiolarie. Poco finora si conosce sulle Rudiste, che pure concorrono a costituire la fauna di questo terreno, e che meritano particolare considerazione per la verifica dei rapporti faunistici e cronologici, che questa facies del Cretaceo superiore presenta colla serie superiore dei calcari di scogliera posturoniani del Veneto orientale. Sfortunatamente il materiale di studio è assai scarso; ed infatti, mentre i frammenti minuti di rudiste sono piuttosto abbondanti nella *scaglia*, vi sono invece assai rari gli esemplari riconoscibili genericamente o specificamente. E ciò non sorprende, se si considera che il mare nel quale si depositava il finissimo fango calcareo-argilloso, col quale doveva costituirsi la *scaglia*, non poteva essere un ambiente favorevole

(1) C. F. Parona, *Trattato di Geologia*, con speciale riguardo alla Geologia d'Italia, Vallardi, 1903, pag. 542 e seg.

(2) C. Airaghi, *Inocerami del Veneto*, " Boll. d. Soc. Geol. Ital. ", vol. XXIII, 1904, pag. 179. — Id., *Echinidi della* scaglia *cretacea veneta*, " Mem. R. Acc. d. Sc. di Torino ", Ser. 2ª, t. LIII, 1903. — Id., *Un nuovo genere* (Paronaster) *della famiglia delle Echinocorinee*, " Atti d. Soc. It. di Sc. Nat. ", vol. XLV, 1906.

(3) S. Squinabol, *Radiolarie cretacee degli Euganei*, Padova, 1904.

allo sviluppo delle rudiste, molluschi proprii della facies di scogliera (1).

Un altro fatto concorre a dimostrare che la presenza delle rare rudiste vi è sporadica, accidentale; ed è il carattere della fauna a foraminiferi della *scaglia*, completamente diversa da quella caratteristica dei calcari di scogliera con rudiste dell'Urgoniano, del Turoniano e del Senoniano. Invece della fauna di tipo bentonico a miliolidi, troviamo nella *scaglia* una microscopica fauna planctonica a globigerine, ricca di esemplari, ma piuttosto povera di generi ed uniforme, come ho potuto verificare esaminando sezioni sottili di *scaglia* di parecchie località, preparate con pezzi staccati dalla roccia avvolgente le rudiste. Alle minutissime globigerine si associano delle orbuline ed altre forme riferibili ai generi cristellaria, trochammina, discorbina, planorbulina ecc.

Questa facies di fauna a foraminiferi persiste in tutta la *scaglia*, anche nella parte d'età eocenica, e corrisponde a quella, pure ricchissima di individui, che si trova nel calcare rosso marnoso a *Rhynchonella polymorpha* di Spilecco, ma con la importante differenza, che in quest' ultima compaiono scarse nummuliti, e precisamente, come mi riferisce il prof. P. L. Prever, la coppia *Bruguieria bolcensis* Mun.-Chalm. e *Br. spileccensis* Mun.-Chalm.

La questione del limite fra la *scaglia* cretacea e quella eocenica, e della difficoltà di riconoscere e fissare questo limite, è sempre aperta tanto per le Prealpi quanto per l'Appennino Centrale, sebbene sia dibattuta da lunghi anni. Fu argomento di discussioni nelle memorabili Riunioni degli Scienziati Italiani, specialmente in quelle di Firenze del 1841 e di Genova del 1847, come risulta dai resoconti delle adunanze della sezione di Geologia, che tanto interesse presentano per la storia dello sviluppo degli studi geologici in Italia, e che ancora si leggono con molto profitto per le numerose e importanti notizie che vi sono raccolte. Le discussioni, cui presero parte Pasini, Catullo, Collegno, Michelin, Pareto, Coquand, Ewald, dirette a chiarire le incertezze sui rapporti e limiti fra Cretaceo e Eocene, por-

(1) Ved. altre considerazioni in: C. F. Parona, *Nuovi studii sulle Rudiste dell'Appennino*, " Mem. d. R. Acc. d. Sc. di Torino ", vol. LXII, pag. 278.

tarono alla proposta del Lamarmora di istituire un premio di 500 franchi da assegnare alla migliore e completa monografia dei terreni nummulitici dell'Europa meridionale. Il progresso fatto di poi nella conoscenza delle orbitoidi e delle nummuliti, ed in generale dei grandi foraminiferi caratteristici del Cretaceo e dell'Eocene, ha in parte risolto il problema, nel senso di stabilire una sicura base paleontologica per i riferimenti cronologici; ma la delimitazione stratigrafica e topografica resta tuttora incerta, nelle Prealpi e nell'Appennino, per molte aree di affioramento di terreni a facies di *scaglia*, che in qualche punto invade anche il Miocene.

Ritornando alle Rudiste della *scaglia* veneta, devo aggiungere che ebbi in esame lo scarso materiale di studio dalla cortesia dei colleghi Taramelli, De Stefani e Dal Piaz, i quali mi comunicarono gli esemplari dei musei di Pavia, Firenze e Padova. Era mio vivo desiderio di studiare anche la rudista trovata nella *scaglia* dei Monti Euganei, e descritta come ippurite dal Da Rio (1); ma la direzione del Museo Civico di Padova, dove l'esemplare si conserva, non accolse la richiesta da me fatta per averlo in prestito a scopo di studio.

Il risultato delle mie ricerche si riassume nel seguente breve elenco di forme, fra le quali soltanto le due prime si prestano alla conferma dell'età senoniana della *scaglia*, perchè le altre risultano nuove o specificamente indeterminabili.

Praeradiolites Hoeninghausi (Desm.)
Radiolites mamillaris Math.
„ *biosculatus* (Cat.)
Distefanella Rossii n. f.
Durania Spadai n. f.
„ f. ind.
Hippurites (cfr. (Orbignya) *Toucasi* d'Orb.)
„ (cfr. (Vaccinites) *cornuvaccinum* Bronn)

(1) N. Da Rio, *Intorno ad una ippurite ritrovata nella scaglia dei Monti Euganei*, " Atti d. I. R. Ist. Veneto „, 1843-44, pag. 366.

***

Praeradiolites Hoeninghausi (Des M.).

1907. A. Toucas, *Étud. sur la classificat. et l'évolut. des Radiolitidés*, " Mém. Soc. G. d. Fr. „, Paléont., tome XIV, pag. 34 (ved. sinon.).

Un grande esemplare di valva inferiore, con forma di cono basso, rapidamente allargantesi, obliquo, con apertura a margine ampio, leggermente declinante verso la cavità interna e provvisto di cresta legamentare. Il guscio, di grande spessore nella parte dorsale, si assottiglia nella regione sifonale. L'erosione ha in gran parte distrutti i caratteri ornamentali dei fianchi, ponendo in evidenza la successione delle lamine assai sottili e stipate.

È un radiolitide assai diffuso nel Senoniano superiore (Campaniano).

L'esemplare fu raccolto nella scaglia roseo-chiara di Possagno (A. Rossi). Museo di Pavia.

Radiolites mamillaris Math.

Tav., figg. 1, 2, 3,

1842. Matheron, *Catalogue des Foss. des Bouches-du-Rhône*, pag. 122, tav. VII, figg. 6 e 7.
1847. D'Orbigny, *Pal. Franç., Terr. crét.*, pag. 218, tav. 560.
1908. A. Toucas, *Sur la classification et l'évolut. des Radiolitidés*, " Mém. Soc. Géol. d. Fr. „, Paléont., tome XVI, pag. 66, fig. 37 e 38, tav. XII, figg. 12-15.

È uno dei radioliti più comuni nella *scaglia*, ma gli esemplari determinabili con sicurezza sono rari. Ho in esame quattro esemplari di valva inferiore, due dei quali in buone condizioni di conservazione. Ma il più grande, di Mezzano veronese, alto mm. 140 e largo all'apertura da 65 a 75 mm., si allontana alquanto dal tipo. — La forma regolarmente conica appare più allungata di quanto non risulterebbe in realtà se l'erosione non avesse troncato la parte esterna espansa delle lamine, rendendo meno evidente il carattere della successione degli imbuti, formati dalle lamine, ed imboccantisi l'un l'altro. La figura 12 di Toucas è quella che meglio corrisponde a questo esemplare; ma la costulatura è più fitta. Tuttavia il margine dell'apertura a grosse pieghe radianti, colla pronunciatissima cresta legamentare L, ben corrisponde a quanto si osserva nel *Rad. mamil-*

laris; ed altrettanto si può dire dei due seni ineguali, più largo e manifesto l'anteriore E, meno evidente e più stretto il posteriore, separati da quattro pieghe nella parte più allargata, presso l'apertura.

Il *Rad. mamillaris* è comune nel Santoniano. (R. Museo di Padova).

Radiolites biosculatus (Cat.).

Tav., figg. 4, 5.

1856. *Ventriculites biosculata.* T. A. Catullo, *Dei terreni di sedimento super della Venezia e de' fossili bryozoari, antozoari e spongiari ai quali dànno ricetto* (Padova), pag. 84, tav. XIX, fig. 15.

Valva inferiore conico-allungata, spessa, più lunga che larga, ornata da coste assai robuste, subacute, uniformi, distinte fin dall'apice e che leggermente arcuandosi, decorrono obliquamente rispetto all'asse verticale della valva. Lamine esterne non molto spesse, aderenti l'un l'altra, pieghettate secondo la costulatura longitudinale, a struttura cellulare fine, poco distinta. Per l'erosione subìta dagli esemplari, la successione embricata delle lamine appare meno evidente di quanto deve essere negli esemplari non erosi. La cresta legamentare è ben pronunciata; il largo margine, o labbro, dell'apertura è subradiato, cioè liscio nella zona interna ed increspato nella esterna in corrispondenza delle coste e della pieghettatura delle lamine. Le due inflessioni dei seni poco distinte, sono subeguali e strette, l'anteriore E meno, e separata da una robusta piega dalla posteriore S alquanto infossata. Valva superiore sconosciuta.

È una forma robusta e che raggiunge notevoli dimensioni: il più grande esemplare da me esaminato, e sformato da compressione, ha una altezza di circa mm. 170, col diametro all'apertura di circa mm. 95. Il radiolite che meno si discosta da esso per la robustezza della costulatura, è il *Rad. styriacus* (Zitt.) (1), nella sua forma tipica cilindroide; ma la regolarità delle coste ed il loro andamento incurvato e con tendenza quasi spirale

---

(1) Zittel, *Die Bivalven der Gosaugebilde*, " Denk. d. k. Akad. d. Wiss. ", Wien, Bd. XXV, 1865, pag. 151, tav. 26, figg. 5, 6 (*Sphaerulites*). — A. Toucas, *Ét. s. la class. et l'évol. des Radiolit.*, 2me part., " Mém. S. G. Fr. ", Paléont., T. XVI, 1908, pag. 67, figg. 39, 40.

danno alla nostra forma più regolarmente conica una fisionomia caratteristica.

L'esemplare meglio conservato è lo stesso che fu descritto e figurato da Catullo come *Ventriculites biosculata*, denominazione prescelta in considerazione della presenza di due aperture, quella grande, propria della valva e l'altra, accidentale, alla sua base, dovuta a rottura. Come già osservai per altre figure delle opere di Catullo, anche quella del *Ventriculites biosculata* è simmetrica rispetto al fossile che rappresenta.

Il Catullo nota che esso proviene dalla *calcaria* (Turoniano) *del Piné nell'Alpago sopra Belluno*, della quale egli descrisse altre rudiste, da me recentemente riprese in esame; ma risulta in modo evidente dalla natura della roccia, nella quale fu impietrito il fossile, ch'esso trovavasi nella *scaglia* e non nel caratteristico calcare compatto bianco del Piné. (R. Museo di Padova).

Distefanella Rossii n. f.

Tav., fig. 6.

Valva inferiore assai allungata, esile, subprismatica, flessuosa, incompleta ai due capi e tuttavia lunga più di mm. 250, larga all'estremità superiore mm. 55 diametro massimo, e mm. 38 diametro minimo; ha sezione irregolarmente triangolare, guscio assai sottile, di color scuro, con struttura cellulare-fibrosa, con rari canali o lacune. Il fianco è ornato da coste longitudinali, rilevate, arrotondate, subeguali, separate da solchi alquanto più stretti della loro base, liscie, trasversalmente segnate da fine linee di accrescimento decorrenti a zig-zag; a lunghi intervalli ed allo stesso livello sono bruscamente interrotte per ineguaglianza nello spessore del guscio. I due seni E, S corrispondono agli angoli situati all'estremità del lato minore del triangolo, dato dalla sezione trasversa, coincidenti con due sinuosità al margine della cavità interna; risultano di tre coste, le due esterne alquanto più sviluppate delle altre che ornano

Fig. 1 (Sezione trasversa di due valve aderenti).

il fianco, e la media meno rilevata; l'interfascia è larga, comprende tre coste, è leggermente concava e depressa fra i due seni (fig. 1).

Questa forma, dall'aspetto di ippurite, nell'insieme dei suoi caratteri corrisponde molto bene al gen. *Distefanella* da me istituito nel 1901 (1) per un gruppo di radiolitidi del Turoniano di S. Polo Matese, e successivamente rettificato. Differisce per le sue grandi dimensioni dalle quattro forme turoniane da me distinte, avvicinandosi, più che alle altre, alla *Distef. Bassanii* per il carattere della sezione triangolare. Nulla posso dire dei caratteri dell'apparato cardinale, nè del setto, che nelle altre forme separa nettamente una cavità dorsale da quella ventrale, non avendone trovato traccie nella porzione di valva a mia disposizione. Non si conosce la valva superiore.

L'esemplare proviene dalla *scaglia* roseo-chiara di Possagno (A. Rossi). R. Museo di Pavia.

Durania Spadai n. f.

1904. C. F. Parona, *Una rudista della* scaglia *reneta*, " Atti della R. Accad. d. Sc. di Torino ", vol. 39, tav., figg. 1 *a*, *b*, 2, 3.

Le osservazioni recentemente pubblicate da Toucas sulla *Sauvagesia Mortoni* (Mant.) e sulla *Sauvagesia austinensis* (Roem.) (2), spettanti al gen. *Durania* secondo la classificazione di Douvillé (3), dimostrano che si tratta di due forme ben distinte, la prima assai antica, al limite fra il Turoniano ed il Cenomaniano, l'altra più recente, del Santoniano. Risulta inoltre dallo studio dello stesso autore, che non tutte le figure del Dixon (4) rappresentano la *Hippurites Mortoni* Mantel, e che precisamente la figura 5

---

(1) C. F. Parona, *Le Rudiste e le Camacee di S. Polo Matese*, " Mem. d. R. Acc. d. Sc. di Torino ", vol. L, pag. 205. — Id., *Nuovi studi sulle Rudiste dell'Appennino (Radiolitidi)*, ibid., 1911, vol. LXII, pag. 283.

(2) A. Toucas, Op. cit., 1909, pag. 92 e 96.

(3) H. Douvillé, *Étud. sur les Rudistes de Sicile, d'Algérie, d'Égypte, du Liban et de la Perse*, " Mém. S. G. d. Fr. ", Paléont., T. XVIII, 1910.

(4) F. Dixon, *The Geology and Fossils of the Tertiary and Cretaceous Formations of Sussex*. London, 1850, pag. 354, tav. XXVI.

rappresenta un frammento del *Radiolites austinensis* Roemer (1). Così precisati i caratteri della *Durania Mortoni* e la sua posizione stratigrafica ed età, devo riconoscere che il riferimento da me fatto nel 1904 di una rudista della *scaglia* veneta alla forma di Mantel non è ammissibile, e devo correggere l'errore nel quale fui indotto appunto per la confusione fatta dagli autori fra le due sauvagesie di Mantel e di Roemer. È invece una bella forma nuova, certamente affine alla *Durania Mortoni*, ma tuttavia distinta per i caratteri dell'ampio margine dell'apertura, e segnatamente per la differenza nella costituzione delle due fascie corrispondenti ai seni, che sono di diversa larghezza, non subeguali come nella *D. Mortoni*, e occupate da numerose e fine costelline. — Questa nuova forma di Magré, Novale e Valdagno è evidentemente diversa dalla *D. austinensis*, e non è il caso di procedere ad un confronto.

La figura della tavola IV dello Spada (2) rappresenta probabilmente un esemplare di questa forma, e ciò mi induce a distinguerla col nome di questo naturalista che, per il primo, fin dalla prima metà del 1700 fermò la sua attenzione sulle rudiste della *scaglia*.

(R. Museo di Padova).

Durania f. ind.

Valva inferiore conico-allungata libera nel fianco dorsale, compresa nel calcare col fianco sifonale. Il fianco libero è sciupato dalla erosione, ma rimane quanto basta per riconoscere un'ornamentazione a grosse coste lungitudinali separate da solchi stretti, e nell'insieme un aspetto simile a quello delle ippuriti, come si nota in parecchie altre Duranie. I caratteri della regione sifonale si possono osservare soltanto colla sezione trasversa, che mette in vista delle particolarità singolari, oltre la struttura cellulare, nettamente reticolata. Il guscio nella regione sifonale si assottiglia assai; i seni sono profondamente

(1) F. Roemer, *Die Kreidebildungen von Texas und ihre organischen Einschlüsse.* Bonn, 1852, pag. 77, tav. VI, fig. 1.

(2) J. J. Spada, *Corporum Lapidefactorum Agri veronensis Catalogus* (Editio altera). Veronae, 1744, pag. 43, tav. IV.

infossati, specialmente il posteriore S che è affatto concavo, mentre l'anteriore E è piano, portato da un basso rilievo fra due solchi e più largo; l'uno e l'altro portano le traccie di fine filettatura; il guscio in corrispondenza del seno posteriore S si incurva fortemente verso l'interno, interrompendo in questa parte l'andamento quasi regolarmente circolare del margine della cavità interna; l'interfascia forma un rialzo, a quanto pare, con tre coste (fig. 2).

La rientranza interna alla regione sifonale, in corrispondenza al seno posteriore S, è simile a quella che nella *Bournonia Bournoni* accompagna l'interfascia, e l'insieme dei caratteri della regione stessa dànno una impronta speciale a questa forma, probabilmente nuova: tuttavia, in vista del cattivo stato di conservazione dell'esemplare, credo opportuno di lasciarla specificamente indeterminata.

Fig. 2.

Fu raccolta dal prof. C. De Stefani nella scaglia bianca di Gallio nei Sette Comuni. (R. Museo di Firenze).

Hippurites sp. (cfr. *H.* (Orbignya) *Toucasi* d'Orb.).

Esemplare di valva inferiore, incompleta e deformata da compressione, con parziale conservazione dei caratteri interni, per cui il riferimento alla *Orbignya Toucasi* non ha che il significato di probabilità.

Raccolto dal compianto E. Nicolis nella scaglia rossa di Valecchia-S. Cristina (Veronese). (R. Museo di Torino).

Hippurites sp. (forma del gruppo del *H.* (Vaccinites) *cornuvaccinum* Bronn).

Frammento specificamente indeterminabile.

Raccolto dal compianto A. Rossi nella scaglia bianco-rosea di Possagno (R. Museo di Pavia).

DESCRIZIONE DELLA TAVOLA

Figg. 1, 2, 3. — *Radiolites mamillaris* Math. (var.).
„ 4-5. — *Radiolites biosculatus* (Cat.).
„ 6. — *Distefanella Rossii* n. f.

Le definizioni matematiche secondo Aristotele e la Logica matematica.

Nota di ANNIBALE PASTORE.

L'elaborazione logica delle scienze esatte, che è un vanto delle moderne teorie, ha messo in evidenza una questione che mi sembra sommamente interessante.

Gli autori della Logica matematica hanno formulato una teoria scientifica della definizione e sopratutto della definizione in matematica, e la maggior parte di essi opina che questa teoria sodisfa poco alla teoria aristotelica della definizione.

Ultimamente il Peano in una importantissima Memoria " Le definizioni in matematica „ (Institut de Ciencias, Barcelona, 1911) ha trattato la teoria delle definizioni matematiche, proponendosi di verificare se le definizioni matematiche sodisfino o no alle regole insegnate in Logica scolastica e a quali regole speciali sodisfino; quindi credo di far cosa grata ai filosofi ed ai matematici apprezzando punto per punto i risultati di questa trattazione dell'autorevole fondatore della scuola italiana di Logica matematica, per riconnettere i due estremi momenti della Storia della Logica e restituire ad Aristotele il suo merito. Le considerazioni che seguono furono scritte appunto con questo proposito e per invito dell'illustre Prof. G. Peano, a cui sommamente importa la libera critica in servigio della verità.

§ I. La prima regola riferita dalla Memoria del Peano è la seguente: *Ogni definizione è un'eguaglianza.* Questa regola è veramente capitale al metodo matematico.

Siccome è noto che i matematici annettono all'eguaglianza la proprietà *riflessiva* ($a = a$), *simmetrica* ($a = b$ è lo stesso che $b = a$) e *transitiva* (se $a = b$ e $b = c$ allora anche $a = c$), segue che anche per la definizione, sussistono queste medesime proprietà. Ma, considerando che la proprietà transitiva ha luogo solo quando una definizione sia posta in relazione con un'altra, e applicando

le due prime proprietà dell'eguaglianza alla definizione, noi diremo, — per la prima —, che " ogni ente della Def. è eguale a sè stesso „ — per la seconda — che " in ogni Def. si può sostituire il definito al definiente e reciprocamente „.

Ora circa la questione se questa prima regola della definizione — " *ogni definizione è un'eguaglianza* „ — con l'indicazione delle sue proprietà sia stata enunciata da Aristotele in modo esplicito o no (1), si possono fare le considerazioni seguenti. Anzitutto non risulta che Aristotele sia giunto a distinguere il concetto dell'eguaglianza da quello delle sue proprietà, benchè le varie proprietà dell'eguaglianza si trovino qua e là indicate per incidenza nelle sue opere e in due casi distinti, cioè, sia isolatamente, sia applicate al concetto della definizione. Nel primo caso poi l'eguaglianza è per l'ordinario confusa con " nè maggiore nè minore „. Questa espressione adombra la proprietà riflessiva. Però non risulta che Aristotele sia giunto a riconoscere che " eguale non significa nè maggiore nè minore „. Nel secondo caso la ricerca è agevolata da parecchi passi, i quali provano che Aristotele considera ogni definizione come un'eguaglianza, in primo luogo insistendo col " nè maggiore nè minore „ che ha rapporto colla proprietà riflessiva, in secondo luogo riconoscendo la sostituibilità, che è poi principio della proprietà simmetrica, come criterio della definizione.

Ciò posto, ecco in proposito le citazioni di Aristotele.

1° *Analyt. post.* II, 13, Bekker: (*Τῶν δὴ ὑπαρχόντων ἐν τῷ ὁρισμῷ*) *ἕκαστον μὲν ἐπὶ πλεῖον ὑπάρξει, ἅπαντα δὲ μὴ ἐπὶ πλέον· κ. τ. λ.* Il Trendelenburg traduce: " Eorum quidem, quae definitionem constituunt, unumquodque latius patebit, omnia vero conjuncta rem *exaequabunt*: etc. „; cioè: Delle note di una definizione ciascuna per sè si estende più del concetto (definito), ma *tutte insieme non si estendono di più*. Il Trendelenburg ha tradotto senz'altro " exaequabunt „ in modo certo un po' arbitrario. Ma il passo seguente toglierà ogni dubio in proposito.

2° *Δῆλον γὰρ ὅτι οὔτε πλεῖον πρόσκειται· πάντα γὰρ ἐν τῷ τί ἐστιν εἴληπται τούτων· οὔτε ἀπολείπει οὐδέν· ἢ γὰρ γένος*

(1) Il PEANO riconosce che questa regola si trova implicita in Aristotele e cita i due passi *Top.* VI, 1, *idem* VII, 7, nei quali l'espressione aristotelica è veramente indeterminata.

ἡ διαφορὰ ἂν εἴη (*Analyt. post.* II, 12): " Nam perspicuum est, quod (hac ratione) neque abundet definitio, quum omnia horum ratione eius quid est sumpta sint, nec deficiat aliquid; si quidem aut genus, aut differentia fuerit „.

Qui è evidentemente espressa la proprietà riflessiva e in modo diretto applicata al caso della definizione (1).

3° Ἔστι δὲ χαλεπώτατον τὸ ἀντιστρέφειν τὴν ἀπὸ τοῦ συμβεβηκότος οἰκεῖαν ὀνομασίαν... Ἀπὸ μὲν γὰρ τοῦ ὅρου, καὶ τοῦ ἰδίου καὶ τοῦ γένους ἀναγκαῖον ἀντιστρέφειν (*Top.* II, 1): " Difficillimum autem est convertere appellationem propriam ab accidente (ductam)..... A definitione autem et a proprio et genere conversionem institui necesse est „.

Qui è in modo esplicito riconosciuta la necessità che la definizione (ὅρος) goda della proprietà simmetrica dell'eguaglianza, essendo notissimo che, per Aristotele, *ἀντιστρέφειν* un giudizio significa porre il soggetto nel luogo del predicato, e il predicato nel luogo del soggetto (2).

4° Un altro passo, che riconferma la necessità dell'*ἀντιστρέφειν* nel caso della definizione, è il seguente, in cui, dopo

---

(1) Quanto al concetto dell'eguaglianza espresso qui con " *οὔτε πλεῖον πρόσκειται, οὔτε ἀπολείπει οὐδέν* = neque abundet definitio, nec deficiat aliquid „, cfr. i passi segg. che determinano, senza ambiguità, il senso di *ἴσον* con queste e siffatte perifrasi:

τὸ ἴσον πρὸς μὲν τὸ ἔλαττον μεῖζον πρὸς δὲ τὸ μεῖζον ἔλαττον,

quod aequale est, cum eo quod minus est comparetur maius est, sin cum majore minus (*Eth. Nic.* II, 8);

τὸ ἴσον· τοῦ μὲν ἐλάττονος μεῖζον, του δὲ μεῖζονος δὲ ἔλαττον,

aequale minore quidem majus, majore vero minus (existit) (*Eth. eud.* II, 3);

καθάπερ τὸ ἴσον καὶ τὸ μέτριον τῷ ὑπερέχοντι καὶ τῷ ὑπερεχομένῳ,

quemadmodum aequale et mediocre (opponitur) ei quod exsuperat et ei quod superatur (*Natur. auscul.* VIII, 7);

τὸ δ᾽ ἴσον μέσον τι ὑπερβολῆς καὶ ἐλλείψεως,

aequum autem quidem medium est inter excessum et defectum (*Eth. Nic.* II, 6);

τοῦτο δ᾽ ἐστὶ τὸ ἴσον· ἐν ὁποίᾳ γὰρ πράξει ἐστὶ τὸ πλέον καὶ τὸ ἔλαττον,

hoc autem aequum (seu aequale); in quacumque enim actione plus est et minus (*Eth. Nic.* V, 3).

(2) Cfr. insup. *Analyt. pr.* I, 2; *Top.* VIII, 12. — Per ὅρος = definitio, cfr. *Analyt. pr.* I, 27.

d'aver parlato del sillogismo e della definizione, si conchiude: *ταῦτα δ' ἀνάγκη ἀντιστρέφειν* (*Analyt. post.* II, 4): " Haec vero necesse est reciprocari „.

Per queste citazioni l'accordo tra la Logica aristotelica e la Logica matematica sopra la prima regola della definizione (*ogni definizione è un'eguaglianza*) risulta dimostrato.

§ II. Assodato questo primo punto, passiamo ad un'altra ricerca. Secondo il Vailati la regola *per genus et differentiam* è " priva di valore intrinseco „ (1). Il Couturat scrive: " ...les concepts géométriques ne sont jamais définis *per genus et differentiam*, mais le plus souvent *per generationem* „ (2); e altrove: " ...les concepts de nombres ne se laissent pas définir *per genus et differentiam*, ni décomposer en facteurs logiques, ils ne se laissent pas non plus combiner par le procédé de la multiplication logique. Cela ne prouve qu'une chose: l'étroitesse et l'insuffisance de la Logique classique „ (3). Il Peano, trattando espressamente della regola aristotelica, riconosce che " qualche definizione matematica sodisfa alla regola aristotelica. Ma — aggiunge — tale regola si può applicare al più alla definizione di una classe. ...Perciò la regola del *genus proximum et differentia specifica*, che non si applica nella maggioranza dei casi, non può essere una regola „ (4).

---

(1) Vailati, *Aggiunte alle note storiche del " Formulario „* R. d. M., Tom. VIII, N. 3, pag. 59.

(2) Couturat, *Les principes des Mathématiques*, Paris, Alcan, 1905, p. 290.

(3) Id., ib , pag. 262.

(4) Peano, *Le def. in mat.*, pag. 4-5. Il Vailati ha cercato di salvare in certo modo l'autorità di Aristotele affermando che: " è a Porfirio, se non anche a qualche più antico commentatore, che andiamo debitori dell'enunciazione della nota regola che " ogni def. debba procedere *per genus et differentiam* „, regola la quale, oltrecchè priva di valore intrinseco non poteva trovare appoggio nell'autorità di Aristotele, il quale parla anzi più d'una volta delle varie *differentiae* (*διαφοραί*), che possono figurare in una stessa definizione „ (Cfr. *Aggiunte* etc. l. c.). Lo stesso concetto trovasi ribadito in *La teoria aristotelica della definizione*, Rivista di Filosofia e scienze affini, Nov.-dic. 1903. Ma è evidente che al Vailati sfuggì il notissimo passo aristotelico: *ὁ ὁρισμὸς ἐκ γένους καὶ διαφορῶν ἐστιν*, *Top.* I, 8, ed altri analoghi come: *Δεῖ γὰρ τὸ μὲν γένος ἀπὸ τῶν ἄλλων χωρίζειν, τὴν δὲ διαφορὰν ἀπό τινος τῶν ἐν τῶ αὐτῷ γένει* (*Top.* VI, 3); *Δεῖ μὲν διὰ τοῦ γένους καὶ τῶν διαφορῶν ὁρίζεσθαι τὸν καλῶς ὁριζόμενον, ταῦτα δὲ τῶν ἁπλῶς γνω-*

Ma questa questione del valore della seconda regola aristotelica *per genus et differentiam* non può essere accuratamente ridotta senza nuove indagini, tanto sulla natura del processo definitorio in matematica, quanto sul significato della regola aristotelica.

Discutiamo questi due lati della questione.

Sappiamo da (I) che ogni definizione è un'eguaglianza.

È noto altresì che non ogni eguaglianza è una definizione. Per esempio, delle numerosissime eguaglianze in pag. 34-35 del *Formulario mathematico*. Editio V, due sole sono date come definizioni. Quindi si possono determinare le condizioni che devono essere sodisfatte affinchè un'eguaglianza sia una definizione possibile, Dfp del *Formulario*, pag. 14.

Queste condizioni (proprietà caratteristiche della definizione) si ricavano dalla definizione della definizione.

Per definizione s'intende una proposizione della forma

$$x = a$$

ove x è il segno (o gruppo di segni) che si vuol definire, a è un gruppo di segni noti, vale a dire " un'espressione composta con parole o segni supposti prima noti „ (1).

Avendo già fatto in (I) l'analisi del segno $=$, facciamo l'analisi del segno a, cioè del definiente.

Per definiente s'intende " un gruppo di segni noti „.

a) Cominciamo dal termine " gruppo „. Di questo termine si distinguono tre significati. " Gruppo „ in alcune teorie significa classe; in altre " gruppo di funzioni „ o " classe di operazioni „ tale che il prodotto funzionale di due individui di essa appartenga alla classe stessa; in altra, successione di segni noti. Possiamo ridurre ad uno i due primi significati, ponendo che " ogni definiente = classe „ (sia che si tratti di classi di indi-

---

ϱιμωτέϱων καὶ πϱοτέϱων τοῦ εἴδους ἐστίν (*Top.* VI, 4). Dai quali passi anche si rileva che la pluralità possibile delle differenze è in modo esplicito indicata da Aristotele col plurale *διαφοϱῶν*. Però i successori di Aristotele, sostituendo il singolare al plurale, vollero certo significare " tutto ciò che costituisce la differenza specifica „ nel definiente. Così non si distaccano dallo spirito del maestro.

(1) Peano, *Le def. in mat.*, pag. 3.

vidui, sia che si tratti di classi di funzioni e operazioni espresse in una proposizione). Il riconoscimento di questo senso lato del concetto “ classe „ è richiesto dal concetto stesso della definizione, sempre che non si voglia intendere per definizione una pura e semplice imposizione di nomi a cose già note, ma più tosto la determinazione di talune proprietà sufficienti a qualificare i definiti in ordine ai fini deduttivi che si vogliono raggiungere (1). La semplice imposizione di nomi ha luogo nelle definizioni della matematica superiore; in matematica elementare invece, come avverte il Peano, la definizione è la classificazione ordinata delle idee e dei nomi che già si hanno.

Il terzo significato del termine “ gruppo „ importa che i segni noti del definiente siano, non uno, ma più. Ora, per la definizione della definizione, è noto che questi segni devono insieme sodisfare a quelle condizioni che trasformano una eguaglianza in una definizione possibile. Con questo non si vuol dire che tra i segni noti del definiente passi ancora una relazione o una condizione. Scrivendo, ad es.,

$$3 = 2 + 1,$$

fra i segni 2, +, 1 passa nessuna relazione, nessuna condizione. Soltanto si vuol notare che non si vede perchè l’espressione “ $3 = 2 + 1$ „ dovrebbe essere considerata come una definizione qualora i segni “ 2, +, 1 „ non fossero *precisati antecedentemente*, e che è questa la condizione del gruppo di cui si tratta.

Ciò posto, siccome è noto che data una condizione risulta determinata una classe e viceversa, segue che anche il terzo significato del termine gruppo si riduce a classe. Esprimiamo questo risultato, dicendo che “ gruppo di segni noti „ significa “ classe (in senso lato) di segni noti „, e assorbendo nel terzo i due anzidetti significati del termine “ gruppo „.

Passando ora alla teoria aristotelica della definizione, basta notare che Aristotele attribuiva al termine “ *γένος* „ del definiente quel medesimo significato che qui si attribuisce al termine “ classe „. È vero che questo senso fu poi mascherato da

(1) M. Pieri, *Della Geometria elementare come sistema ipotetico-deduttivo*, Mem. Accad. R. delle scienze di Torino, 1898-99, pag. 173-174 in *nota*.

una fitta aggiunta di interpretazioni filosofiche, che hanno fatto perdere di vista lo scopo principale e la portata strettamente logica della regola aristotelica. In questo ha perfettamente ragione il Vailati di scrivere nel suo studio sopra *La teoria aristotelica della definizione*: “ Per ciò che riguarda poi le successive variazioni di significato che i suddetti termini tecnici della logica aristotelica (*γένος, ὅρος, ἴδιον, συμβεβηκός*) hanno subíto nel passare, dalla scolastica, nella nomenclatura filosofica moderna, è da notare come la parola “ genere „ (insieme s'intende alle sue corrispondenti in ciascuna lingua colta moderna) ha perduta pressochè ogni traccia del senso tecnico particolare che Aristotele aveva tentato di attribuirle „ (1).

Da questa breve discussione si vede che ancora non cessa la corrispondenza fra la teoria aristotelica e la teoria logico-matematica quanto all' interpretazione di questa proprietà del definiente, atteso che “ *γένος* = gruppo = classe „ in senso lato, cioè comprendente ogni sorta di enti (numeri, classi, proposizioni, condizione, relazione, ecc.) che si possono classificare in ordine ai fini che si vogliono ottenere.

b) Ma occorre estendere l'analisi anche all' espressione “ termini (enti o segni) prima noti „.

Immediatamente si scorge l'equivalenza di questa espressione con quella aristotelica: *Δεῖ μὲν διὰ τοῦ γένους καὶ τῶν διαφορῶν ὁρίζεσθαι τὸν καλῶς ὁριζόμενος, ταῦτα δὲ τῶν ἁπλῶς γνωριμωτέρων καὶ προτέρων τοῦ εἴδους ἐστίν* (*Top.* VI, 4): “ Qui scite definit, eum oportet ex genere et differentiis definire: haec enim in eorum numero sunt, quae sunt ipsa specie *et notiora et priora* simpliciter „ (T.). Aristotele dice esplicitamente che il genere e le differenze del definiente sono *γνωριμώτερα καὶ πρότερα τοῦ εἴδους*, cose più note e prima del definito. Che poi l'applicazione di questo criterio (della precedente notizia dei termini del definiente) al caso delle operazioni matematiche sia intesa e voluta dallo stesso Aristotele, appare dalla citazione seguente: *Πᾶσα διδασκαλία καὶ πᾶσα μάθησις διανοητικὴ, ἐκ προϋπαρχούσης γίνεται γνώσεως. φανερὸν δὲ τοῦτο θεωροῦσιν ἐπὶ πασῶν· αἵ τε γὰρ μαθηματικαὶ τῶν ἐπιστημῶν διὰ τούτου*

(1) Vailati, *La teoria aristotelica della definizione*, Rivista di filosofia e scienze aff., 1903, Nov.-dic., estr. pag. 9-10.

τοῦ τρόπου παραγίνονται καὶ τῶν ἄλλων ἑκάστη τεχνῶν (*Analyt. post.* I, 1): “ Omnis doctrina et omnis disciplina, quae quidem in ratione est posita, ex antecedenti fit cognitione; id quod considerantibus patebit universas; nam hoc modo et mathematicae scientiae existunt et ceterarum artium unaquaeque „ (T.). “ Ogni insegnamento ed ogni apprendimento razionale si fa mediante una cognizione antecedente. Ciò è evidente a chi consideri tutte le scienze; poichè è in tal modo che si formano le matematiche e ciascuna delle rimanenti arti „. — Le citazioni aristoteliche poi che confermano questo punto (*definitio per priora et notiora fieri debet*) sono così numerose ed esplicite che resta impossibile ogni dubio.

c) Resta infine da esaminare l'ultimo punto relativo alla questione della “ *differenza* „, che è capitale nella teoria aristotelica, ma non appare nella teoria moderna.

Dire che ogni definizione ha la forma:

definito = definiente,

ove il secondo membro è un gruppo di segni noti, non significa che *un gruppo qualunque* di segni basti a costituire il definiente. E nè pure basterebbe dire che in ogni caso “ il definiente deve essere eguale al definito „, giacchè se il definito non è che un nome, invano si cerca di attribuire un senso alla necessità di *eguagliare* una formula di segni noti ad un nome. Occorre invece tener conto, non del nome che tiene il posto del definito, ma di *quell'*ente che è individuato dalla formula scritta del definiente e a cui si vuole imporre il nome del definito. Occorre insomma riconoscere che il secondo membro della definizione ha un valore in sè, sia o non sia un numero o una classe di individui, o un gruppo di operazioni, o una pura successione di segni noti.

Chiamando “ differenza „ (*διαφορά*) quel valore (condizione, proprietà, classe in senso lato) del definiente che serve a differenziare il definito, cioè ad individuarlo fra gli altri enti possibili, cioè designabili pure con un gruppo di segni noti (*γένος*), si ottiene l'accordo tra la teoria moderna della definizione, e la teoria aristotelica anche su questo punto.

Valendoci di queste riduzioni, facendo cioè alla prima condizione generica della “ precedente notizia dei segni noti „ cor-

rispondere il γένος e alla seconda condizione specifica di " quel valore che serve a caratterizzare il definito „ la *διαφορά*, ed eguagliando il definito al prodotto logico di queste due classi in senso lato, risulta che ogni definizione può assumere la forma:

$$x = \gamma\acute{\epsilon}\nu o\varsigma \frown \delta\iota\alpha\varphi o\varrho\acute{\alpha}.$$

Raccogliendo i risultati della discussione sui tre punti *a)* *b)* *c)* che compongono il definiente, si ottiene la determinazione delle proprietà caratteristiche della definizione, cioè di quelle condizioni che devono essere sodisfatte affinchè la definizione non si confonda coll'eguaglianza, essendo noto che non ogni eguaglianza è una definizione.

Inoltre si scorge che la prima regola (*ogni definizione è un'eguaglianza*) costituisce il γένος di ogni definizione, la seconda regola (prodotto logico del γένος e della *διαφορά*) costituisce la *διαφορά*.

Ciò posto, consideriamo alcuni esempj.

Sia la definizione del Numero primo:

" Numero primo = Numero divisibile solo per sè e per l'unità „.

Il definiente può interpretarsi così: " Numero „ = genere prossimo; " divisibile solo per sè e per l'unità „ = differenza specifica.

Sia la definizione comune del numero *e* base dei logaritmi neperiani, riportata dal Peano (*Le def.*, etc., pag. 1):

$$e = lim\,(1 + 1/\mathrm{m})^{\mathrm{m}} \textit{ per } \mathrm{m} \textit{ infinito}.$$

Parrebbe naturale lo scrivere:

$$e = Numero \frown lim\,(1 + 1/\mathrm{m})^{\mathrm{m}} \textit{ per } \mathrm{m} \textit{ infinito}.$$

Ma questa scrittura darebbe luogo a parecchie improprietà opportunamente rilevate dal Peano. Anzitutto è da notare che l'aggiunta di *numero* a *limite* in generale può essere inesatta e qui è oziosa; tanto varrebbe aggiungere *numero irrazionale anzi trascendente compreso fra 2 e 3*, tutte proprietà che discendono dalla definizione usata da tutti i matematici. Inoltre è contrario alle convenzioni della logica matematica lo scrivere il segno ⌒

fra *numero* e *lim*, perchè $\cap$ si scrive solo per classi, e *lim* non è una classe. Però si possono evitare queste improprietà scrivendo:

$$e = \overline{\iota}\,[Numero \cap \iota\, lim\,(1 + 1/m)^m \text{ per m infinito}]$$

e di Eulero è *quel* numero che è *il* limite, ecc.

Così, malgrado l'apparente difficoltà della traduzione, l'esempio su detto è ricondotto all'interpretazione aristotelica; giacchè coi due segni $\overline{\iota}$ e ι (ἴσος) l'aggiunta *numero* diventa giustificabile, e per conseguenza il genere e la differenza restano designati senza ambiguità.

Analogamente può interpretarsi la definizione della costante di Eulero riferita dal Peano, e in generale ogni definizione matematica, avvertendo però che è necessario esplicare i termini quando siano sottintesi nel definiente, come per l'ordinario accade. Si ammetterà che non è questo un sotterfugio per completare ad ogni costo l'equivalenza delle due teorie. Il procedimento da seguirsi per interpretare aristotelicamente le definizioni in matematica è quindi indicato senza incertezza, ed è valido per tutti i casi.

Consideriamo ora brevemente una objezione che si potrebbe rivolgere contro questa tesi.

Si dirà che, mentre Aristotele dichiara, come fu già riferito più sopra, che: “ Delle note di una definizione ciascuna per sè si estende più del concetto (definito), ma tutte insieme non lo superano „, date le Df. seguenti:

$$2 = 1 + 1\,, \qquad \pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right),$$

invano si cerca che ogni idea del secondo membro sia più estensiva del primo, e che il tutto non lo sia di più.

Ma applicando i criterj anzi detti la cosa cambia. Infatti, anzitutto bisognerà tradurre aristotelicamente queste definizioni, aggiungendo al secondo membro la nota della classe “ Numero „, cioè di quella classe o gruppo generico (γένος) di cui si tratta.

Quindi bisogna scorgere in “ $1+1$ „ e in “ $4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right)$ „ un gruppo di parole o segni prima noti.

Ma dire “ gruppo di segni prima noti „ significa, come vedemmo, “ γένος τῶν προτέρων καὶ γνωριμωτέρων.

La duplice condizione della “ classe „ e della “ precedente e maggiore notizia „ dei segni del definiente non è scritta nelle due definizioni:

$$2 = 1 + 1, \qquad \pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right),$$

tuttavia deve essere sodisfatta in entrambe “ per definizione della definizione „, altrimenti le due espressioni non sarebbero che due eguaglianze.

Analogamente la condizione della “ *διαφορά* „ sussiste per la semplice posizione di quella relazione o condizione “ $1 + 1$, $4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right)$ „ che sussiste per tutti i segni noti del gruppo posto e basta ad individuare il definito, indicandone il valore, cioè il modo specifico della sua costruzione.

Quanto alla maggior estensione d'ogni idea del secondo membro in confronto del definito, è evidente che — rispetto al genere “ Numero „ — la cosa non ha bisogno di dimostrazione, perchè “ 2 „ non è che “ un individuo della classe Numero „; e analogamente dicasi di “ π „.

Rispetto poi alla differenza che vien costituita dalle espressioni “ $1 + 1$ „ e “ $4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots\right)$ „, l'anzidetta condizione della “ precedente e maggiore notizia „ supposta nei segni del definiente significa a punto che ogni segno del definiente deve avere estensione maggiore del definito.

Quanto infine alla condizione che tutti insieme abbiano estensione nè maggiore nè minore del definito, bastano gli schiarimenti ed i passi aristotelici riferiti per la regola dell'eguaglianza (§ I).

In conclusione, anche il secondo punto sembra saldamente stabilito da quanto precede. Per conseguenza, bisogna guardarsi dal credere che la teoria aristotelica della definizione per genere e differenza non abbia diritto di essere apprezzata alla luce di quelle condizioni necessarie e sufficienti che costituiscono la validità d'ogni definizione scientifica.

§ III. Consideriamo ora rapidamente dodici questioni minori o almeno laterali. rispetto al confronto che vogliamo stabilire.

1ª È noto che Aristotele classifica le definizioni in *reali* e *nominali*. Ora in P. (*Le def. in mat.*, pag. 4) si afferma che " in matematica tutte le definizioni sono nominali „. Ma sarà forse utile ricordare che con tal classificazione Aristotele lascia affatto impregiudicata la questione della natura e del valore nominale o reale delle definizioni matematiche. Aristotele non nega che tutte le definizioni matematiche siano nominali, non afferma che in matematica vi siano definizioni reali. La classificazione aristotelica accennata ha senso metafisico; quindi su questo punto non può riscontrarsi il minimo disaccordo con la teoria moderna della Logica-matematica.

2ª Si afferma che " Aristotele combatte le *definizioni negative* „ mentre " le definizioni negative sono numerose in matematica e sono generalmente considerate esatte „ (Cfr. P., *op. cit.*, pag. 5). E si adduce il fatto che Aristotele combatte la definizione della linea adottata da Euclide: *Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές*. Ma è d'uopo ritenere che Aristotele critica questa definizione anche perchè ritiene che il definiente non sia *γνωριμώτερον* nè *πρότερον* del definito. E questo s'accorda *forse* con quello che afferma la Memoria a pag. 6, " conviene certo far a meno delle definizioni di *linea* e di *retta*, che sono oggi sempre più controverse „. Infine è da notarsi che se è vero che " sonvi in Matem. definizioni negative perfettamente rigorose „, questa affermazione non è punto contraria alla teoria di Aristotele, anzi non è che prettamente ed esplicitamente aristotelica, perchè Aristotele non esclude la possibilità delle def. negative. Tanto è vero che egli scrive: *δεῖ δὲ μὴ λανθάνειν ὅτι ἔνια ἴσως οὐκ ἔστιν ὁρίσασθαι ἄλλως, οἷον τὸ διπλάσιον ἄνευ τοῦ ἡμίσεος, καὶ ὅσα καθ' αὑτὰ πρός τι λέγεται . . . Top.* VI . 4; Sed nonnulla fortasse aliam definiendi viam non habere latere non debet, velut duplum sine dimidio et omnium, quae per se ad aliquid referuntur, alterum sine altero intellegi non potest, cioè: Ma non si nasconda che alcune cose non possono altrimenti definirsi; per esempio, il doppio non si definisce senza la metà, e delle cose relative, l'una senza l'altra, etc. Donde segue che anche le defin. negative Legendre-Cantor, p. e., sono coerenti

alla dottrina aristotelica perchè il curvo e il retto, il semplice e il composto, l'infinito e il finito sono concetti relativi, cioè tali " che l'uno non può conoscersi senza l'altro „ *ὥστε ἀδύνατον ἄνευ θατέρου θάτερον γνωρίζειν*.

3ª Un altro tratto interessantissimo messo in luce dalla teoria moderna è quello che riguarda *l'esistenza della cosa definita*. Non si dice che Aristotele affermi " che si deve solo definire cose esistenti „, ma si critica giustamente l' opinione di Stuart Mill il quale, avendo a punto quest' idea, " parte dalla definizione di cosa non esistente e, supponendola esistente, arriva a risultato assurdo „. Ora il Peano, in questo, s' accorda con Aristotele. Ma per comprendere bene questo punto si rifletta sul significato della non esistenza della cosa definita, secondo il Peano. Molto ragionevolmente egli osserva che " la parola *esiste* ha più significati. La classe nulla rappresenta una classe in cui non esistono individui, ma essa esiste; così il numero *0* può indicare o l'assenza di grandezza o la grandezza *0*. In pratica conviene determinare non solo cose esistenti, ma importanti „ (pag. 6). Da ciò risulta che quelle cose non esistenti di cui si dànno in matematica numerose definizioni, non esistono nel senso della sussistenza ovvero esistenza concreta e reale, ma tuttavia sono; attesochè, *essere* ed *esistere*, non possono, in siffatto contrasto, prendersi nel senso che loro è comune, senza equivoco. Ma questa distinzione è famigliare ad Aristotele, il quale non confonde mai l'*essentia* (*τὸ τί ἐστιν*) con l'*exsistentia* (*τὸ εἶναι*). A significare l'essenza Aristotele usò diverse maniere di dire come *οὐσία*, *τὸ ὅτι*, *τὸ τί ἦν εἶναι* (che nel medioevo viene detta *quiditas*, quidità) e criticò gli antichi che trascurarono di definirla. I passi poi che provano che, secondo Aristotele, queste cose benchè non esistenti materialmente come oggetti reali sono tuttavia definibili scientificamente, sono numerosissimi (Cfr. per tutti: *δρισμὸς μὲν γὰρ τοῦ τί ἐστι καὶ ουσίας* (*Analyt. post.*, II, 3)). Questa dichiarazione significa che le cose, non esistenti, ma essenti, sono oggetto della definizione.

4ª e 5ª. Rispetto alle *definizioni delle cose chiare* e alle *definizioni finite*, nulla si trova nella teoria moderna che non si accordi colla teoria aristotelica. Quanto all' osservazione del Poincaré " che non si debbano mai introdurre enti che non si possano definire completamente con un numero finito di parole „

(P., *Le d. in m.*, pag. 7) è forse non inutile avvertire che le definizioni che involgono l'idea dell'infinito si applicano certo ad un numero infinito di *individui*, mentre ciò non importa che esse debbano esser composte di un numero infinito di parole. Siccome nelle def., come osserva Leibniz, *de ideis loquimur non de individuis*, segue che il numero finito delle parole componenti il definiente non impedisce che il definito si applichi ad un numero infinito di individui. Quindi la dichiarazione del Poincaré è senza fondamento logico.

6ª Ma un punto veramente nuovo è quello che si riferisce alle *definizioni possibili*. Invano si cercherebbe di Aristotele qualche accenno. Però è da notarsi che questa teoria è un elegante sviluppo del concetto della definizione — eguaglianza, conforme alla teoria aristotelica.

7ª Un altro grande merito della Logica matematica è la teoria delle *idee primitive*, di cui si trovano è vero molti impliciti riferimenti in Aristotele, senza però che niuno di essi acquisti quel carattere saliente che costituisce l'originalità della moderna teoria. Infatti anche Aristotele riconosce ben chiaramente che l'analisi della definizione conduce da un lato ai concetti più generali (*κατηγορίαι*), dall'altro ai dati della sensibilità; e che colla analisi del pensiero non si può andare all'infinito: *τὰ δ' ἄπειρα οὐκ ἔστι διεξελθεῖν νοοῦντα* (*Analyt. post.* I, 22). Quindi aggiunse: *Ἔστι δὲ ἀληθῆ μὲν καὶ πρῶτα τὰ μὴ δι' ἑτέρων ἀλλὰ δι' αὑτῶν ἔχοντα τὴν πίστιν· οὐ δεῖ γὰρ ἐν ταῖς ἐπιστημονικαῖς ἀρκαῖς ἐπιζητεῖσθαι τὸ διὰ τί, ἀλλ' ἑκάστην τῶν ἀρχῶν αὐτὴν καθ' ἑαυτὴν εἶναι πιστήν* (*Top.* I, 1). Però egli dichiarò apertamente: *τὰ πρῶτα ὁρισμὸι ἔσοντα ἀναπόδεικτοι* (*Analyt. post.* II, 3), cioè: “ Le cose prime si definiscono, ma non si dimostrano „. Solo per la dimostrazione giunse a proclamare: *Ὅλως μὲν ἁπάντων ἀδύνατον ἀπόδειξιν εἶναι* (*Metaph.* IV . (*Γ*) 4), cioè: “ Non tutte le cose possono dimostrarsi „. Da ciò risulta, senza dubio, che la recente teoria delle idee primitive costituisce un originale pregio della Logica matematica.

8ª Ma il fatto che questi recenti sviluppi della Logica matematica rispetto alle definizioni, come del resto molti altri tra i più notevoli calcoli trattati dall'elaborazione moderna della Logica, non si trovino menzionati nell'opera di Aristotele, non rende per nulla meno importante il rilevare come tanti altri punti si tro-

vino invece investigati sotto il loro aspetto matematico vero e proprio, sopra tutto negli *Analitici primi* e *secondi*. E valga per tutti la teoria del Sillogismo che ha in Aristotele un fondamento ed una trattazione matematica, qual si poteva pretendere in quella remotissima età (1). E questo rilievo, che però esorbita dal campo prefisso della definizione, viene aggiunto solo per far capire che, se Aristotele non seppe restare nel campo scientifico della logica esatta, ciò derivò senza dubio dal fatto che egli non volle trascurare le applicazioni della logica comune. Tale non è certo, almeno per ora, il proposito espresso della Logica matematica nel senso stretto della parola. Quindi è giusto ricordare che, siccome la Logica matematica è propriamente la scienza che tratta solo delle forme di ragionamento che si incontrano nelle varie teorie matematiche riducendole a formole simili alle algebriche, si presenta anche la questione di verificare se non sia possibile, oltre a questo còmpito, darle quello di trattare della formalità logica in generale collo *strumento* della formalità matematica. Questo problema è però stato in parte affrontato dal Boole e dallo Schröder; e mi pare che anche la Logica matematica in senso stretto, sotto il potente impulso del Peano il quale rinnova e feconda gli ardimenti di Leibniz con propositi strettamente scientifici e largamente filosofici, si vada ora avviando a questa grande ricerca, promovendo lo studio e la diffusione dell'interlingua. Infatti “ es semper plus patente quod logica es basi de interlingua „ come dichiara lo stesso Peano, che è a punto “ Directore de Academia pro interlingua „. Rendendo rapido conto dell'importante articolo di A. Padoa (2), egli rileva che “ Auctore vide ligamen inter logica matematica et interlingua, et desidera que interlingua es non solo expressione, sed analysi de cogitatione „.

9ª Ma anche se si esamina sommariamente *il calcolo delle classi*, istituito dalla Logica matematica, risulta evidente che nessuna legge contradice allo spirito della Logica aristotelica. Potrebbe senza dubio objettarsi dalla maggior parte degli autori

(1) Cfr. *Sillogismo e Proporzione*. Contributo alla teoria ed alla storia della Logica pura. Torino, ed. Bocca, 1910.

(2) A. Padoa, *La logique déductive dans sa dernière phase de développement*, Revue de Métaphysique et de Morale, Nov. 1911, pag. 828-883.

che vi contradice la così detta proprietà o legge di semplicità “ $a \frown a = a$ „. Ma per contro non sarebbe difficile dimostrare che tale legge è un principio pseudologico. L'affermazione della validità di questa legge non è che un puro arbitrio descrittivo (1).

Del resto, si potrebbe ancora notare che coll'introduzione degli enti e delle relazioni e operazioni della Logica matematica si fanno rientrare, nel calcolo logico, con nome diverso, tanto la teoria del concetto, quanto la teoria del giudizio della Logica aristotelica. Ma questa ricerca esigerebbe uno studio assai lungo e diverso dal proposito attuale.

10ª Quanto all'affermazione della Logica matematica che *ogni definizione dev'essere simbolica*, ognuno sa che anche Aristotele riconobbe l'utilità dei simboli logici, e in parecchi casi ne fece uso costante e rigoroso. Quindi anche questo canone non è contrario allo spirito della dottrina aristotelica.

11ª Un'altra distinzione moderna invece alla quale non può trovarsi ben fondata corrispondenza nella teoria aristotelica è quella che riguarda *l'omogeneità delle definizioni*. Invano si cerca di dare un valore qualunque al seguente ragionamento: che questa regola sia solo apparentemente nuova perchè si riduce al caso della definizione *per genus*, ove la ragione della omogeneità dei termini della definizione risulterebbe evidente, e perchè Aristotele richiama continuamente le cose *ἐν ταὐτῷ γένει*. Questo principio aristotelico è del resto persino socratico, perchè sappiamo da Senofonte che Socrate soleva *διαλέγειν κατὰ γένη*. Ed anche si potrebbe addurre che Aristotele senza posa ricorda che l'omogeneità nella definizione non deve essere mai oltrepassata: *μὴ ὑπερβαίνειν τὰ γένη*. Ma in fondo è giocoforza riconoscere che tra la nuova regola dell'omogeneità scoperta dal Peano, la quale importa la pratica delle funzioni di matematica o lettere variabili, e il canone socratico-aristotelico *κατὰ γένη* c'è di comune solo il nome.

12ª Infine la Logica matematica ricorda, trattando dell'*uti-*

(1) Cfr. per la dimostrazione di questa tesi la mia Memoria: *Sulla natura extralogica delle leggi di tautologia e di assorbimento nella Logica matematica*, Atti del IV Congresso internazionale dei matematici, Roma, 1909, vol. III.

lità delle definizioni, che il metodo della sostituzione è il migliore per riconoscere l'esattezza della definizione. Orbene è da notarsi che questo metodo fu conosciuto, praticato e consigliato, con esempi diretti, anche da Aristotele. Il quale dice: " Affinchè un tal difetto (inesattezza della def.) diventi manifesto, bisogna mettere il concetto nel luogo del nome, per esempio etc. „: *δεῖ δ' ὅπως φωραθῇ τὰ τοιαῦτα μεταλαμβάνειν ἀντὶ τοῦ ὀνόματος τόν λόγόν. οἷον κ. τ. λ.*

Top. VI, 4. Ed anche la legge pratica (*principio di permanenza delle leggi formali*, che si potrebbe anche dire dell'unità del calcolo) è perfettamente conveniente così alla lettera come allo spirito della teoria aristotelica.

Da questa sommaria esposizione risulta che le definizioni matematiche sodisfano alle due fondamentali regole insegnate dalla Logica aristotelica, cioè alla regola dell'eguaglianza e a quella del genere e della differenza dei segni più noti e prima noti, che insieme determinano le proprietà generali e speciali della definizione.

Però bisogna convenire che Aristotele, oltre a queste due regole, ha dato una quantità d'altri precetti non esclusivamente logici e perciò oziosi al metodo matematico, che abbiamo perfino trascurato di annoverare nell'indagine precedente. Quanto agli altri dodici punti messi in chiaro nella Memoria del Peano, si può stabilire che l'accordo tra la Logica aristotelica e la Logica matematica si verifica nella maggioranza dei casi o direttamente o indirettamente. Ma i tre punti caratteristici " delle definizioni possibili, delle idee primitive e dell'omogeneità delle definizioni „, dovuti quasi per intero all'opera del Peano, benchè non contrastino collo spirito della Logica aristotelica, tuttavia rappresentano tre originali sviluppi della Logica matematica, ai quali invano si cercherebbe una ben fondata corrispondenza nella teoria aristotelica della definizione.

Relazione sulla Memoria del Dott. A. G. Rossi dal titolo: *Apparecchi galvanometrici ed elettrometrici per corrente alternata a vibrazioni torsionali di risonanza in fili metallici.*

Fin dal Giugno 1909 il Dr. Rossi aveva presentato a questa Accademia una Nota preliminare nella quale descriveva l'apparecchio galvanometrico che forma oggetto anche del presente lavoro. Essenzialmente lo strumento consta di un filo sottilissimo di ferro, convenientemente teso fra due punti fissi, e magnetizzato longitudinalmente con un polo al centro e due poli omonimi agli estremi fissi. Questo filo ha una sua vibrazione fondamentale di torsione, cioè di periodo ben determinato, e questa vibrazione viene eccitata facendo percorrere il filo da una corrente alternata di egual periodo. Ciò risulta come effetto della sovrapposizione delle due magnetizzazioni, quella longitudinale precedente, e quella trasversale, o più propriamente *circolare*, provocata dalla suddetta corrente. Con questa disposizione si ha un apparecchio galvanometrico sensibilissimo alla corrente alternata.

Ma avendo l'Autore sperimentato anche con un'altra disposizione dove, per provocare la magnetizzazione longitudinale, il filo era circondato da una spiralina, si manifestarono altri fenomeni di carattere elettrostatico, che gli suggerirono un secondo modo di usare l'apparecchio stesso, cioè come apparecchio elettrometrico, anche questo di grandissima sensibilità.

Il lavoro è distinto perciò in due parti.

Nella prima l'autore espone una serie di ricerche sperimentali sui fenomeni che si manifestano nell'apparecchio adoperato come galvanometro. Precede uno studio assai interessante del modo come due vibrazioni di natura diversa si alternano scambiandosi l'energia; si dimostra che qualunque sia la prima che si eccita, l'energia passa tosto a quella che è meno smorzata, e questa prosegue da sola. L'A. studia quindi il diverso comportamento di fili magnetici e non magnetici in riguardo alle vibrazioni trasversali e torsionali eccitate in essi da un magnete, mentre i fili stessi son percorsi da corrente alternata.

Notevole il fenomeno della vibrazione torsionale che permane nel filo magnetico quando si annulla gradatamente il campo magnetico esterno.

Fenomeni analoghi si osservano quando il filo di ferro è magnetizzato longitudinalmente con spirali a corrente alternata e si manda nel filo stesso una corrente continua; al cessare di questa la vibrazione torsionale persiste. Ricorrendo ad una ingegnosa disposizione col telefono l'A. riesce a mettere in evidenza nel filo l'esistenza di correnti indotte speciali e di determinata frequenza. Quest'analisi dà luogo a parecchi risultati assai interessanti, dei quali però non è possibile dare un breve riassunto. Ma non vogliamo tralasciare di ricordare l'esperienza che corrisponde alla Fig. 10. Avendo riconosciuto coll'esperimento precedente che nel filo vibrante nasce una corrente di determinato periodo, svelata dal suono del telefono, l'A. è riuscito a porre in vibrazione il filo di un secondo apparecchio simile, eccitandolo appunto colla corrente cosidetta *magneto-elastica* indotta in un altro filo, che sia posto in vibrazione nel modo precedente.

Nell'ultimo paragrafo di questa prima parte è studiata l'influenza della tensione del filo sull'ampiezza della vibrazione torsionale. Esiste una tensione cui corrisponde la massima sensibilità. Altri esperimenti mettono in evidenza il comportamento del filo per frequenze un po' diverse da quella di risonanza; e si trova che la tensione ottima per la risonanza non è la migliore fuori di risonanza. Tutti questi risultati servono all'Autore per migliorare le condizioni dell'apparecchio.

Nella seconda parte l'A. studia l'effetto elettrostatico prodotto dalla spirale che circonda il filo, ovvero anche da una armatura metallica cilindrica di piccolissimo diametro, entro la quale sia teso il filo parallelamente all'asse, ma un po' eccentrico. La osservazione delle vibrazioni è fatta con metodi stroboscopici opportunamente ideati. Quando si applica la tensione alternata con frequenza di risonanza al filo e all'armatura cilindrica, si ha la vibrazione torsionale dovuta all'effetto elettrostatico. Questa ha una frequenza doppia di quella della corrente alternata, e ciò è messo in evidenza appunto col metodo stroboscopico.

Studiando in particolare l'azione del campo elettrostatico

si trova che il moto della massa dello specchietto deve essere ellittico; riesce anzi facile, regolando l'eccentricità del filo e la orientazione dello specchietto, ottenere una vibrazione quasi circolare. Accertata la forma ellittica (o circolare) della vibrazione forzata, si passa alla vibrazione torsionale per mezzo della risonanza, spegnendo la componente trasversale; e ciò per il fatto che un sistema come quello del filo teso, collo specchietto, tende sempre alla vibrazione torsionale, che è quella meno smorzata.

Con l'artifizio di illuminare lo specchietto per mezzo di scintille date da un rocchetto d'induzione, alimentato colla corrente alternata e quindi con frequenza determinata, si riesce a dimostrare che la vibrazione torsionale ha un periodo diverso da quello della vibrazione ellittica; e infine che regolando la tensione del filo si riesce a ottenere la semplice vibrazione torsionale, annullando completamente quella trasversale, mentre quella torsionale, che corrisponde alla frequenza di risonanza, raggiunge la sua massima ampiezza.

Segue una serie di esperienze che confermano la grande sensibilità di questo apparecchio elettrostatico.

Il lavoro del Dr. Rossi costituisce un contributo notevole alla conoscenza di un complesso di fenomeni assai interessanti e i sottoscritti lo giudicano meritevole di essere inserito nelle Memorie della nostra Accademia.

A. Naccari
Guido Grassi, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 17 Marzo 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE BARONE ANTONIO MANNO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Renier, Pizzi, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza, Baudi di Vesme e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci Carle ed Einaudi.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 3 marzo 1912.

Il Presidente dà lettura del telegramma inviato dal Vice Presidente Camerano al Ministro della Real Casa per congratulazioni con le LL. MM. il Re e la Regina a nome di questa Reale Accademia per lo scampato pericolo dell'infame attentato. La lettura è accolta dalla concorde approvazione dei Soci.

Per la inserzione negli *Atti* il Socio De Sanctis presenta una nota del Dr. Michele Cerrati su *La battaglia dei Campi Raudi* e un saggio di Aldo Ferrabino intitolato: *Cirene mitica*.

Si legge l'invito alla XIV Sessione del Congresso internazionale di antropologia e archeologia preistorica che si terrà in Ginevra nel settembre 1912. La Classe affida alla Presidenza l'ufficio di designare i rappresentanti dell'Accademia a quel congresso.

In seduta privata poi si procede alla nomina di un membro della Giunta per la Biblioteca accademica, e resta confermato per un nuovo triennio il Socio Manno, giusta l'art. 32 dello Statuto accademico.

LETTURE

La battaglia dei Campi Raudi.

Nota del Dott. MICHELE CERRATI.

Intorno alla famosa vittoria di Mario contro i Cimbri ai *Campi Raudi* possono farsi due questioni distinte: l'una topografica — dove sono i *Campi Raudi*? —, l'altra cronologica — in quale anno avvenne la battaglia? —.

Alla prima questione riguardante la topografia dei *Campi Raudi*, che è l'argomento di questa Nota, se ne connette strettamente un'altra: quella concernente la regione per la quale i Cimbri sono scesi in Italia. Giacchè mentre Livio (1), Valerio Massimo (2), Floro (3), Ampelio (4) ci inducono a credere che i Cimbri siano scesi per le Alpi Tridentine seguendo il corso dell'Adige, Plutarco (5) invece, narrando la resistenza di Catulo, ci fa sapere che ciò avvenne sul fiume *'Ατισών*, ove rimase quella parte di truppa romana, probabilmente esigua, che fece meravigliare col suo valore gli stessi invasori (6). Orbene: è l'*'Ατισών* l'Adige, od è un altro fiume? Non credo dovermi neppure soffermare sull'ipotesi messa innanzi da alcuni — e spe-

(1) *Perioch.* 68: *Cimbri, repulso ab Alpibus fugatoque. Q. Catulo proconsule qui fauces Alpium obsederat et ad flumen Athesim castellum editum insederat reliqueratque*, etc.

(2) V, 8, 4: *M. vero Scaurus . . . cum apud Athesim flumen impetu Cimbrorum Romani equites pulsi*, etc.

(3) I. 38: *(Cimbri) . . . Tridentinis iugis in Italiam provoluti veluti ruina descenderant. Athesim flumen . . . ingesta silva obrutum transiluere . . . sed in Venetia quo fere tractu Italia mollissima est . . . robur elanguit.*

(4) *Lib. Mem.*, 45: . . . *Cimbri Tridentinas Alpes occupaverunt.*

(5) *Mar.*, 23.

(6) Lo pseudo Frontino (*Strat.* I, 5, 3) narra il fatto diversamente, ma la sua narrazione è inverosimile, mentre quella di Plutarco, per quanto riguarda il modo di svolgersi dell'azione, è attendibile.

cialmente da scrittori di storia locale (1) — secondo la quale l'*Ἀτισών* corrisponderebbe alla odierna Toce, ed i Cimbri sarebbero scesi per il Sempione.

Certo un fiume *Ἀτισών* non fu mai citato dagli scrittori antichi, se si fa eccezione della menzione esistente in un codice (del X sec.) di Mela (2) ove il *Natiso* è chiamato *Atiso*; ma qui si tratta di un errore di grafia che non potrebbesi ragionevolmente invocare per il testo di Plutarco (3). Tutti gli autori latini parlano chiaramente dell'*Athesis*, ed hanno una non trascurabile autorità in quanto che essi non dipendono (4) tutti dalla stessa fonte. Valerio Massimo e lo pseudo Frontino non dipendono da Livio, ma devono aver avuto dinanzi anche le memorie di quel Marco Emilio Scauro che aveva ripudiato il figliuolo appunto perchè fuggito vilmente dall'esercito di Catulo.

Si deve dunque ritenere che i Cimbri siano scesi lungo la valle dell'Adige, seguendo il corso del quale si spinsero verso il Veneto e attratti dai copiosi prodotti della regione vi si soffermarono alquanto tempo (5).

---

(1) L. Alberti, *Descrizione di tutta Italia*; Iacopo Durandi, *Piemonte Transpadano*; G. Napione, in " Mem. Acc. Scienze di Torino „ (s. II, t. 1); L. Bruzza, *Iscrizioni antiche vercellesi*, p. cxx-cxxv; D. Promis, *Storia dell'antica Torino*, p. 53; L. Bianchetti, *Storia dell'Ossola Inferiore*, I, p. 51; Untersteiner, *Scritti di Storia tridentina*, p. 40; V. De Vit, *Dissert. sui Cimbri*, Milano, 1881, p. 263. Contro tale errore scrisse l'Oberziner in " Arch. Trent „, XIX, 1, 1904. Del resto: come mai Toce deriverebbe da *Ἀτισών*? E come mai i Cimbri si fermarono nel Veneto? Come avrebbero gl'invasori superate le difficoltà gravi che presentavano i frequenti laghi della regione?

(2) *Cod. Vat.*, 4929, citato dal Pais in *Ricerche Stor. e Geog.*, p. 499.

(3) Il Pais, al quale tale ipotesi era parsa buona, la scarta nel lavoro su citato. Veramente le difficoltà che sorgono contro di essa sono molte. Ad esempio, a volerla sostenere bisognerebbe ammettere che l'*Atiso* sia l'Isonzo: il che non è. Il fiume *Natisone* è ancora oggidì conosciuto con tal nome; e basterebbe d'altra parte esaminare attentamente il L. V, 8 di Strabone per esserne convinti.

(4) Lo ha fatto notare pure l'Oberziner in " Arch. Trent. „, XIX, 1904, p. 15 e segg.

(5) Neppure crea difficoltà Floro (*Epit.* I, 38) il quale dopo aver detto che i Cimbri furono sbaragliati ai Campi Raudi soggiunge: *Tertia Tigurinorum manus quae quasi in subsidio Noricos insederat Alpium tumulos ... evanuit.* Chè lo stesso Floro dice nel medesimo passo esplicitamente essere

Ciò premesso, cerchiamo di stabilire, più o meno esattamente, dove sia avvenuta la grande battaglia.

Da Plutarco (1) sappiamo che Catulo dopo la fuga — o ritirata — dalle trincee dell'Adige, si ritirò oltre il Po, probabilmente per avere una linea naturale di difesa nel caso che i barbari si fossero avanzati prestamente. Qui lo raggiunge Mario che lo rincuora; pure a sud del Po Mario riceve le truppe che aveva fatte venire dalla Gallia. *Quando queste furono arrivate egli passato il Po procurava di tener fuori i barbari dall' Italia di qua*, cioè dall'Italia a sud del Po. Intanto i Cimbri, in attesa dei Teutoni, andavano ritardando la battaglia, forse sperando in una sicura vittoria qualora essi avessero potuto riunirsi: i Romani presi in mezzo da un sì grande numero di armati sarebbero stati sbaragliati. Per questo, sempre secondo il racconto di Plutarco, erano così spavaldi da chiedere terre e città a Mario, il quale diede invece loro la notizia dell'eccidio di *Aquae Sextiae*. Allora si venne a battaglia, dopo di averne stabilito il campo nel piano di Vercelli: *χώραν δὲ τὸ πεδίον τὸ περὶ Βερκέλλαις*.

Segue la descrizione della battaglia sanguinosissima, nella quale, fra i molti particolari fantastici e retorici, notevoli sono due fatti: che il sole dardeggiava in faccia ai Cimbri, che faceva molto caldo, e che, dopo la vittoria, essendo fra i soldati di Catulo e quelli di Mario sorta contesa per il bottino, furono eletti arbitri i legati Parmensi.

Quest'ultimo fatto aveva indotto il Pais ad affermare che i Campi Raudi si dovessero ricercare presso Parma; ma poi egli stesso nel suo studio più recente sull'argomento (2) si ricre-

---

i Cimbri discesi lungo l'Adige. Perciò, o non è esatta quella frase *in subsidio Noricos*, etc., o per Floro il Norico si estendeva sino alle balze trentine. Che però la notizia sia in tutto e per tutto falsa non par da credere; tanto più che al *tripertito agmine* di Floro fa riscontro l'asserzione di Orosio (V, 16, 9): *tribus agminibus Italiam petere destinarunt*. Nè sarebbe poi forse troppo difficile spiegare come i Tigurini non siansi congiunti con i Cimbri che pur si soffermarono nel Veneto.

(1) *Mar.*, 24, 2.

(2) *Ricerche Storiche*, etc., p. 503. Prima egli aveva creduto opportuno di correggere *Βερκέλλαις* in *Βρικέλλον*.

dette; tuttavia confessa di trovarsi molto *più imbarazzato di prima* specialmente per la testimonianza di Claudiano (1). Il quale parlando nel *De Bello Getico* della battaglia di Pollenzo contro Alarico, afferma che essa avvenne *iisdem campis* nei quali Mario aveva sconfitto i Cimbri. Perciò conclude il Pais: “ Certo ad ogni modo manca qualsiasi base per affermare che i Campi Raudi fossero a nord di Parma, oppure presso Vercelli, e non si debbano cercare nel piano percorso dal Po fra Torino e Pollenzo „.

A me pare invece che tra le due ultime ipotesi vi sia grande differenza di attendibilità.

Plutarco cita la regione intorno a *Βερκέλλαι* ed è il solo che ci dia un'idea più esatta della località; Floro dice: *in patentissimo quem Raudium vocant* (2); Velleio Patercolo: *citra Alpis in campis quibus nomen erat Raudiis*, etc. (3); Eusebio dice che Mario *Cimbros superavit iuxta Eridanum fluvium* (4). Claudiano affermerebbe invece che questi *Campi Raudi* sono presso Pollenzo. È ciò possibile? Perchè Plutarco avrebbe detto: *nella regione vercellese* mentre Pollenzo era nelle vicinanze di *Alba Pompeia* (5)? E supponendo pure che si sia sbagliato Plutarco e che Claudiano abbia ragione, come si accorderebbero le altre indicazioni? Si può dire di quel territorio: *patentissimis campis*? Si può dire che Pollenzo è *iuxta Eridanum*? Basta dare uno sguardo ad una buona carta della regione per rispondere negativamente alla prima ed alla seconda domanda. La regione è abbastanza lontana dal Po ed è abbastanza collinosa. La pianura — ancora oggidì chiamata *piano di Pollenzo* — è larga pochi chilometri e non adatta allo svolgimento di una battaglia con sì grande turba d'uomini.

(1) Claudiano, *De Bello Goth.*, vv. 635 e segg. (ed. Koch).

(2) *Epit.*, I, 38.

(3) *Hist. Rom.*, II, 12.

(4) *Chron.*, II, p. 123 (ed. Schoene).

(5) È a sud di Bra. È citato da Tolomeo (III, 1, 45); Plinio, che lo pone nella regione IX (III, 5; IX, 73, 8; XXXV, 46, 2); Marziale (XIV, 157-8); Silio Italico (VII, 5, 99); Columella (VII, 2, 4). Nel Medioevo faceva parte del vescovato e comitato di Torino. Vedi F. Gabotto, *I Municipii Romani*, ecc. in “ Bibl. della Soc. Stor. Subalp. „, XXXII, III e *Storia dell'Italia Occid.*, I, 3.

Oltre a ciò: dobbiamo noi preferire alla testimonianza di Plutarco quella di un poeta quale Claudiano — un rappresentante dell'alessandrinismo romano? —. Sia pure che lo Stoecker abbia dimostrato che il poeta *si attenne sempre alle autorevoli fonti storiche a cui attinse* (1), ma la semplice osservazione che Claudiano fu grande adulatore di Stilicone ci fa supporre naturalmente che egli abbia cercato di rendere, per quanto fosse possibile, più caratteristica e più famosa la vittoria di Pollenzo. A tale scopo il ricordo di una grave sconfitta inflitta ai barbari, di una battaglia che aveva salvato l'Italia da una grave invasione, era un elemento eccellente ed efficacissimo. Al che si può aggiungere un'altra osservazione. Il poeta può essere stato ingannato da un'omonimia, oppure può da questa omonimia aver tratto profitto. Odiernamente ancora, non lontano da Pollenzo è il castello di Roddi, il quale nei documenti medioevali è sempre chiamato *Rhodum* o *Raudum* (2). Può darsi che già al tempo di Stilicone e di Claudiano fosse così chiamata la regione circostante (tanto più che *raudus* non è un nome proprio, ma ha un significato generico di *rude, incolto*) (3) e che da ciò trasse argomento il poeta per credere, o per far credere, che là fossero i *Campi Raudi*.

Del resto, neppure le conclusioni dello Stoecker debbono essere accettate così assolutamente. In questo racconto stesso Claudiano dimostra di non essere sempre esatto. Dice il poeta:

Pervenit ad fluvium miri cognominis Urbem
Atque illic domitus vix tandem interprete casu
Agnovit dubiis inclusa vocabula fatis (4).

E qui, secondo Claudiano, sarebbe avvenuta la battaglia. Ma se l'*Urbis* è l'odierna *Orba* — come è quasi certo, — siamo ben lontani da Pollenzo! Imprecisione topografica scusabilissima in un poeta, ma che ci deve rendere diffidenti riguardo alle altre indicazioni, specialmente se queste sono di natura retorica, quale quella dei *Campi Raudi*.

---

(1) Pais, loc. cit., p. 505, n. 1.

(2) Documenti del 1014, 1026, 1210, ecc. Vedi in *Monum. Novaliciensia vetustiora* (ed. dal Cipolla), I, 138 e segg.

(3) Festo, p. 265, 4 *Müll.*: raudus significat rem rudem et imperfectam.

(4) Loc. cit., vv. 554-557.

Un'ultima considerazione: Plutarco dice che Mario, avute le sue milizie, attraversò il Po; come avrebbe potuto ciò avvenire se la battaglia fosse stata presso Pollenzo che è a sud del Po?

Stabilito dunque che la battaglia avvenne nel luogo indicato da Plutarco, cioè nella regione vercellese (1), si può cercare di definire meglio la località.

Il Dionisotti dice: " I Campi Raudii come luogo del combattimento e secondo l'espressione di Plutarco — la pianura che gira attorno a Vercelli — è l'estesissimo altipiano che dalla confluenza del torrente Strona nel Cervo presso Cossato si protende dal lato nord-est lungo i colli sino a Gattinara; dal lato ovest da Castellengo per Mottalciata e Gifflenga, dal sud Buronzo, Balocco e Villarboit, dal lato di levante il piano chiamato anticamente Salia, Hallia, Andia, abitato dai Salii. Su quest'ampia zona non esistevano a quei tempi luoghi abitati, fatta eccezione di Pollentia, ora Lenta... „ (2). Alla critica non regge nè un'*Andia* derivata da *Salia* (3), nè un *Lenta* derivato da *Pollentia*; ma a parte questo: è possibile che là sia avvenuta la battaglia? Non si potrebbe più accettare la testimonianza di Eusebio *iuxta Eridanum*; nè si capirebbe la ragione per la quale i barbari invasori diretti dalla pianura del Veneto alla Liguria abbiano fatto questa inutile punta a nord, essi che dovevano tenersi piuttosto a sud, o perchè abbiano abbandonato il piano prossimo al Po per inoltrarsi in terreni semimontuosi.

È dunque tra Vercelli ed il Po che si debbono collocare questi famosi *Campi Raudi*; e se potessimo attribuire qualche valore ad una tradizione locale (4) che ancor oggi designa un *campo di Mario* ed un *arco mariano* dovremmo ricercarli nei pressi di Robbio Lomellina, in quel territorio attraversato dalla Sesia poco prima della sua confluenza col Po.

---

(1) L'identificazione del *Βερκέλλαι* di Plutarco con *Vercellae* non presenta difficoltà.

(2) *Studii di Storia Patria Subalpina*, p. 37. Al passo citato l'autore fa seguire delle ragioni etimologiche che non hanno serio fondamento.

(3) Vedi Cerrati, *Vinzaglio. Ricerche storiche*, pp. 9 e seg., 29 e seg.

(4) È questo un elemento di nessuna certezza. Chi potrebbe anzitutto assicurare che questa tradizione sia *popolare*? Anzi probabilmente deve avere un'origine dotta; l'opinione di qualche studioso antico può essere passata col tempo nel dominio delle tradizioni popolari.

Cirene mitica.

Nota di ALDO FERRABINO.

C'è, nel mito greco di Cirene e Apollo, una trama di realtà storica che non ne costituisce soltanto il piú palese sostrato e quasi lo schema organico, ma ne regola anche, oltre i modi e le forme, le vicende della progressiva evoluzione (1). Ed è da tutti conosciuta: si partí prima dal Peloponneso una schiera di Dori a colonizzare l'isola di Tera; dalla quale poi uno sciame nuovo ebbe a staccarsi verso i lidi della Libia, ben nota fin nell'epopea, non senza che l'influenza di Creta, come vogliono anche ragioni geografiche, si facesse sentire su quel moto. Piú tardi la colonia cirenaica tanto, cresciuta d'importanza, ebbe a partecipare alla politica del nuovo continente, quanto rinsaldò via via i legami con la madrepatria greca, serbando vivi frequenti ed intensi gli scambi reciproci (2). Ora, basta l'aver posto mente a questo rapidissimo e generale schizzo delle vi-

(1) Il mito di Cirene ha avuto la fortuna singolare d'essere ampiamente trattato in due lavori, entrambi per diversi rispetti assai lodevoli, ove il materiale è raccolto con diligenza accurata, discusso e composto in ordine con cautela metodica: dico di Franz Studniczka *Kyrene, eine altgriechische Göttin* (Leipzig 1890) (cfr. dello stesso l'articolo in Roscher *Lex. d. gr. u. röm. Myth.*) e di Ludolf Malten *Kyrene, sagengeschichtliche und historische Untersuchungen* in “ Philologische Untersuchungen „ del Kiessling e Wilamowitz XX (1911): quest'ultimo specialmente degno di molta nota. — Qui la ricerca è condotta con un fine ben preciso: dimostrare come e un'analisi e sovra tutto una sintesi della saga di Cirene sieno possibili senza supporre né una colonizzazione beota di Tera né una predorica della Libia, cui ricorrono lo Stud. e il Mal.; ma tenendo fermo soltanto quello schema di realtà storica ch'è precisato nel testo e sul quale non cadono dubbi. Si lasciano perciò impregiudicati i problemi della protostoria nel Peloponneso e a Tera, nella persuasione che il trattarli indipendentemente giovi ad essi come giova al mito il non volervi cercare la chiave delle piú antiche vicende greche. — A parte va fatta menzione e lode di J. P. Thrige *Res Cyrenensium* etc. (Hafniae 1828) che primo raccolse i materiali e, comparativamente ai tempi, seppe vagliarli.

(2) Cfr. Busolt *Gr. Gesch.*² I 479 sgg. Beloch *Gr. Gesch.* I 197; con cui in massima convengono Studniczka 126 sgg. e Malten 141 e n. 1. Sul perché

cende storiche da cui nacque e cui sottostò Cirene per intendere senz'altro come i miti originatisi da codesti fatti della realtà dovevan contenere un giusto contemperamento di elementi libici (1) e di greci, improntati e gli uni e gli altri col suggello della più schietta fantasia ellenica; come inoltre nel suo evolversi la leggenda doveva ingrossare quasi per tre diversi affluenti: doveva per un primo risultar costituita e abbozzata in territorio africano da' coloni peloponnesiaci; per un secondo estendersi per tutta la Grecia e arricchirsi, diffondendosi, di figure ed episodi nuovi e indigeni d'altri paesi; così da rifluire per ultimo in Libia fissandovisi nella tradizione piú strettamente locale.

Ciò è per risultare ancor piú chiaro se ci accingiamo a perseguire nelle varie tappe storiche l'intrecciarsi dei diversi stami.

I.

Allorquando — volgeva la seconda metà del VII secolo — i coloni dori di Tera si stabilirono in Libia, procedettero a quello scambio di possessioni intellettuali e materiali ch'è immancabile conseguenza del contatto fra due popoli diversi: e dai luoghi nuovi come dai nuovi nomi trassero stimolo a un arricchimento non pure del proprio patrimonio spirituale, in genere, bensì anche di quella parte di esso, il viluppo delle fantasiose leggende, che era per loro, Greci, di non secondaria importanza. Da un lato avvennero innesti su tronco ellenico di virgulti esotici; dall'altro eroi e dèi patrii trovarono nuova acconcia sede su territorio straniero. Sorte non evitabile: cui sottostò particolarmente un dio che nella madrepatria Tera aveva avuto onore di culti, Apollo Carneo (2), e che gli emigrati non immemori

venga detto “ Peloponneso „ in luogo del piú preciso “ Sparta „ cfr. n. 2. p. 522. E s'intende ch'è inutile, pei fini della nostra trattazione, scendere a maggiori particolari, i quali sarebbero piú discutibili.

(1) Avverto una volta per tutte che dicendo “ elementi libici „ non intendo se non elementi leggendari greci bensí, ma tali che o dai luoghi e dai nomi libici furono ritratti o in località africane si localizzarono con profonde radici.

(2) Che Apollo e Carneo, in origine diversi, fossero in Tera congiunti fin dal VII sec. si può fondatamente supporre contro MALTEN 61. Quando

continuarono a far segno di divoto rispetto dedicandogli, quasi a benigno protettore, la fonte di viva e copiosa acqua onde veniva a essi principalissimo ristoro nella patria nuova (1). Ma la fonte, di troppo importante per restare anonima, aveva un suo appellativo indigeno: era detta Cira (2). E la fantasia greca diede alle acque una ninfa, alla ninfa il nome grecizzato delle acque; e attorno alla vergine Cirene si accolse il popolo dei coloni nella impresa di adattare a sé i luoghi insueti come nel linguaggio alterava i vocaboli non suoi. Ninfa e popolo durarono uniti, figlia l'una all'altro; e quando il duro travaglio ebbe fine, e la regione fu libera dai leoni, scevra di pericoli, tranquilla nel rigoglio della sua feracità, la fanciulla ripeté nel suo atteggiamento, e sintetizzò, l'opera compiuta dai forti uomini: e fu raccontata nell'atto di stroncare la violenza della fiera ferocissima (3). Allora la stirpe nuova nata sul suolo libico, che si veniva frattanto addestrando in cavalcare e piú profondo sentiva sul costume e gli affetti l'influsso dei luoghi e del clima,

---

già nell'iscrizione arcaica (del VI sec.) di Aglotele (HILLER V. GAERTRINGEN *Thera* III 69) e poi in PIND. *Pit.* V 79 sgg. e ERODOTO IV 158 troviamo compiuta la fusione, dobbiam collocarla in quell'epoca in cui per influsso dell'epopea si determinava la tendenza a raccogliere sotto un'unica personalità divina le analoghe divinità locali, come mostra l'Apollo Sminteo di *Il. A* 39. Sarebbe inoltre assai singolare che tanto a Tera quanto a Cirene Apollo e Carneo fossero una cosa sola non già, come credo, per importazione dall'uno all'altro luogo, ma per essersi nei due paesi le connessioni compiute indipendentemente. Che se infine lo stesso Malten ritiene che " gewiss ist die Verbindung ' Apollon Karneios ' nicht zum erstenmal um Kyrenes willen oder erst in der Eöe vorgenommen worden; sie ist älter und hat sich auf griechischem Boden weit verbreitet "; non si vede davvero per qual motivo debba poi negare che in Libia il nesso ' Apollo Carneo ' sia giunto da Tera coi coloni Dori.

(1) PIND. *Pit.* IV 294, ERODOTO IV 158.

(2) Cosí CALLIM. *Inni* II 88 (*πηγῇσι Κύρης*) e STEF. s. v. *Κυρήνη* (*Κύρης πηγῆς*).

(3) Il merito di aver messo ciò in luce è del MALTEN 58. 69 sgg. 71 ove son pure i testi. Nell'atto d'uccidere il leone Cirene è rappresentata da PINDARO *Pit.* IX 26 e CALLIMACO *Inni* II 92-3 non da APOLLONIO R. II 500 sgg.; ma dedurre dal suo silenzio che la sua fonte ignorasse comunque l'episodio non par prudente: si badi alla brevità del racconto presso quel poeta in confronto dell'ampiezza pindarica. Cosí son da risolvere le esitazioni di MALTEN 62.

confuse sé con la vergine della fonte in piú intima mescolanza e piú sentita: l'avvicinò meglio per tanto e la congiunse al dio protettore suo proprio e dell'acqua, l'antico dio che la tradizione faceva piú venerando e dipingeva giovine e bello. Furono divini amanti. Li favorí l' identità della sede e la cresciuta importanza della ninfa, per effetto del farsi essa piú greca come piú libici i coloni: onde attraverso al popolo ed alla fonte del dio pervenne la fanciulla al dio (1).

Ed era naturale che l' impulso non andasse perduto; che, al contrario, alla coppia si venisser connettendo altri numi i quali a quei due primi fossero per qualche carattere simili o per culto contigui. Così l'eponima Libia della regione non poteva rimaner disgiunta da quella Cirene che dei luoghi era essa pure importantissimo simbolo. Che se poi di " ninfe sotterranee „ (χθόνιαι νύμφαι) s'eran venuti per opera dell' immaginazione popolando quei luoghi, ancor ad esse era ovvio toccasse di commettersi con la fanciulla della fonte ove l'acqua sgorga da sotterranea polla. Certo tuttavia questi nuovi congiungimenti, e simili che ci sfuggono, di cui l'epoca non può esser singolarmente fissata, non acquistarono mai troppo rilievo, anzi rimasero sempre di secondaria importanza e, perché tali, variarono su bocche diverse (2).

Ben piú notevole e importante fu il legame che strinse invece Apollo e Cirene con un altro nume che pure nella Libia s'era insediato di Grecia: Aristeo (3). E valsero anche per esso

---

(1) Che l'unione avvenisse non col semplice Carneo (Malten 212) sí con Apollo Carneo ossia — poiché delle due figure unite e fuse la maggiore prevale sulla minore — con Apollo, dipende dall'essere, come si dimostrò (p. 4 n. 2), già in Tera Carneo identificato con Apollo e da Tera il nesso trasportato in Cirene.

(2) Ciò spiega perché mentre Libia è ricordata da Pind. *Pit.* IX 95 sgg., Apollonio ricorda invece le χθόνιαι νύμφαι in *Argon.* II 504. A diminuire del resto l' importanza della differenza, oltre a quel ch'è detto nel testo, si legga Malten 11. Cfr. sotto a p. 520 e n. 1.

(3) Aristeo in Libia *scol. Aristof. Caval.* 894; *Itiner. Anton.* 72, 2. Dinanzi a queste testimonianze tra due possibilità si può scegliere: o Aristeo ha culto in Libia *dopo* il suo congiungimento con Cirene (avvenuto in Grecia) e a causa d'esso; oppure perviene in Libia *prima* di quella connessione e la determina. Tra le due possibili ipotesi, che a priori sarebbero di ugual valore, scelgo la seconda: perché come Aristeo si diffonde in una vastis-

i consueti motivi: non sappiamo se contigui fossero i luoghi del loro culto; ma certo erano simiglianti gli aspetti e in grado sommo. Aristeo difatti era il dio delle biade mature dei campi fecondi delle gregge numerose: il protettore degli agricoltori e dei pastori (1). E la fertile terra di Libia, accogliendolo, lo avvicinava senz'altro a quei numi locali anteriori che nella feracità del suolo avevan trovato la ragione dell'esser loro. Non è a dire se con Apollo prima fosse Aristeo congiunto o prima con Cirene; a ogni modo un nesso esigeva súbito l'altro: e tanto piú quello con Cirene, in quanto, là dove Apollo è l'amante di piú d'una fanciulla, di quel solo dio è sposa la ninfa (2). Comunque, si ebbe a narrare allora che il giovinetto era figlio d'entrambi.

Avrebbe ancor questo potuto rimanere un particolare secondario nelle vicende del mito, ove ad accrescerne il valore non fossero intervenuti i caratteri che nell'Ellade eran propri di Aristeo. Giacché il suo pervenire fino in Libia e il suo congiungersi con Cirene non era se non un episodio della sua larga e certo lenta diffusione in tutto il mondo greco. Lo troviamo in Ceo in Caristo in Corcira in Sicilia in Napoli in Tracia in Arcadia. E in questa vasta zona, pur serbando intatto quel carattere pastorale e campestre ch'era un motivo del suo propagarsi, veniva assumendo attributi nuovi e talune sue peculiarità mutava. In ispecie si connetteva man mano con quella tra le figure

---

sima zona così nessuna meraviglia vi è di trovarlo in Libia; come in ogni luogo si collega con divinità locali cosí nessuno stupore che si colleghi in Libia. Al contrario e meraviglia e stupore vi sarebbero ove il caso di Cirene si presentasse quasi eccezione rispetto agli altri. Da ultimo quest'ipotesi è da scegliere perché, oltre ad essere, come si vede, piú semplice, spiega piú facilmente tutti i fatti che deve spiegare. Perché poi ad Aristeo si rendesse culto in Libia, potremmo bensí sapere, ma solo quando conoscessimo d'ogni singolo popolo greco i singoli culti: che non è.

(1) Sul carattere di Aristeo son d'accordo tutti gli autori: si vedan per esso oltre ai citt. Studniczka e Malten anche Hiller v. Gaertringen in Pauly-Wissowa *R.-E.*^{2} II 858, Gruppe *Griech. Myth.* 1243 n. 2. 749. 249. 819 e Schirmer in Roscher *Myth. Lex.*

(2) Ciò è contro il Malten che ritiene il nesso avesse luogo, non già in Libia, ma per effetto dell'elaborazione poetica dell'Eea. (Cosí almeno è detto a pag. 212; mentre a pag. 82 si lascia la cosa in dubbio). L'elenco delle fanciulle amate da Apollo, in Wernicke presso Pauly-Wissowa *R.-E.*^{2} II 29 sgg.

sacre de' singoli luoghi cui fosse più affine: onde la leggenda narrava che a Ceo l'avevano allevato, ninfe del paese, le Brise; a Caristo lo si diceva figlio dell'eponimo locale; divenne padre della ninfa Macride, da cui si faceva dipendere un favoloso nome e dell'Eubea e di Corcira; ebbe una statua nel tempio di Dioniso a Siracusa; di Dioniso fu rivale a Maronea e del culto, in genere, di Dioniso fece parte in Tracia. Quando poi strettissimo diveniva un di cotesti legami la figura di Aristeo e quella dell'altro iddio si fondevano in una dai due nomi apposti; onde in Arcadia e in Ceo si venerava uno “ Zeus Aristeo „, eclissandosi il minore nume accanto al maggiore; e a Ceo, un “ Apollo Aristeo „ pel modo istesso. In altri casi per contro era l'aspetto di lui che assorbiva in sé divinità piú languide, quali son quelle di Agreo e di Nomio e di Opaone, che divennero appellativi puri e semplici di esso dio (1).

Fra tutti cotesti caratteri dovevan poi prendere speciale rilievo alcuni che forse Aristeo teneva come più strettamente propri. Ed eran questi il suo soggiorno in Tessaglia e le attinenze con Chirone centauro e le Ore e Gea. Le belle pianure di Larissa e di Tricca avevano avuto, a guisa di tant'altri paesi che ho ricordati, il loro protettore dei campi (2). E là Aristeo

---

(1) Aristeo in Ceo Apollon. R. II 519 sgg. e *scol. Apoll. R.* II 498 (*Ζεὺς Ἀρισταῖος ἐκλήθη*), *Et. M.* s. v. *Βρίσαι*, inoltre Aristot. *Κείων πολιτ.* in *FHG.* II 214; A. figlio di Caristo *scol. Apoll. R.* II 498; nei monti dell'Eubea Oppiano *Ven.* IV 265 sgg.; in Eubea la ninfa Macride Apoll. R. IV 1131 con gli *scol.*; in Corcira *scol. Apoll. R.* IV 540. 983. 1141, Head *Hist. num.*[2] 328; in Sicilia Timeo appr. Diod. IV 82, 5, Cicerone *Verr.* IV 128; in Napoli cfr. Wilamowitz “ Hermes „ XXI (1886) 110, *Arist. u. Ath.* II 39, 8; in Sardegna Timeo appr. Diod. IV 82, 4, Paus. X 17, 3; in Maronea Plin. *nat. hist.* XIV 53, Nonno Pan. *Dion.* XIII 256 sgg., XIX 227 sgg., generic. in Tracia Plinio *nat. hist.* IV 45, Timeo appr. Diod. IV 82, 6; in Arcadia Servio *Verg. Georg.* I 14; Apollo Aristeo in Karthaia (Keos) *CIG.* II 2364; Esiod. fr. 129 R. Convengo quanto a Nomio Agreo Opaone con Malten 10. — S'intende che la serie qui riportata non ha alcun valore cronologico, ma solo serve d'analogia. — Non credo poi col Malten 14 che le Ore di Pindaro sieno una variante poetica dell'unica saga cea delle Brise; sono invece, per quel che a me pare, figure analoghe di protettrici dei campi, che per motivi analoghi si connettono in luoghi diversi con Aristeo.

(2) Sui caratteri tessalici di Aristeo assai spiccati, dice a sufficienza il Malten spec. pag. 77; ma è da lasciar aperta la quistione se il nume sia veramente *originario* di Tessaglia.

— ch'è, come è facile scorgere, affine ad altri numi benefici e salutari, prettamente tessalici: dico Asclepio coi figli Podalirio e Macaone; Patroclo e Achille; esperti tutti nell'arte medica (1) — fu congiunto con il " giustissimo tra i Centauri „ (2) Chirone per i motivi medesimi pei quali da Chirone nel mito erano ammaestrati appunto gli eroi medici che ho rammentati or ora. Non saprei invece dire se proprio in Tessaglia o se altrove Aristeo era stato avvicinato a Gea, alla " Terra „ della cui feracità egli era simbolo, e alle Ore, il corso delle quali regola i prodotti campestri. È però fuor di dubbio che anche in tal caso l'affinità tra le idee simboleggiate dovette avere parte ed efficacia non piccola nei ravvicinamenti.

In quel gruppo pertanto di tre numi che abbiam visto formarsi in Libia, d'Apollo di Cirene e d'Aristeo, uno ve n'era, questo ultimo, con caratteri spiccatamente tessalici e attributi dicevoli a' suoi uffici mitici. Se quindi pensiamo che sopravvenisse l'elaborazione lettararia greca a integrare il processo (giusta si disse da principio) della mitologia locale libica, comprendiamo d'un súbito qual fusione dovesse compiersi tra gli elementi diversi che i due diversi e lontani paesi — la Tessaglia e la Cirenaica — contribuivano al mito. L'epica che suol dirsi di Esiodo fu il crogiuolo ove la materia si sciolse per ricomporsi. Ed era già ricomposta nella " Eea di Cirene „ (3).

(1) Su Achille e Patroclo esperti in sanare ferite si vegga l' Iliade *Λ* 822 sgg. e 832; Asclepio ammaestrato da Chirone *Δ* 219. — Che Asclepio coi figli sia tessalo d'origine mi sembra abbia dimostrato Columba *Le origini tessaliche del culto di Asklepios* in " Rassegna di Antich. Classica „ I (1897) 237 sgg. contro il Kjellberg *Asklepios, mythologisch-archäologische Studien* in " Särtr. u. Språkv. Sällsk. förhandl. 1894-97 i Upsala Universitets Årsskrift „. Piú tardi parecchi furono gli eroi ammaestrati da Chirone: cfr. Escher in Pauly-Wissowa *R.-E.*[2] III 2304 sgg.

(2) *Λ* 832 *δικαιότατος Κενταύρων*.

(3) In ciò differiscono le mie idee profondamente da quelle del Malten che crede lo spunto e l'impulso dell'elaborazione letteraria sia da ricercare non in Aristeo ma in Apollo. Ora è verissimo che Apollo diverrà la figura preponderante del mito; ma su ciò v. quel è scritto piú avanti a pag. 13. Al contrario qui sono da metter bene in chiaro due punti. Anzi tutto Apollo non ha avuto spiccati originari caratteri tessalici (qualunque sia la sua natura e la sua sede primitiva): lo dimostra l'Iliade. Contro ciò non prova nulla *Λ* 44: perché ivi Apollo è fatto muovere dall'Olimpo ad

Della quale basterebbero i primi due versi, che ci son giunti, per farne intendere il carattere e il contenuto: “ O quale in Ftia, donata di bellezza dalle Cariti, presso l'acque del Peneo abitava la bella Cirene „ (1). Ftia e Peneo: questi due nomi tessalici che suonan nuovi accanto alla libica Cirene lascian súbito intravvedere la novella forma del mito. Che è anche possibile, ricercandone gli echi in Pindaro e in Apollonio oltre che altrove, ricostruire piú compiutamente. La ninfa africana che nella Libia doma i leoni si muta, per esser diventata madre del tessalico Aristeo, in abitatrice dei piani ove scorrono il Peneo e l'Apidano, s'ergono le cime del Pindo e dell'Olimpo e la leggenda racconta le gesta dei Lapiti. Non importa che su questo sfondo nuovo stoni la lotta con le belve feroci: il poeta non cura irrazionalità né incongruenze. Ma perché non poteva andar perduto il ricordo dei caratteri libici della ninfa né la memoria

---

analogia di altri passi epici ove dall'Olimpo (ἀπ' Ὀλύμπου cfr. Λ 715 Σ 167) si facevan partire e ritornare gli dèi: cfr. l'omerico *Inno ad Apollo Pitio* 38 sgg. I nessi con la Tessaglia cominciano con la epopea esiodea, quella stessa cui risale l'Eea di Cirene, e sono dovuti a ragioni che variano pei singoli casi, ma si possono riassumere nella analogia (su ciò avrò a diffondermi maggiormente altrove). D'altra parte Aristeo presenta spiccati caratteri tessalici (v. n. 2 p. 8). Trovando adunque in Libia una triade ove è un nume senza dubbio tessalico e uno no, vedendo poi che cotesta triade è trasportata tutta in Tessaglia, mi par legittimo ritenere che l'impulso ne sia partito non da Apollo ma da Aristeo. Ciò mostra anche qual giudizio io faccia del parallelo, su cui insiste tanto il Malten 25. 61 tra l'Eea di Coronide e Asclepio e quella di Cirene: in entrambe si riporta in Tessaglia Apollo perché *prima* lo si connette con un nume analogo (Aristeo o Asclepio), *poi* lo si localizza nella patria di quel nume. — Da tutto questo è giustificata la ricostruzione ch'io fo dell'Eea di Cirene. Della quale ritengo proprio non solo quanto è ripetuto dalle diverse fonti onde quella è riflessa, ma anche ogni carattere che si convenga a quell'Aristeo da cui l'Eea ha preso le mosse. Cosí vi dovevano intervenire Peneo ed Ipseo co' Lapiti; Gea e le Ore e Chirone (né importa che le Ore si trovino connesse anche con Apollo; esse si addicono bene ad Aristeo e con lui dovettero penetrare nell'Eea); gli epiteti di Nomio Agreo Opaone; il paragone con Apollo e con Zeus. Non vi dovevano intervenire invece: Ermete che e manca in Apollonio e è legato con Apollo; Afrodite che manca pure in Apollonio e non è connessa con Aristeo (cfr. n. 2 p. 12); le Muse per gli stessi motivi (cfr. n. 4 p. 12).

(1) *Scol. Pind. Pit.* IX 6. Esiod. *framm.* 128 Rzach 1902 (secondo la quale ediz. vengon citati tutti i luoghi di Es.).

che in Africa Aristeo era nato da lei; per questo l'Eea narrava come Apollo, ammirato della strenua sua forza nel soggiogare la fiera, la conducesse sposa sul proprio splendido carro in Africa, ove ella generava da lui il giovinetto agreste nelle case di Libia. E poiché d'altra parte Gea e le Ore si raccontavano accompagnatrici di Aristeo, ad esse fu data cura di allevarlo. E con esse fu serbato Chirone, il maestro di salutari segreti, che ebbe ora a profetare le nozze. Si aggiunse pertanto come il bimbo appena nato venisse ricondotto in Tessaglia ove sarebbe cresciuto iddio benefico, e l'avrebber chiamato coi nomi di Nomio di Agreo di Opaone, simile a Zeus simile a Febo. Onde la sua nascita in Libia riuscí — com'era del resto — una diversione, vie piú sentita perché anche la madre fu asportata lontano da' suoi propri luoghi.

A questo schema comune si attennero così Pindaro come Apollonio Rodio (1): ma piú fedelmente l'uno che l'altro. Pindaro canta nella nona Pitia: — Dal Pelio rapì un giorno Apollo Latoide Cirene, e condusse sul carro dorato la vergine selvaggia nella terra prospera di gregge e di biade ove la fece signora. Accolse Afrodite dal piede d'argento il Delio ospite toccandolo con mano lieve; e là su dolci letti si congiunsero in amore il dio e la fanciulla figlia d'Ipseo, Ipseo nato dal Peneo e da Creusa nelle famose grotte del Pindo. Da lui era stata allevata Cirene di belle braccia; la quale sdegnava il tesser e danzar con le compagne, sí compiacevasi di gareggiare con le belve boschive. Abbreviando il dolce sonno ella fortemente cacciava; e tale la vide il lungi saettante Apollo, onde stupito chiamò: ' O savio Chirone, corri ad ammirare l'indomita vigoria d'una fanciulla! chi la generò? è lecito a me porre l'inclita mano su lei e coglierne la fiorente giovinezza? '. Cui rispondendo Chirone con sorriso benigno, fa la profezia che il dio sposerà la fanciulla recandola nelle dorate case di Libia, ove ella gli partorirà un figlio. Questo Ermete illustre consegnerà alle Ore ed a Gea; le quali ponendogli sulle labbra miele ed ambrosia lo renderanno immortale, uno Zeus, un puro Apollo, letizia pe' cari uomini, Opaone delle gregge, Agreo, Nomio —. Se non che prima di giungere a questo vaticinio Pindaro introduce un brano che

(1) Pindaro *Pit.* IX; Apollonio Rodio *Arg.* II 500 sgg.

senza dubbio non è attinto all'Eea, ma ne è anzi la critica. Alla domanda rivoltagli dal dio, risponde il Centauro: — E che? Tu che nulla ignori del presente e dell'avvenire, che conosci quante foglie cadon l'autunno in terra, quanti nel mare e nei fiumi sieno i granelli di sabbia, chiedi a me tali cose? —. E tuttavia Chirone dopo questo sfogo ironico soggiunge: " Se è necessario anche gareggiar col sapiente, parlerò „. È chiaro, ci troviamo dinanzi a un primo allontanarsi del racconto dalla forma tipica dell'Eea: e ciò per scrupoli di coerenza teologica (1). Ad altri motivi forse è dovuto invece l'accenno ad Ermete. Questo dio difatti è qui ricordato, innovando, da Pindaro solo in grazia dell'attinenza sua con Apollo; ma è verosimile che l'Eea a quest'ultimo attribuisse l'ufficio dal poeta assegnato a quello. E ad un'analoga libera invenzione pindarica è dovuto l'intervento di Afrodite, la dea dell'amore; a cui un giardino e statue eran dedicate in Cirene e che dicevolmente certo poteva intervenire nelle nozze tra la ninfa e il dio; ma che rispetto alla Libia dell'Eea non è se non un doppione (2).

Cotesto staccarsi dallo schema esiodeo e cotesto inserirvi piccoli particolari nuovi è piú evidente negli *Argonauti* di Apollonio Rodio. Non perché alla ninfa Libia egli sostituisca " le sotterranee ninfe che abitano presso il colle dei mirti „, però che in questo differenza vi è meglio formale che sostanziale (3). Piú tosto perché Chirone non enuncia già la sua profezia, ma alleva Aristeo e lo ammaestra: il che non è se non il proseguimento della protesta polemica di Pindaro contro l'Eea. E anche perché con Chirone allevatrici del bimbo divengono le Muse, in forza dell'attinenza loro con Apollo (4), al modo istesso

(1) Cosí ottimamente Studniczka 41.

(2) Sull'attinenza di Ermete con Apollo, si vegga l'omerico *Inno a Ermete* e si cfr. con Esiodo fr. 153 R. = Anton. Liber. XXIII. — In Apollonio II 509 è Apollo medesimo che reca Aristeo in Tessaglia. — Il giardino di Afrodite in Cirene in Pind. *Pit.* V 24, di cui è da escludere un'interpretazione metaforica; Erodoto II 181 parla d'una statua. Quando fu fondata Evesperide il culto della dea vi fu trasportato perché presso il lago Tritonio vi era un suo tempio, Strab. XVII 836. Anche di Afrodite tace Apollonio, che ci riproduce in questi due punti più fedelmente l'Eea.

(3) V. sopra pag. 508 e 511.

(4) Per tale attinenza basterà ricordare *Iliade A* 603.

che si vide per Ermete. Dell'Eea restano invece l'origine tessalica di Cirene e gli altri particolari tutti.

Del resto quel penetrare nella leggenda di elementi, sebbene assai scarsi, relativi soltanto alla figura di Apollo non è che un episodio secondario d'un fenomeno piú notevole avvenuto per via naturale nel seno stesso del mito. Era difatti indispensabile che il risultato dell'elaborarsi letterariamente il racconto fosse assai diverso dall'origine onde il rifacimento poetico era mosso. Era mosso dalla Libia, ove trovava accanto a una ninfa indigena e a un dio panellenico bensí ma spiccatamente delfico un nume di pretti caratteri tessalici; da questo aveva tratto impulso a riportare sul Peneo presso Chirone tutta quanta la triade. Ma sul nuovo sfondo e nella nuova vita si mutò la prospettiva del quadro, luci ed ombre si scomposero per ricomporsi altrimenti: a prevalenza della ninfa che nei piani tessalici era esotica, piú di Aristeo che s'attenuò di fronte al dio delfico come il minore dinanzi al fratello maggiore, campeggiò la figura di Apollo, il quale anche per essere piú universo in Grecia tanto piú spiccava quanto piú si diffondeva la leggenda, e tanto piú ne facilitava il radicarsi. Attorno a lui si composero l'altre figure, con quell'arte ch'è nota ai nostri pittori di Madonne; e in Pindaro egli divenne colui che non pure conduce in Libia la ninfa Cirene sul carro d'oro, ma con essa vi reca, raccogliendolo dall'isola, il popolo dei coloni (1).

Cosí un ciclo mitico era chiuso con una equilibrata fusione di motivi libici raccolti sopra Cirene, di spunti tessalici attorno ad Aristeo, di particolari attinenti ad Apollo. Ma non rimase, come non altri, indipendente: ne fu anzi tratto un addentellato — la preponderante figura apollinea — per l'elaborazione di un altro complesso leggendario che nella Libia trovava frattanto terreno propizio.

II.

La regnante famiglia di Cirene, che dal frequente ricorrere del nome di Batto era detta dei Battiadi e in un Batto aveva il suo eponimo, ripeteva da un Eufemo, detto beota e figlio di

(1) *Pit.* IX 54 sgg. *ἐπὶ λαὸν ἀγείραις νασιώταν ὄχθον ἐς ἀμφίπεδον.*

Posidone nel mito, la sua prima origine (1): albero genealogico in cui è visibile l'innesto di un recente nome libico in un antico schema greco e di cui non sarebbe arduo addurre analogie (2). E poiché non mai si dimenticava, nel racconto tradizionale, la trasmigrazione storica dei coloni dal Peloponneso a Tera, da questa in Libia; anche ad Eufemo, al capostipite, fu attribuita una sede originaria nel Peloponneso, la sede prima degli emigrati; da cui i suoi discendenti si sarebbero poi recati nell'isola per giungere alla fine in Africa. Siccome poi al Tenaro di gran lunga preponderava il culto di quel Posidone che la leggenda beota diceva padre di Eufemo (3), sul Tenaro pure fu posta la patria di questo — sebbene nessuno de' suoi attributi convenisse al luogo ove si favoleggiava l'apertura dell'Ade, sí che mai colà s'ebbe traccia alcuna del suo culto né mai fu smarrito ricordo della sua nascita al Cefiso (4).

Ma alla tradizione che, dal Peloponneso (dal Tenaro in ispecie) a Tera, da Tera in Libia, perseguiva le vicende d'Eufemo e de' suoi discendenti sopravvenne per altro motivo un integramento. Allo scopo di testificar legittimo il dominio cirenaico dei Battiadi sé dicenti Eufemidi e di dargli nel piú antico tempo una valevole giustificazione, si pretese un anteriore soggiorno di Eufemo nella Libia: soggiorno del quale la venuta dei coloni da Tera non sarebbe stata se non la naturale conse-

(1) Eufemo avo di Batto Pind. *Pit.* IV 254 sgg.; Erodoto IV 150-2.

(2) Ognuno p. e. ricorda che i dinasti Molossi si facevan discendere da Achille e i Pisistratidi vantavano origine pilia da Nestore.

(3) Cfr. Sam Wide *Lakonische Kulte* (Leipzig 1893) 33 sgg. ove sono i testi.

(4) Al Tenaro Eufemo è localizzato già nell'Eea di lui (fr. 143 Rzach) come dimostra l'epiteto di *Γαιήοχος* datovi a Posidone; di lí dipendono Pindaro *Pit.* IV 174. 43; Apoll. R. I 179-84; IV 1568. 1575; Igino *fav.* 14; Acesandro e Teocresto in *scol. Apoll. R.* IV 1750. — Appunto perché la localizzazione di Eufemo al Tenaro non è dovuta se non ai motivi addotti nel testo, Studniczka 111 sgg. è imbarazzato nel conciliare le caratteristiche di lui con Posidone sotterraneo e l'Ade. — Nessuna delle fonti che ci parlano di Posidone al Tenaro accenna ad Eufemo, ch'io sappia. — Da ciò appare quanto imprudente sia da un mito trarre luce per la protostoria greca: fraintendendo la natura della leggenda il Malten 104 sgg. ha ricavato dal testo di Pindaro (v. sotto) un'intiera teoria che cade non appena appaian chiare le ragioni mitiche per cui Eufemo abita al Tenaro (v. n. 1 p. 3).

guenza. Ma perché mai si sarebbe l'eroe Eufemo recato in quei luoghi?

La ragione che se ne diede fu tratta, come pare, da altre analoghe leggende. Giacché l'epopea omerica non ignorava la Libia; anzi Menelao narra d'esservi pervenuto e lo stesso dice Odisseo a Eumeo nel suo lungo racconto (1). Tal motivo verrà poi svolto per narrare i naufragi di Euripilo di Protoo di Guneo — eroi tessalici — e di Diomede — eroe argivo — (2). Ma sopra tutto era approfittando della conoscenza, sia pure generica, la quale della Libia fin da molto antiche età i Greci possedevano, che altri miti avevano allargato l'ámbito delle avventure attribuite agli Argonauti. Sull'inospite spiaggia settentrionale dell'Africa e, piú precisamente, alle Sirti sarebbero essi stati vittime di naufragio. E là un dio, che per esser marino e anche tessalico riusciva dicevole protettore dei navigatori compagni del tessalo Giásone, Tritone, li avrebbe soccorsi d'aiuto, ricevendone a compenso un tripode in dono (3). Tal racconto si ebbe poi una sua giunta dalla storia, allorquando lo spartano Dorieo tentò circa il 515, con non prospera sorte, di colonizzare nelle Sirti il territorio intorno al Cinipe: però che il nome di questo fiume s'inserí per tal guisa, forse con alcun altro particolare secondario, nella leggenda (4). La quale tuttavia riesce

---

(1) δ 83 sgg. ξ 295.

(2) Licofrone 897 sgg. e *FHG.* III 472. Quando Tzetze (a Licofr. 902 = Apollod. VI 15 *a* Wagner) ricorda per tal naufragio il Cinipe, è sotto l'influenza su cui v. il testo.

(3) Questa forma originaria del mito che narrava il soggiorno degli Argonauti in Libia è ricostrutta da me per i motivi esposti nel testo, ma non si trova in alcun autore. Spogliando i racconti di Apoll. R., di Licofrone, di Erodoto, di Diodoro da quello che v'ebbe a introdurre: *a*) la realtà storica del tentativo di Dorieo (v. n. sg.); *b*) il mito cirenaico; resta appunto quel che ho esposto.

(4) La spedizione di Dorieo deve solo aver modificato in un particolare, ma non ispirato completamente quel mito per una ragione cronologica. Essa avvenne nel 515. Nel 462 Pindaro mostra con la sua *Pit.* IV che il mito degli Argonauti in Libia s'è già combinato con quello di Eufemo per mezzo di una marcia di 12 giorni (v. sotto); il che lascia supporre una lunga elaborazione mitica. La quale, non essendoci spazio sufficiente tra il 515 e il 462, andrà collocata in altra epoca spostando all'in su l'origine del mito sirtico.

per noi importante per aver dato impulso al formarsi, in obbedienza alla analogia, d'un nuovo episodio del mito di Eufemo.

Fu difatti questo il racconto di cui si profittò nell'interesse dei dinasti cirenaici per giustificar la presenza antichissima di Eufemo in Libia. E, adattandovisi, si disse questo essere uno degli Argonauti e con essi esser giunto a quel lago ch'è detto Tritonio dal nume protettore di Giásone; ma si tacque lo sfavorevole particolare del naufragio. Per contro è ovvio che nuovi elementi vi si dovessero aggiungere: onde e non diedero gli Argonauti un tripode sí ricevettero, pegno di futuro possesso, una zolla e chi la diede non fu Tritone ma un altro essere mitico, Euripilo (1). Di questo, che non è se non il nume della " larga porta „ infernale, la figura era indotta nel mito per effetto appunto di Tritone e del lago Tritonio cui Eufemo sarebbe pervenuto e presso cui si apriva difatti l'ampia e orrida grotta, ove sotto la volta rocciosa ristanno nelle tenebre le acque, che oggi ha nome di Gioh (2). Tale caverna simigliante dinanzi le spaurite fantasie la fosca apertura d'oltretomba aveva dato impulso a concepire ancor qui — siccome in altri luoghi analoghi e presso altri popoli affini (3) — il sotterraneo nume d'Euripilo e ne serbava vivo e radicato il ricordo. Lí egli aveva assunto aspetto di vecchio iddio indigeno abitatore antichissimo dei luoghi. Di lí anche, dacché non resta nume alcuno isolato appresso i Greci, s'era connesso e con il Geaoco Enosigeo, la cui paternità gli era (direi) indispensabile in tanta simiglianza, e con altre poi divinità di origine diversa venerate tutte però in terra di Libia: con Pasifae, che si rintraccia anche in Creta; con Tritone; con Liceo (4). Di lí infine egli, credo, si mosse per recarsi vicino

---

(1) Pind. *Pit.* IV 33 sgg.

(2) Cosí m'insegna Gaetano De Sanctis. Cfr. sul Gioh Minutilli *La Tripolitania* (Torino 1912) 308 sgg.

(3) Un Euripilo signore di Ormenio in Tessaglia è figlio di Evemone *B* 736 (nel " Catalogo delle navi „); uno re dei Meropi *B* 677 è figlio di Posidone; un terzo misio è figlio di Telefo *λ* 519 sgg. e condottiero dei Celei (cfr. però Studniczka 118). Per l'Acaia v. Paus. VII 19.

(4) Tali nessi sono in Acesandro cfr. *scol. Pind. Pit.* IV 57 e Malten 116 E se si tien presente che in Cirenaica sono tracce di Pasifae (S. Wide 249), di Tritone (Strab. XVII 836 e Pind. *Pit.* IV 20), di Liceo (Zeus Liceo Erod. IV 203, 2 e Studniczka 14 sgg.) non vi può esser maraviglia di trovare questi

alla prossima palude Tritonide (si pensino gli odierni laghi salati di Bengasi) e consegnarvi la zolla fatidica all'eroe Eufemo. Onde riusciva formato, sulla trama di quel degli Argonauti ma con atto e figura nuovi, un altro e diverso mito.

Se non che i due *μῦθοι*, che pure erano già nell'origine commessi l'un l'altro, difficilmente avrebbero potuto non esercitare reciproco influsso. Lo esercitarono difatti e cosí vivo che in nessun testo letterario ci è serbata traccia distinta e dell'una e dell'altra leggenda, ma sono intimamente contaminate fra loro. Cosí Erodoto (1): il quale per un lato narra bensí il naufragio e l'intervento di Tritone, conforme la piú antica leggenda; ma da questo fa poi profetare che un discendente degli Argonauti è per giunger nella terra e che nei luoghi dell'occidente libico i Greci fonderanno cento città: — vaticinio favorevole all'impresa di Dorieo, in cui però è palese l'influsso dell'analogia con la piú reale e davvero fiorente colonia teraica. E dagli abitanti appunto di Bengasi, l'Evesperide dei Greci, Diodoro (2) narra esser stato ritrovato il tripode, ché tale era la loro pretesa. Né ancor grande è l'equivoco; ma è maggiore quando Licofrone (3) mescola il Cinipe delle Sirti con Tauchira e Ausigda siti di Cirenaica, della Cirenaica ricorda gli antichissimi Asbisti e fa prevedere i nuovi coloni. Piú di tutti però è complesso nel contaminare Apollonio (4), e piú palese: perché nella leggenda ch'egli riferisce è piú chiara la coscienza che i due luoghi ove si svolgono i due miti son diversi a malgrado dell'analogia dei racconti. È quindi sentito il bisogno di far passare gli Argonauti dalle Sirti, ov'è avvenuto il naufragio, al lago tritonio; è

nomi uniti con quello di Euripilo, per chi ricordi l'influenza esercitata dalla vicinanza de' culti. Onde che avesse un culto in quei luoghi anche, p. e., Licaone, il quale ritroviamo nello stesso stemma di Acesandro, è legittimo supporre, anche se non è tramandato. È poi ovvio che, stabilitisi una volta tali nessi, i mitografi si prendessero cura di completarli aggiungendo accanto a ciascun nome i nomi delle divinità a cui era nella mitologia congiunto: ma queste restano inserzioni posteriori e fittizie. Il trovare poi questi culti in Libia, ove " tanta moltitudine „ (Erod. IV 159, 2) d'ogni parte di Grecia si raccolse, non può stupire nessuno.

(1) IV 179.

(2) IV 56, 6.

(3) 877 sgg.

(4) IV 1230 sgg.

narrato per conseguenza che, recando le navi sulle spalle, per dodici giorni essi fecero cammino verso oriente fin a pervenire alla palude di Tritone. Non senza tuttavia che l'elemento cirenaico abbia preponderanza: giacché il motivo di quella marcia singolare è un oracolo delle Eroisse " le sotterranee ninfe protettrici e figlie di Libia „ (1), quelle medesime che detersero Atena nascente da Giove con l'acqua tritonia; e l'avventura si scioglie col dare Tritone la zolla e riceverne il tripode, onde è suggellata la fusione tra le due leggende.

Che se sul naufragio sirtico tanta influenza esercitava l'episodio cirenaico, reciprocamente su questo quello faceva sentire la sua efficacia, anche attraverso alla contaminazione che dei due miti era avvenuta. Pindaro difatti asserisce che Euripilo consegna ad Eufemo la zolla in dono ospitale quando per consiglio di Medea da dodici giorni la nave era stata tratta in secco (2): il che lascia supporre il particolare istesso di cui è eco anche il Rodio allo scopo di commettere fra loro le due sedi delle due leggende. Ora appunto cotesto intimo fondersi del racconto originario con il posteriore mostra chiarissimamente quanto a fondo Eufemo fosse penetrato tra gli Argonauti cui non apparteneva dapprima. E l'esser penetrato tra quelli, tanto piú se in modo essenziale, significava il conseguente estendersi al figlio dello " Scuoti la terra Enosigeo „ le vicende proprie dei compagni navigatori, e il divenire dell'uno pure i luoghi toccati dagli altri. Fra i luoghi, uno in ispecie che già la Iliade ampiamente conosceva e narrava abitato dai figli di Giásone: l'isola di Lemno con le cui donne s'erano gli Argonauti congiunti (3).

Lemno. Ed ecco il nucleo mitico originario, che non comprendeva se non la favolosa sede al Tenaro e il ricordo di Tera e il sopraggiungere in Libia, si svolge arricchendosi d'un nuovo elemento che ne complica l'evoluzione, divenendo causa di un piú vasto e piú complesso lavorío. La linea ideale del viaggio compiuto da Eufemo si allunga e si estende: Lemno, il Tenaro, Tera, infine la Libia ne divengono i quattro punti fissi e obbli-

(1) Cfr. a pag. 6 e a n. 2.

(2) *Pit.* IV 25 sgg.

(3) *Η* 467 *Θ* 230 *Ξ* 230, 281 e specialmente *Φ* 40 sgg.

gati cui è vincolata oramai ogni ulteriore invenzione. Della quale c'è evidente necessità, oltre che per l'impulso ricevuto, anche per chiarire, ancora nell'interesse dei Battiadi, con una completa illustrazione mitica la reale vicenda della colonia cirenaica. Non bastava l'aver legittimato con la zolla donata un dominio; era d'uopo dire perché i discendenti di quell'Eufemo dovessero nel compiere il viaggio voluto dal fato seguire, non un altro, ma un determinato cammino. Da questo bisogno e con quegli elementi furono originati e intessuti i racconti che leggiamo in Pindaro e in Erodoto: nell'uno con piú sbrigliata e libera fantasia e con piú forte predominio del senso religioso di fato; nell'altro con maggiore e piú matura coscienza della concreta realtà umana e con un sentimento meglio formato delle migrazioni dei popoli (1).

Canta Pindaro. Ma sotto la smaglianza dei suoi colori è lecito ed è possibile ricostruire lo schema logico che ha guidato la leggenda del suo canto. Il dono della zolla aveva un valore e un'efficacia fatale: doveva far sì che i discendenti del donato approdassero un giorno alla terra onde essa era stata tolta. È pertanto in quell'episodio che s'ha da incardinare tutta quanta la motivazione poetica del passaggio storico dei Dori in Libia. Ora Eufemo nella sua qualità d'Argonauta procrea in Lemno la sua discendenza. D'altra parte la sua patria è il Tenaro. Sarà quindi legge fatale che la propaggine passi da Lemno in Laconia verso il compimento dell'ineluttabile conquista libica. Ma perché di Laconia si recano essi in Tera? Ben più ovvio era nella logica del mito che dal Tenaro si muovessero i Dori coi leggendari Danai dell'epopea (2), che tutti “ dalla grande Lacedemone si partissero e dall'Argivo golfo e da Micene „, così come avvenne regnando in Cirenaica il re Batto II (3), e prendessero in loro possesso la Libia. Non fu cosí. Tera esigeva in nome della verità storica il suo posto. Se l'ebbe: in grazia d'un

(1) Pind. *Pit.* IX Erodoto IV 150-159.

(2) Leggendari: v. Beloch *Griech. Gesch.* I 156.

(3) A questo io riduco quanto Studniczka 109 sgg.: il moto che sotto Batto II condusse in Africa numerosi Peloponnesiaci non può aver determinato il brano pindarico, tanto meno poi un carme di cui questo sarebbe l'obiezione polemica; può bensí aver colorito e compiuto nei particolari il disegno leggendario, tracciato per le ragioni dette nel testo.

diffuso motivo novellistico non ignoto né pure all'Odissea. O non avevano i compagni d'Odisseo, disobbedienti, aperto l'otre d'Eolo e impedito il più pronto ritorno in Itaca dell'eroe (1)? Cosí dei servi sulla nave Argo, dei servi " che sciolgono le fatiche „, non furon desti gli animi; e la zolla contro opportunità non ebbe la naturale sua sorte, non fu gettata sul Tenaro, presso l'Ade, dov'è Eufemo nel mito e nella realtà ha culto il padre suo Posidone, non produsse in quel luogo l'effetto dovuto, ma al contrario pervenne in Tera — sí che a Tera dovranno da Lemno, attraverso la Laconia, recarsi i discendenti degli Argonauti. E a cotesto processo logico risponde pienamente la forma: " Se Eufemo pervenuto in patria avesse gittata la zolla presso la voragine del sotterraneo Ade, al sacro Tenaro..... „; se — diremmo noi — il mito avesse potuto avere il suo logico svolgimento: in tal caso la fantasia del poeta sotto l'influsso dell'epica e d'una piú tarda realtà vede dal Peloponneso partirsi il largo stuolo dei coloni verso la Libia; nella quarta generazione, aggiunge, per riscontro piú preciso al calcolo che poneva nella decima settima dopo Eufemo la colonizzazione di Cirene. Invece è da Tera che muovono i Dori perché la zolla giunse " prima del tempo „ a Tera: per ciò Eufemo " nel letto di straniere donne troverà nobile discendenza, la quale giunta a quest'isola di Tera genererà una stirpe signora nei piani di cupa nuvolaglia „; non senza essersi prima, toccando la sede prisca dell'avo, mescolata co' Lacedemoni (2). Se non che per tal guisa sembrava dover riuscir malcontenta l'ambizione dei Terei che vedevano il caso solo aver determinato la loro impresa. Gli è per questo che al racconto è data la forma di profezia, e la profezia è enunciata da Medea in Tera. Dall'isola cosí, " madre di grandi città „, si lancia con ardito volo il pensiero nel lontano avvenire e intorno all'isola si drappeggia la leggenda come intorno a un corpo la veste. Che importa se non

(1) κ 46.

(2) Se la predominante parte attribuita qui a Sparta nella colonizzazione di Tera risponda alla realtà ovvero sia un'eco di fatti posteriori deve decidere la ricerca archeologica. Stando a Hiller v. Gaertringen *Thera* I 148. 156 III 78 ci si dovrebbe attenere alla seconda ipotesi. L'analisi del mito non ne rimane pregiudicata.

mancano irrazionalità geografiche? Importa invece che vetustissime vicende ed eroiche dieno ai dominatori della feconda Libia la sicurezza d'una fatale non prescrittibile signoria cui già erano predestinati abitando il Peloponneso montuoso e la marina Tera.

Ma Erodoto narra altrimenti, pur attenendosi nel fondo al tradizionale racconto pindarico. Egli tace, forse perché l'ignora o forse perché lo respinge, l'episodio della zolla donata da Euripilo ad Eufemo. Ben è vero che cotesta era appunto la radice prima di tutto il mito e che sopprimendola viene a mancare il motivo delle successive migrazioni fuor da Lemno fuor dalla Laconia e fuor da Tera; tuttavia lo storico sa limitarsi a raccogliere le conseguenze di cui l'atto di quel dono era pregno e ne dà diversa giustificazione. Se difatti gli Argonauti procreano in Lemno una discendenza, egli sente di doverle dare un nome etnico, e chiama dei " Mini „ la schiatta nata dalle " straniere donne „: approfittando certo dell'affinità strettissima ch'era tra il concetto e il nome comprendenti i compagni di Giásone e il concetto e il nome dei Mini, i quali già in Pindaro erano insieme confusi e dopo di lui insieme andranno sempre congiunti (1). Pel resto la sua esperienza di storico che conosce altre colonie e i modi di loro origine suggerisce al suo racconto gli spunti indispensabili. Cosí da Lemno i Mini non partono per necessità di fati, sí perché i Pelasgi li discacciano. E dal Peloponneso si staccano dopo che la lor prepotente violenza ha acceso dissidio con i primi abitatori del luogo: anzi poiché Erodoto sapeva di Mini in Trifilia collega questi con quelli i cui discendenti si recano in Tera (2). Come si vede, il racconto ha acquistato un aspetto piú sodo, piú terreno direi, che gli permette di complicarsi con altri filoni di storia e di leggenda. E lo stesso carattere esso serba anche quando proseguendo narra l'emigrazione da Tera in Libia. È certo difatti per un attento rispetto della realtà che essa vien fatta com-

(1) Sarebbe inopportuno indagare qui sulla leggenda dei Mini e degli Argonauti. Ma non è dubbio — anzi lo dimostra Pind. *Pit.* IV 69 — che presto i due concetti si sovrapposero: ed una forma di cotesta sovrapposizione è il racconto di Erodoto che fa gli uni discendenti dagli altri.

(2) Sui Mini di Trifilia cfr. l'appropriata spiegazione datane dal Beloch *Griech. Gesch.* I 160.

piere con trepidanza per l'ampiezza del tragitto e il pericolo e che in un'isola Platea prossima alla costa libica si dicono soffermati per una tappa di alcun tempo i coloni. Ma a questo riguardo le tradizioni divergono: una ve n' è — dei Terei, la chiama Erodoto — la quale lascia partecipare all'impresa un marinaio di Creta; vi fa intervenire una nave di Samo, soggiungendo che per questa si strinse l'amicizia di Cirene e di Tera con i Samii; termina informandoci dell'essere i coloni stati scelti cosí che vi fu mandato " il fratello che avea gareggiato nella sorte col fratello „: e un'altra ve n'è che invece — Erodoto la chiama dei Cirenei — dice Batto nato da un Tereo e dalla figlia discacciata d'un re cretese, tace della nave Samia e accenna a una contesa fra i, pochi, coloni inviati e quanti rimasero in patria. Diversità, come si vede, di particolari ch'è, in fondo, soltanto diversità di colorito dovuta alle diverse tendenze di quei partiti che in Cirene si combattevano quando Erodoto vi raccolse la leggenda: i " Terei „, ossia i discendenti da' piú antichi coloni, gelosi dei privilegi loro, e i " Cirenei „, o nuovi coloni affluiti sotto Batto II dal Peloponneso, cupidi di ottenere, e denigravan perciò chi gli aveva preceduti in Libia, piú ampi diritti (1). Identità invece è nell'atteggiamento umano sociale e politico del racconto; e nella sua sostanziale compiutezza.

E dovrebbe bastare. In sé e per sé considerato anche questo mito, sia che gli si lasci il fantasioso segno impressogli nei versi di Pindaro, sia che lo si umanizzi a mo' del racconto erodoteo, è compiuto è perfetto: nulla v'è di cui piú oltre abbisogni. Ma non bastò. Perché alla leggenda intrinsecamente conchiusa si sovrappose un elemento estrinseco, elaborato in un altro ciclo sorto e svoltosi nei medesimi luoghi: la prevalente figura del dio Apollo.

III.

Fu nel crogiuolo ove il contatto in fra i diversi membri della grande famiglia greca facilitava la fusione fra le varie leggende dei differenti luoghi che i miti d'uno stesso luogo si commisero per inopinate attinenze. Fu nell'ambiente dei grandi giuochi in onore di Apollo Pitio.

(1) Si vedano le dicevoli osservazioni di Malten 101 sgg.

Dice Pindaro, e ci offre, nella fonte mitica cui attinge, un chiaro esempio del come si esercitasse tale influsso (1): — Arcesilao di Cirene vinse col carro nelle gare pitiche. Onore a lui. Onore al dio per cui è la festa e senza il cui favore nulla si ottiene: al dio che " a uomini e donne dà lenimenti de' gravi morbi, e donò la cetra, e a chi mai gli piaccia largisce Poesia, inspirando ne' cuori pacifica giustizia, ed è presente nume nell'antro profetico "; da questo partí l'impulso che fece signori, oltre che in Argo e in Pilo, in Sparta i discendenti d'Eracle; questo fa noto che da Sparta traggono origine gli Egidi venuti in Tera..... E quando i primi coloni dori giunsero con Aristotele in Libia e vinsero gli Antenoridi, " stirpe agitatrice di cavalli " (2) che vi abitava; allora insiem con essi pervenne in Libia da Tera il tuo culto, o Apollo Carneo —. È chiaro: il poeta vuol mostrare come in ciascuno dei luoghi ove gli antenati del vincitore Arcesilao ebbero stanza nel mito sieno tracce di Apollo o dell'oracolo suo: in Sparta per la venuta degli Eraclidi, in Tera per quella degli Egidi (3), in Libia pel culto che Aristotele v'istituí al Carneo quando " maggiori sacrari eresse agli iddii e aprí alle salutari processioni d'Apollo diritta e piana una risonante via selciata ". A tal fine sono avvicinati e tenuti insieme dall'unico elemento comune ch'è Apollo tre miti diversi e distanti: la migrazione dei discendenti d'Eracle; quella degli Egidi;

(1) *Pit.* V.

(2) Il ricordo degli Antenoridi qui è dovuto con ogni probabilità all'epica (*B* 822 *M* 99 sgg.; *Z* 119. 197 *P* 140 cfr. Paus. X 27, 3) piú che agli influssi cretesi supposti da Studniczka 149 sgg. A Malten 146 sgg. va semplicemente osservato che " Antenoridi " non è se non la forma poetica e nota dall'epopea che Pindaro preferisce al non consueto ma esatto etnico " Asbisti " di Erodoto. Né la ragione di quest'uso è molto oscura. In *Scol. Pind. Pit.* V 108 si apprende l'esistenza di un *μεταξὺ Κυρήνης καὶ τῆς θαλάσσης κείμενον λόφον Ἀντηνοριδῶν ἐπικεκλημένον*. Par verisimile che l'aver dato i coloni terei quel nome a un tal luogo (per influsso forse dell'epopea) fosse poi causa della leggenda che gli Antenoridi faceva pervenire in Libia con Menelao (sul quale v. p. 517 e n. 1).

(3) Gli Egidi sono, come si vede, ancora indipendenti dalla leggenda cirenaica; non lo son piú in Erodoto IV 149, 2 per una nuova contaminazione avvenuta. Ma poiché il trattarne dicevolmente e l'esporre le mie idee sull'argomento mi svierebbe dal tema, lascio in disparte questo piú tardi inserto nesso.

la leggendaria regola da Batto I (o Aristotele) data al culto cirenaico del Carneo.

Analogamente. Là dove si trovassero accanto sull'istesso terreno due miti germogliati nella fantasia d'un medesimo popolo, sí però che nell'uno soltanto splendesse il lume del saettante iddio, era fatale l'intervento di questo anche nell'altro. Lo stesso Pindaro e la stessa ode offrono ed esempio e conferma: è Apollo, l'amante di Cirene, della ninfa domatrice di belve che ne fece sgombro il paese, il quale assiste Batto nel punto di fugare i " leoni dal profondo ruggito „; è Apollo, " affinchè non restino incompiuti gli oracoli suoi al signor di Cirene „. Dove il processo logico è addirittura trasparente: a Cirene si sostituisce Batto nel medesimo ufficio, l'eponimo dei re all'eponima della fonte; — di Cirene assume Batto le attinenze con Apollo; — Apollo diviene il dio che ha voluto l'impresa (1).

In questo ambiente e per tale via si sposta la figura del Latoide estendendosene l'efficace influenza fuor dal mito di Cirene a quello di Eufemo e dei suoi discendenti. Alla materia plasmata secondo queste direttive attingono le fonti e di Pindaro e d'Erodoto per completare i loro racconti. I quali, può dirsi, coincidono, dacché entrambi precisano l'intervento di Apollo per mezzo dell'oracolo delfico nel punto in cui da Tera i coloni debbono spingersi in Libia. Fu allora che a Batto la Pitia disse " Va! „. Oltre però cotesta fondamentale simiglianza, nel resto differiscono, com'è ovvio, il poeta e lo storico.

Per quello era — si disse — fatale conseguenza della zolla donata la migrazione da Tera in Africa. Merito quindi dell'oracolo delfico non è d'altro fuor che d'aver voluto contribuire a inverare il fato e d'aver saputo in Aristotele-Batto cogliere l'uomo opportuno: " O beato figlio di Polimnesto, te giusta il discorso di Medea mosse l'oracolo dell'ape delfica con spontaneo accento „. " Con spontaneo accento „: egli difatti era venuto a interrogarla intorno alla sua balbuziente voce, qual rimedio vi fosse; essa

(1) A questo risultato — cui sarebbesi pervenuti anche per la pura e semplice evoluzione degli elementi originari e intrinseci del mito — contribuí certo il carattere notevole di Apollo come protettore di coloni e iniziatore di colonie: su cui cfr. Wernicke in Pauly-Wissowa *R.-E.*[2] II 18.

gli ha risposto: “ récati in Libia „ (1). Un trasparente mito etimologico per vero, cercando di spiegar quel nome libico di Batto cui erano disuete orecchie greche, e valendosi del verbo *βατταρίζω* (balbettare), narrava come per cercar rimedio alla voce si recasse Aristotele a Delfi (2).

Questo medesimo aneddoto riferisce Erodoto nella sua tradizione “ cirenaica „ la men favorevole pei regnanti Battiadi; nell'altra “ terea „ invece Aristotele riceve l'incarico di condur l'impresa dal re Grino di Tera che ha consultato l'oracolo per alcun suo scopo non precisato (3). Ma fuor che in questo le due leggende parallele son concordi nel dare il massimo rilievo all'intervento di Apollo. E si capisce: in questi racconti, ove non appaion leggi di fato ma vicende pianamente umane, i concreti motivi di consueta realtà onde era giustificata la partenza dei coloni da Tera scompariscono presto di fronte all'abbagliante splendore del dio. Del quale è anche detto che non poca resistenza ebbe a incontrare prima che si compiesse il voler suo, sí che dovette punire i negligenti con un'ardente siccità di ben sette anni. — Onde né di poi pure si lasciò cessare l'influenza del dio delfico; ché anzi in alcuni essenziali momenti della storia cirenaica, tenendo il governo il re Batto secondo e il terzo, e il terzo Arcesilao, si fece intervenire il mónito di Apollo. Gli interessi e le passioni locali venivano cosí ingranditi col proiettarli sullo schermo illuminato dell'autorità profetica di Febo, mentre le varie sfumature dei sentimenti, consone ai diversi periodi della vita politica, scomparivano in un'ideale sintesi di cui l'anima era la Pitia sentenziante (4).

Fu questa la conseguenza estrema d'una evoluzione cui erano andati soggetti, ciascuno per sé, i due miti da prima distinti; la quale, rilevando accanto a Cirene la figura di Apollo e facendolo divino adunatore del popolo rappresentato dalla ninfa, aveva spinto l'una leggenda a dar cenno sull'origine della

(1) *Pit.* IV 59 sgg.
(2) Cosí Studniczka 96.
(3) IV 154-6 la versione “ cirenaica „; IV 150-3 la versione “ terea „.
(4) Per maggiori particolari di questo fatto che, essendo una semplice conseguenza di quel fenomeno sul quale ho insistito nel testo, credo di poter solo accennare, v. Malten 196 sgg.

colonia; nel tempo medesimo che l'altra tribuiva per orgoglio dinastico a Batto la stessa opera purificatrice della fanciulla acquatile e lo accostava pertanto al nume di Delfo.

IV.

Se non che, aperta una volta la via alle immistioni d'un mito nell'altro, non era piú oltre possibile un netto confine tra i due. Tanto meno poi possibile era in quella tradizione piú strettamente cirenaica la quale accogliendo i sempre nuovi elementi intrusi era indotta a confondere il tutto in un solo complesso dalla sostanziale identità dei luoghi ben conosciuti e dalla materiale vicinanza dei culti rispecchiati nella leggenda. Che se l'Apollo amante di Cirene conduceva i discendenti di Eufemo a compiere con una conquista l'atto di Euripilo ospitale donatore attuandone il senso riposto, qual maraviglia che essa Cirene si mostrasse in un qual siasi modo congiunta con quell'Euripilo?

Nessuna — purché si rifaccia il processo della elaborante fantasia. Nell'originario mito di Cirene, alla figura libica di questa, ben ritenuta divinità strettamente indigena e vincolata alla fonte, faceva riscontro quella importata, senza che dell'importazione la coscienza fosse mai in alcun modo affievolita, di Apollo Carneo. D'altra parte, nella leggenda primitiva d'Eufemo e d'Euripilo il sembiante dell'avo localizzato sul Tenaro si contrapponeva spiccatamente all'imagine del nume dalla porta infernale stimato antichissimo abitatore de' luoghi. Nel complesso evolversi di questi due nuclei l'Apollo dell'uno aveva vegliato sulle sorti dei lontani discendenti di quell'Eufemo che dell'altro era parte. Un passo ancora: e il parallelo sarà compiuto quando la tutta libica Cirene guardi con la desta sua energia e la fiera fortezza le mandrie dell'antico signore Euripilo. Che non era difficile, ove si vegga come a risvegliare nelle menti il sopito carattere indigeno della ninfa dovesse servire la sua fonte medesima, della quale era *praesens numen* e nella quale immaneva (1).

(1) Tutto ciò come è contro MALTEN 41 sgg. 58-9, che vede nel nesso Euripilo-Cirene una forma piú antica della leggenda, cosí mi pare di evidenza intuitiva. È certo che Pindaro non conosceva quel nesso dacché egli

Questo carattere non di serbata esattezza nei ricordi, sí di evolutivo ritorno e complesso risorgere, spiega anche perché non mai, o a stento, la leggenda in tal modo formata con rinverdir il valore di Cirene libica riesca a tenersi pura dalle tracce di quella che in Tessaglia narrava la patria di lei. Anzi le due rammenta, sebbene in separati inni, entrambe Callimaco, facendo la ninfa intenta a salvare i beni d'Euripilo re, ma dicendola pure partecipe alla gara in onore di Pelia intorno alla tomba di lui. Ed Acesandro non ignora che di Tessaglia Apollo ha recato in Libia Cirene, ma e asserisce che vinse ella il premio proposto dal regnante Euripilo contro il leone " infestante il paese „ e ne ottenne la signoria. Che è quanto, a un dipresso, sa e racconta anche Filarco (1).

Ma oramai la vicenda è finita. È giunta nella sua massima, ma non nella sua migliore compiutezza. E a chi guardi nell'insieme il lento sorgere d'essa e il suo allargarsi e complicarsi non sfugge come tra la forma che ci rispecchia Pindaro, mista di elementi libici e di tessalici, frutto d'elaborato letterario, e quella di cui la Cirenaica ci manda gli ultimi illanguiditi riflessi, stia, grande parentesi o variato intervallo, il racconto di Batto d'Eufemo e degli uomini dori venuti dal Peloponneso attraverso Tera: parentesi il cui senso è espresso da Apollo e da Euripilo; intervallo varcato, come per ponti, dall'uno e dall'altro dio, dei quali quello e ama Cirene e dà impulso ai coloni, questo e dona la fatidica zolla e vede salve le gregge per merito della ninfa salvatica cacciatrice.

o la sua fonte, ingannati anche dal nome tessalico di Euripilo, gli avrebbero dato posto sul Peneo accanto a Chirone. Che se dunque il nesso è posteriore a Pindaro, è anche posteriore alla leggenda, già riflessa in lui, di Euripilo e di Eufemo. Par quindi legittimo pensare che Euripilo si commetta con Cirene, dopo che la sua figura ha assunto valore e rilievo indigeni nel mito della zolla.

(1) Callimaco *Inni* II 85-94 III 206 sgg., Acesandro in *scol. Apoll. R.* II 498, Filarco *ibid.*

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

S
E
1

5

E
S
4

3

2

E
S
6

Off. Fototecnica Ing. Molfese - Torino

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLVII, Disp. 10ª, 1911-1912.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

CLASSE
DI
SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 24 Marzo 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SALVADORI, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, MATTIROLO, GRASSI, FUSARI, e SEGRE Segretario. — Scusa l'assenza il Socio D'OVIDIO.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

Il Presidente comunica il telegramma inviato a nome dell'Accademia al Ministro della Real Casa per rallegrarsi che le LL. MM. il Re e la Regina siano scampati ai pericoli di un infame attentato, e la risposta a quel telegramma.

L'Accademia delle Scienze naturali di Philadelphia ha ringraziato la nostra Accademia, per la deliberazione di farsi rappresentare alle feste centenarie di quella.

Il Socio corrispondente LIEBISCH ha inviato in dono due sue Note: *Ueber die Fluoreszenz der Sodalith- und Willemitgruppe in ultravioletten Licht*, e *Ueber den Schichtenbau und die elektrischen Eigenschaften des Zinnerzes.*

Il Socio GUARESCHI presenta in omaggio, anche in nome dell'Autore, Dr. H. SCHELENZ di Cassel, un interessante opuscolo *Zur Geschichte der Pharmazeutisch-Chemischen Destilliergeräte*, nel quale sono raccolti i dati storici e le figure di apparecchi per la distillazione dai più antichi tempi della Caldea, dell'Egitto, ecc.,

sino ai tempi moderni; e, fra gli altri, sono ricordati i lavori dei nostri Biringucci, Savonarola, Angelo Saluzzo, ecc.

Il Socio Mattirolo offre in dono tre suoi opuscoli: *Ciò che hanno fatto i botanici italiani nell'ultimo cinquantennio e ciò che dovrebbero fare. — L'attività della R. Accademia di Agricoltura nell'estate del 1911. — Gastone Gautier e l'opera sua.*

Il Socio Camerano presenta, per l'inserzione negli *Atti*, una Nota del Dr. S. Dezani su *Le leggi della digestione peptica.*

LETTURE

Le leggi della digestione peptica.

Nota del Dott. S. DEZANI.

La maggior parte delle reazioni enzimatiche sono da considerarsi — come è noto — reazioni del tipo monomolecolare. Per esse quindi esiste entro certi limiti diretta proporzionalità tra la concentrazione dell'enzima e la velocità di reazione, o, più semplicemente, tra la concentrazione dell'enzima e la quantità di substrato trasformata.

Tuttavia non rare sono le eccezioni; tra queste le più caratteristiche sono certo quelle dovute alla zimase, alla pepsina ed alla tripsina. Per la zimase si ha che la velocità di reazione cresce assai più rapidamente che la concentrazione del fermento ed in taluni casi proporzionalmente al quadrato della concentrazione del fermento (Herzog) — per la pepsina e la tripsina invece la velocità di reazione non cresce che proporzionalmente alla radice quadrata della concentrazione dell'enzima. Quest'ultima relazione è nota sotto il nome di *regola* di Schütz e di Borisow. Si è voluto spiegare queste anomalie mediante reazioni secondarie che avverrebbero fra i prodotti della reazione e l'attivatore dell'enzima. Ad es. nella digestione i peptoni formatisi sottrarrebbero mano a mano l'acido cloridrico necessario per l'attività del fermento proteolitico.

Il primo a studiare un po' da vicino la legge dell' azione della pepsina fu forse il Brücke (1862). Egli, osservando la digestione di fiocchi di fibrina, poteva dedurre che le quantità di proteina disciolta erano proporzionali alla concentrazione della pepsina ed alla durata dell'esperienza.

A ben diversi risultati giunse E. Schütz (1), operando invece che con albumina allo stato solido con albumina allo stato

(1) " Hoppe Seyler's Zeitschr. ", 9, pag. 577.

di soluzione. Egli poteva infatti dimostrare che nella digestione dell'albumina dell'uovo, la quantità di proteina trasformata nell'unità di tempo diminuisce colla durata dell'esperienza, e che la quantità di albumosi e di peptoni formatasi è proporzionale alla radice quadrata della concentrazione dell'enzima e del tempo. Queste due relazioni possono esprimersi colle formule:

$$x = \varkappa \sqrt{C} \qquad\qquad x = \varkappa_1 \sqrt{t}$$

dove x è la quantità di albumina trasformata, C la concentrazione della pepsina, t il tempo, $\varkappa$ e $\varkappa_1$ due costanti che si possono ottenere dall'esperienza. Nelle sue ricerche il Schütz determinava la quantità di peptone formatasi per via polarimetrica.

La regola di Schütz fu in seguito confermata per parte di molti autori e per differenti vie.

Borissow e Samoiloff (1) la trovarono esatta anche operando col dispositivo di Mett, sebbene in questo metodo la reazione proceda in un sistema eterogeneo. Seguendo il corso della digestione colla misura delle variazioni della conducibilità elettrica il Sjöqvist (2) ha pure portato un buon materiale di esperienze in sostegno della regola di Schütz. A identici risultati giungeva J. Schütz (3) operando con soluzioni diluite di albumina d'uovo. Dopo 15 ore di digestione egli coagulava l'albumina non trasformata e nel filtrato dosava l'N secondo Kieldahl.

In questi ultimi anni infine Kurt Meyer (4) portava un nuovo contributo alla legge d'attività della pepsina applicando il metodo di Fuld (digestione dell'edestina).

Tuttavia non sono mancate per il passato e non mancano tuttora voci discordi sulla esattezza della regola di Schütz. Anomalie di varia natura avevano già riscontrate il Samoiloff, lo Schütz e l'Huppert nelle loro esperienze; i risultati che essi ottenevano variavano non appena variavano le condizioni dell'esperienza (*temperatura, concentrazione dell'acido cloridrico e del substrato, dello stato fisico dell'albumina, ecc.*).

---

(1) " Arch. des Sciences biolog. ", 2, pag. 699.
(2) Euler, *Allgemeine Chemie der Enzime*, pag. 125.
(3) " Hoppe Seyler's Zeitschr. ", 30, pag. 1.
(4) " Chem. Zentralblatt ", 1908, II, pag. 1275,

Recentemente poi il Gross (1) come conseguenza delle sue esperienze sulla digestione della caseina, deduceva che la regola di Schütz non ha valore alcuno, poichè nella digestione peptica la quantità di albumina digerita è direttamente proporzionale alla concentrazione dell'enzima ed inversamente proporzionale alla durata della digestione.

I risultati del Gross furono però vigorosamente impugnati da E. Schütz. Del resto — a mio avviso — le condizioni d'esperienze in cui operava il Gross sono troppo lontane da quelle ordinarie (*la durata della digestione nelle esperienze del Gross supera di poco i sessanta minuti*), perchè ad esse si possa attribuire tanta importanza da infirmare i risultati ottenuti dagli altri autori.

Ultimamente il Grützner (2) riprendendo l'esame di cotesta questione trovava che — colle quantità di fermento e di substrato ordinariamente impiegate e fino a che la digestione ha breve durata — esiste proporzionalità fra la concentrazione della pepsina e la velocità di reazione, ma che col prolungarsi dell'esperienza la proporzionalità scompare; per un certo periodo di tempo vale allora la legge di Schütz. Se le quantità del substrato sono piccole, la velocità di reazione cresce pure proporzionalmente al crescere della concentrazione dell'enzima; ciò non succede più, tosto che la quantità del substrato diventa assai grande. Il Grützner ne deduce non potersi stabilire una legge unica per la digestione peptica.

La questione rimane dunque ancora aperta: troppe difficoltà si oppongono tuttavia ad una sua soluzione definitiva. Anzitutto noi non conosciamo ancora che assai incompletamente la serie dei corpi che si formano nella digestione e non sappiamo ancora separarli e dosarli esattamente. In secondo luogo i preparati di pepsina, e spesso anche i materiali che costituiscono il substrato della digestione, non rappresentano dei composti chimicamente definiti, ma mescolanze di più corpi di cui spesso ignoriamo la natura e le proprietà.

(1) Euler, *Allgemeine Chemie der Enzime*, pag. 129. — " Chem. Zentralblatt ", 1908, I, pag. 1568.
(2) " Chem. Zentralblatt ", 1911, II, pag. 701.

Infine noi non sappiamo al termine delle esperienze quale parte del lavoro compiuto assegnare all'acido cloridrico e quale all'enzima (Carvallo).

Varie sono le cause che possono concorrere a produrre le anomalie che si riscontrano nell'azione della pepsina. È legge generale per gli enzimi che i prodotti della loro azione esercitino una influenza dannosa sull'ulteriore svolgersi della loro attività. Devesi pure tenere conto che durante le azioni enzimatiche può sempre aversi una distruzione più o meno sensibile dell'enzima stesso. Infine — ed è questo forse il caso più comune — si tratta indubbiamente di una distruzione dei Co-enzimi.

Nel caso della pepsina fu il Kühne il primo a dimostrare che i peptoni ritardano la digestione peptica, sia in conseguenza della legge generale su ricordata, sia perchè essi legano a sè l'acido cloridrico, di modo che in un dato momento la pepsina può non più trovare a sua disposizione la quantità di acido necessaria per continuare la sua opera di dissoluzione e di disaggregazione della molecola proteica.

I risultati delle esperienze che io sono venuto riportando sono stati tutti ottenuti operando la digestione *in vitro*. Essi non possono perciò estendersi senz'altro alla digestione nell'organismo vivente; poichè *in vitro* i prodotti d'idrolisi delle proteine permangono e sono causa di ritardo nell'ulteriore svolgersi dell'azione proteolitica, mentre nell'organismo vivente questi prodotti vengono prontamente assorbiti e quindi eliminati dal campo della reazione (1). Parrebbe perciò che, se la formazione dei prodotti idrolitici e la sottrazione dell'acido cloridrico ad opera di essi sono realmente i fattori determinanti l'anomalia dell'azione della pepsina, l'allontanamento di queste due cause perturbatrici dovrebbe portare alla scoperta di una nuova legge dell'attività peptica.

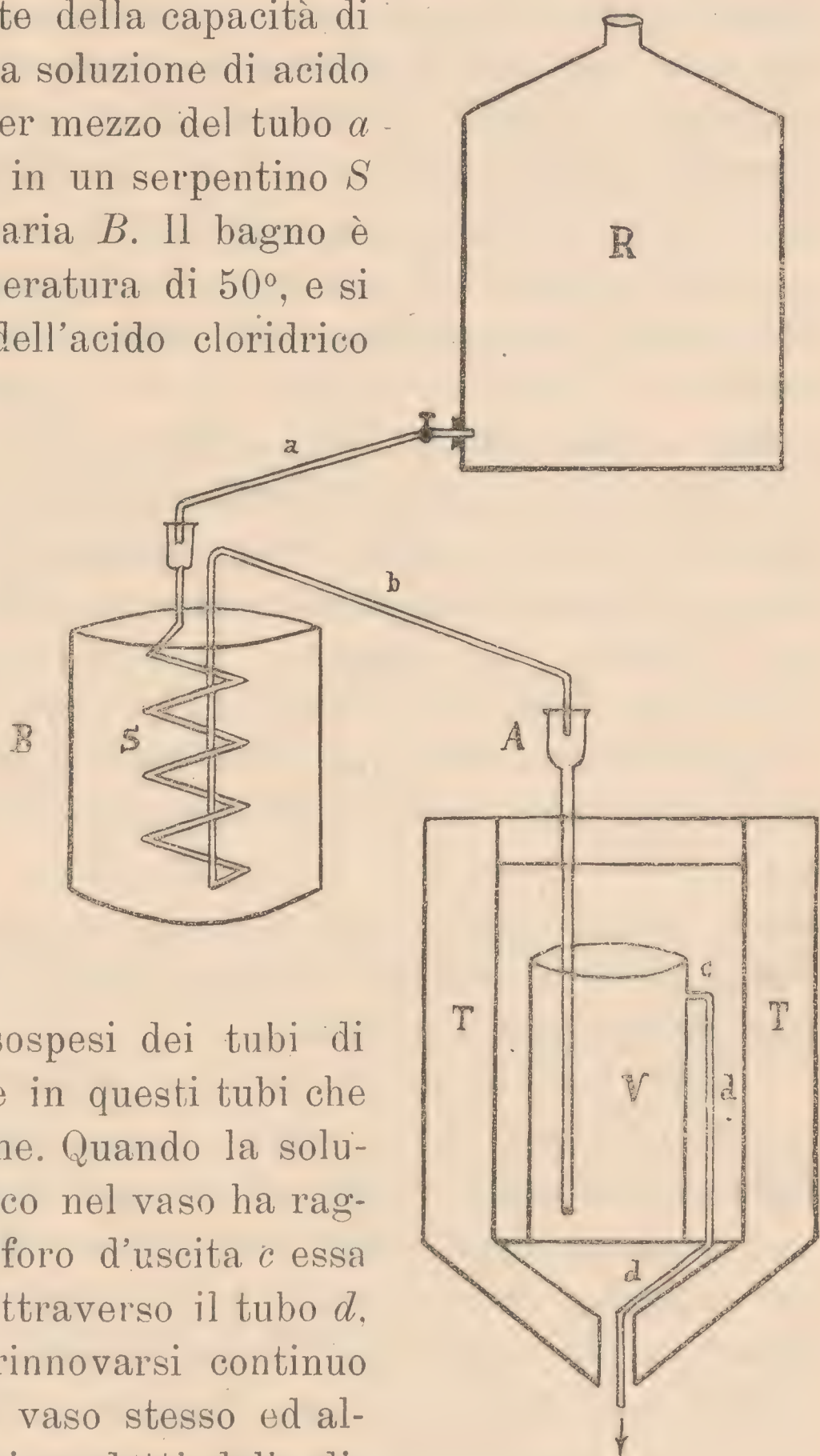
Scopo di queste mie ricerche è stato appunto il verificare se, operando la digestione in condizioni — per quanto è pos-

(1) L'assorbimento dei proteosi e dei peptoni ad opera della mucosa gastrica fu già negato per il passato; ma in questi ultimi anni è stato sicuramente accertato dal Tobler e dallo Zunz.

sibile — prossime a quelle che si hanno nell'organismo vivente, la legge di Schütz sussista o perda il suo valore, ed in quest'ultimo caso quale altra legge le si possa sostituire.

L'apparecchio che mi servì nelle mie ricerche è schematicamente rappresentato nella seguente figura:

R è un recipiente della capacità di 20 litri e contiene una soluzione di acido cloridrico (0,25 %). Per mezzo del tubo *a* l'ac. cloridrico passa in un serpentino *S* immerso nel bagno-maria *B*. Il bagno è mantenuto alla temperatura di 50°, e si regola il passaggio dell'acido cloridrico nel serpentino in modo che al suo defluire nel tubo verticale ad imbuto *A* esso abbia assunta la temperatura di 40°. Il tubo *A* raggiunge la parte inferiore del vaso *V* posto nella camera del termostato *T* regolato a 40°. In questo vaso stanno sospesi dei tubi di carta pergamenata: è in questi tubi che si effettua la digestione. Quando la soluzione dell'ac. cloridrico nel vaso ha raggiunto il livello del foro d'uscita *c* essa defluisce all'esterno attraverso il tubo *d*, permettendo così il rinnovarsi continuo dell'ac. cloridrico nel vaso stesso ed allontanando da questo i prodotti della digestione dializzati.

In queste esperienze io mi sono tenuto al metodo della digestione già seguito da Schütz (1), apportandovi le opportune

(1) " Hoppe Seyler's Zeitschr. „, 30, pag. 1.

modificazioni che verranno descritte in seguito. Coll'adozione di questo metodo, nel quale la reazione scorre in un mezzo omogeneo, si eliminano quelle cause d'errori, talora gravi, che si verificano applicando i metodi di Brücke, di Schiff, di Grützner, di Bidder, di Mett, ecc. Inoltre il dosaggio dell' N permette di ottenere valori ben più sicuri e precisi di quelli che possono ottenersi per via polarimetrica (come nell'antico metodo di Schütz od in quello recente di Glug) o dalle osservazioni colorimetriche (come nel metodo di Grützner) o dalle pesate del residuo dell'albumina non digerita (come nel metodo di Bidder).

L'albumina di N. 2 oppure N. 3 uova, separata cautamente dal tuorlo, viene sbattuta con bastoncino di vetro fino a formazione di schiuma per provocare la separazione della membrana e della calaza. Vi si aggiunge allora — sempre agitando col bastoncino — una soluzione di acido cloridrico (0,25 $^0/_0$) in ragione di 20 cm^3 per ogni 5 cm^3 di albumina; si filtra ed il filtrato viene portato alla temperatura di 40° ed addizionato di una soluzione di pepsina 1 $^0/_0$ in ragione di 1 cm^3 per ogni 24 cm^3 di soluzione d'albumina (1). Dopo breve rimescolamento il liquido viene frazionato nei tubi dializzatori in ragione di 25 cm^3 per ogni tubo. I tubi vengono subito immersi nel vaso *V* già ripieno di soluzione di ac. cloridrico e si comincia allora a lasciar defluire dal serbatoio *R* la soluzione di acido cloridrico. Tutte queste operazioni vengono naturalmente eseguite quanto più rapidamente è possibile.

Una frazione di 25 cm^3 del liquido che si sottopone alla digestione viene invece subito neutralizzata con soda alla fenolftaleina e diluita al volume di 100 cm^3: essa servirà di controllo.

A tempo debito ogni tubo viene tolto dal termostato ed il suo contenuto viene versato in un cilindro tarato: il tubo viene lavato in più riprese con 50 cm^3 di acqua che si addizionano al liquido della digestione: per impedire l'ulteriore azione della pepsina si neutralizza con soda alla fenolftaleina e si porta al

(1) La pepsina era stata preparata secondo il metodo in uso nel nostro Laboratorio (Vedi Giacosa e Dezani, *Studî sulla secrezione stomacale*, “ Atti R. Accademia delle Scienze di Torino „, vol. XLIV) ed aveva un potere digerente, determinato secondo il metodo della farmacopea degli Stati Uniti, di 1 : 4000.

volume di 100 cm³. Su porzioni di 25 cm³ di questo liquido si doserà a seconda dei casi l' N totale col metodo di Kieldahl, oppure l' N proteico non digerito col metodo seguente:

A 25 cm³ del liquido da analizzare si aggiungono 10 cm³ di una soluzione di acetato sodico (50 %) ed 1 cm³ di soluzione di cloruro ferrico (pure al 50 %). Il liquido che si è fatto acido si addiziona allora di poche goccie di una soluzione di idrato sodico quasi fino a neutralizzazione e lo si porta all'ebollizione. Si raccoglie il precipitato su filtro a contenuto in N noto, e lo si lava quattro volte con acqua calda; dopo di che filtro e precipitato vengono sottoposti al dosaggio dell' N secondo Kieldahl. Dalla cifra dell' N così ottenuta si sottrae naturalmente la frazione dovuta al filtro (1).

Nelle prime tre tabelle che seguono io ho studiato il progredire della digestione per rispetto alla prima parte della reazione, vale a dire per rispetto all' N proteico scomparso. Per semplicità di calcolo invece che le cifre dell' N sono dati nelle tabelle i numeri di cm³ di soluzione di acido ossalico $\frac{N}{10}$ necessari per neutralizzare l' N ammoniacale nel distillato proveniente dalla demolizione del precipitato prodotto dal ferri-acetato sodico.

a = cm³ di ac. ossalico necessari per neutralizzare l' N ammoniacale proveniente dal liquido di controllo.

b = cm³ di ac. ossalico necessari per neutralizzare l' N ammoniacale proveniente dalle prove di digestione.

x = alla differenza $a - b$.

$\varkappa_1$ = costante ottenuta dalla relazione $x = \varkappa_1 \sqrt{t}$ dedotta dalla regola di Schütz.

K = costante ottenuta colla formula $K = \frac{1}{t} \log \frac{a}{a - x}$ dedotta dalla legge delle reazioni monomolecolari $\frac{dx}{dt} = K(a - x)$.

t = durata della digestione in minuti.

---

(1) Hofmeister, "Hoppe Seyler's Zeitschr. „, IV, 264.

Esperienza N. 1. — a = cm³ 12.9.

	t	x	$\varkappa_1$	$\frac{b}{(a-x)}$	$K \cdot 10^3$
Prova N. 1	40	2.3	0.36	10.6	0.21
„ „ 2	70	3.1	0.37	9.8	0.17
„ „ 3	100	3.8	0.38	9.1	0.15
„ „ 4	125	4.3	0.38	8.6	0.14
„ „ 5	180	5.3	0.39	7.6	0.12
„ „ 6	300	6.4	0.37	6.5	0.09
„ „ 7	480	7.8	0.35	5.1	0.08

Esperienza N. 2. — a = cm³ 13.2.

	t	x	$\varkappa_1$	$\frac{b}{(a-x)}$	$K \cdot 10^3$
Prova N. 1	30	2.5	0.45	10.7	0.30
„ „ 2	60	3.1	0.40	10.1	0.19
„ „ 3	90	4.4	0.46	8.8	0.19
„ „ 4	120	5.2	0.47	8.0	0.18
„ „ 5	180	5.7	0.42	7.5	0.13
„ „ 6	300	6.3	0.36	6.9	0.09
„ „ 7	480	7.4	0.33	5.8	0.08

Esperienza N. 3. — a = cm³ 13.4.

	t	x	$\varkappa_1$	$\frac{b}{(a-x)}$	$K \cdot 10^3$
Prova N. 1	30	2.0	0.36	11.4	0.23
„ „ 2	60	2.8	0.36	10.6	0.16
„ „ 3	90	3.4	0.35	10.0	0.14
„ „ 4	120	4.5	0.41	8.9	0.14
„ „ 5	180	5.7	0.42	7.7	0.13
„ „ 6	300	6.7	0.38	6.7	0.10
„ „ 7	480	7.2	0.32	6.2	0.06

Da questa serie di esperienze risulta che i valori di K vanno continuamente diminuendo. Nella prima fase della reazione — trasformazione dell' N proteico in N non più precipitabile dal ferri-acetato sodico — pur nelle mie condizioni di esperienza, la legge delle reazioni monomolecolari non è soddisfatta. Verificata può invece ritenersi la legge di Schütz; i valori di $\varkappa_1$ sono infatti del tutto concordanti nell'esperienza N. 1 e variano in limiti abbastanza ristretti nelle esperienze N. 2

e N. 3. Risultati migliori sarebbero difficili ad ottenersi, sia per la complessità della reazione in sè, sia per la impossibilità di avere tubi dializzatori perfettamente simili.

Una deduzione che si può trarre da questi risultati è che forse si è finora attribuita troppa importanza all'azione antipeptica dei prodotti dell' idrolisi proteolitica. Nelle condizioni delle mie esperienze questi prodotti vengono continuamente sottratti dal campo della reazione e la quantità di acido cloridrico che essi possono legare, diventa del tutto trascurabile di fronte alla massa dell'acido cloridrico circolante; e tuttavia il modo di agire della pepsina non è per nulla modificato.

I risultati da me ottenuti concordano con quelli di antiche esperienze di Chittenden ed Amerman (1). Questi autori (sperimentando con albumina d'uovo coagulata, con fibrina, ecc.) non trovarono differenza alcuna, sia operando la digestione *in vitro*, sia in tubi dializzatori immersi in una soluzione di ac. cloridrico, che veniva rinnovata di tempo in tempo. Confessiamo perciò che le ragioni addotte a spiegare l'anomalia dell'azione della pepsina per rispetto alle altre azioni enzimatiche sono insufficienti, e che le ragioni principali ci sfuggono ancora completamente.

Nelle esperienze degli autori citati precedentemente la legge di Schütz fu verificata sia calcolando la quantità di albumina solida disciolta, sia la quantità di N proteico scomparso, sia infine la quantità di albumosi e di peptoni formatisi. A ben diversi risultati si giunge se nelle condizioni delle mie esperienze si dosa l' N residuo nei tubi, e per differenza si risale alla quantità di N scomparso in seguito alla dialisi. Si nota allora che la formazione dei prodotti che dializzano segue non più la regola di Schütz ma la legge delle reazioni del I ordine. La costante di reazione cresce nelle prime ore della digestione; indi raggiunge un valore che si mantiene costante per quasi tutta la durata dell'esperienza, salvo poi a risollevarsi generalmente verso il termine. È cosa che si può già scorgere considerando i valori di K ottenuti dalle esperienze N. 2 e N. 3. Il

(1) " Jahresber. f. Thierchemie ,, 1893, pag. 272.

dosaggio dell' N venne fatto su 25 cm^3 dei liquidi provenienti dalla digestione, neutralizzati e portati al volume di 100 cm^3, come è stato detto precedentemente.

a = cm^3 di acido ossalico $\frac{N}{10}$ necessari per neutralizzare l'N ammoniacale nel distillato della prova di controllo.

b = cm^3 di ac. ossalico necessari per neutralizzare l' N ammoniacale nel distillato delle prove di digestione.

x = differenza $a - b$.

$\varkappa_1$ = costante ottenuta dalla relazione $x = \varkappa_1 \sqrt{t}$ della legge di Schütz.

K = costante ottenuta dalla formula $K = \frac{1}{t} \log \frac{a}{a-x}$.

t = durata dell'esperienza in minuti.

Esperienza N. 2. — a = cm^3 13.7.

	t	x	$\varkappa_1$	b $(a - x)$	$K.10^3$
Prova N. 4	120	0.3	0.027	13.4	0.08
„ „ 5	180	0.6	0.044	13.1	0.10
„ „ 6	300	1.0	0.057	12.7	0.10
„ „ 7	480	1.8	0.082	11.9	0.12

Esperienza N. 3. — a = cm^3 14.3.

	t	x	$\varkappa_1$	b $(a - x)$	$K.10^3$
Prova N. 3	90	0.3	0.031	14.0	0.10
„ „ 4	120	0.5	0.045	13.8	0.12
„ „ 5	180	0.8	0.059	13.5	0.13
„ „ 6	300	— (1)	—	—	—
„ „ 7	480	2.3	0.105	12.0	0.15

Migliori sono però i valori di K se si porta la concentrazione della soluzione di pepsina al 2 %. Se realmente è la legge delle reazioni monomolecolari che domina nella seconda parte della reazione, raddoppiando la quantità dell'enzima dovrà pure

(1) La prova sgraziatamente va perduta.

raddoppiare la costante di reazione. È quanto dimostrano le due esperienze seguenti.

SOLUZIONE DI PEPSINA al 2 %. — a = cm³ 14.5.

	t	x	$\varkappa_1$	$\frac{b}{(a-x)}$	$K \cdot 10^3$
Prova N. 1	120	0.5	0.045	14.0	0.12
„ „ 2	180	0.8	0.059	13.7	0.13
„ „ 3	240	1.5	0.096	13.0	0.19
„ „ 4	300	1.8	0.103	12.7	0.19
„ „ 5	390	2.4	0.121	12.1	0.20
„ „ 6	510	3.2	0.141	11.3	0.21
ID. — a = cm³ 13.6.					
Prova N. 1	90	0.3	0.031	13.3	0.10
„ „ 2	180	1.3	0.096	12.3	0.24
„ „ 3	300	2.2	0.127	11.4	0.25
„ „ 4	420	2.7	0.131	10.9	0.22
„ „ 5	570	3.6	0.150	10.0	0.24
„ „ 6	690	4.8	0.182	8.8	0.27

I risultati di questa seconda parte delle mie esperienze (che io ho controllato con altre prove ancora) portano direttamente ad ammettere nella pepsina l'esistenza di almeno due enzimi o di due gruppi enzimatici. Il primo di questi provocherebbe la solubilizzazione delle proteine solide con formazione di acidalbumine e ne spingerebbe l'idrolisi fino alla formazione di albumosi primari, di corpi cioè non più precipitabili dal ferriacetato sodico ma difficilmente dializzabili. Questo enzima, che secondo la proposta del Duclaux potrebbe chiamarsi *Proteinase*, seguirebbe nella sua azione la legge di Schütz. Il secondo enzima scinderebbe gli albumosi primari in peptoni (o meglio in polipeptidi biuretici o non) facilmente dializzabili, e nella sua azione ubbidirebbe alla legge delle reazioni del I ordine: a questo secondo enzima spetterebbe il nome di *Albumase*.

Esempi analoghi di uno sdoppiamento di fermenti complessi in due o più fermenti semplici non mancano nella storia di questi corpi. La *diastase* non è che il miscuglio di due enzimi: l'*amilase* (che idrolizza l'amilosio) e l'*amilopectinase* (che idrolizza l'amilopectina). Nell'emulsina il Bertrand distingue un'*amigdalase* (che scinde l'amigdalina nel nitrilglucoside ed in glucosio) e un'*amigdalinase* (che idrolizza il nitrilglucoside in acido cianidrico, aldeide benzoica e glucosio). Nella zimase, secondo Buchner, occorre vedere il miscuglio di due enzimi — *zimase* propriamente detta, e *lactacidase*. Nella tripsina stessa noi possiamo trovare questo sdoppiamento in due azioni non solo differenti, ma soggette a leggi diverse, che io ho riscontrato nella pepsina. Anche per la tripsina infatti l'idrolisi delle proteine e degli albumosi segue la legge di Schütz (Borissow); l'idrolisi invece di alcuni polipeptidi in amidoacidi ad opera della tripsina stessa è una reazione del I ordine (Euler). Già il Duclaux del resto aveva emesso l'ipotesi che nella pepsina siano contenuti due fermenti, l'uno *solubilizzante* l'altro *peptonizzante*, i quali agirebbero indipendentemente l'uno dall'altro. I risultati delle mie esperienze verrebbero a portare — forse per la prima volta — dei fatti a sostegno di questa ipotesi.

Laboratorio di Materia medica e Jatrochimica
dell'Università. Torino.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 31 Marzo 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Manno, Direttore della Classe, Renier, Pizzi, Ruffini, Stampini, D'Ercole, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza dei Soci Carle e Brondi.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza precedente, 17 marzo 1912.

Il Presidente partecipa con parole di vivo cordoglio la morte del Socio corrispondente Emilio Teza avvenuta il 30 marzo. I Soci Pizzi, Renier, Stampini e Sforza commemorano il defunto come uomo, come maestro, come scienziato, ricordandone brevemente, ma efficacemente la vita e le opere. Si delibera l'invio d'un telegramma di condoglianza al Socio corrispondente Vittorio Rossi, Rettore dell'Università di Padova, che sarà anche invitato a rappresentare l'Accademia ai funerali.

Si partecipa poi la morte del Socio straniero Raimondo Saleilles avvenuta il 3 marzo 1912 e si legge la lettera che la Presidenza, facendosi interprete dei sentimenti dell'Accademia, inviò alla famiglia dell'estinto. Il Socio Ruffini lo commemora con calde parole, ricordando soprattutto i suoi studi intorno alle persone giuridiche.

È comunicata una lettera del Bibliotecario superiore della Biblioteca Universitaria di Lipsia, R. Helssig, che accompagna un opuscolo intitolato: *Der Erwerb des Codex Utinensis und einer anderen Julianhandschrift durch Gustav Hänel* (Estratto dal " Zentralblatt für Bibliothekswesen „, XXIX, 3. Heft, 1912), contenente una replica alla nota del prof. Federico Patetta: *Come un manoscritto udinese della così detta " Lex Romana Raetica Curiensis „ e un prezioso codice Sessoriano siano emigrati dall'Italia,* edita nel vol. XLVI, p. 497-511 degli Atti della R. Accademia. Si delibera di tornare sull'argomento in una prossima adunanza.

Si presenta il volume del prof. Paolo Monceaux, *Histoire Littéraire de l'Afrique chrétienne depuis les origines jusqu'à l'invasion arabe*, tome quatrième, *Le donatisme*, offerto in omaggio dall'autore, che già fu premiato dall'Accademia col premio Vallauri per la letteratura latina.

Il Socio Ruffini, offre con parole d'encomio due scritti del prof. Federico Patetta, *Nuove ipotesi sulla patria della così detta Lombarda* (Sonderabdruck aus der Festschrift für Heinrich Brunner, Weimar, Böhlau) e *Gli " ex libris „ di Giacomo Francesco Arpino medico piemontese del secolo XVII* (Torino, O.P.E.S., 1912).

Per la inserzione negli *Atti* il Socio Renier presenta una nota del Dr. Luigi Cesare Bollea, intitolata: *Di una miscellanea quattrocentista di rime e prose* e il Socio De Sanctis, anche a nome del Socio Stampini, un saggio di Bacchisio Motzo su *Le Ὑποθετικά di Filone.*

Per le *Memorie* il Socio Einaudi offre una monografia del Dr. Giuseppe Prato, intitolata: *Il problema del combustibile nel periodo pre-rivoluzionario come fattore della distribuzione topografica delle industrie.* Il Presidente delega i Soci Ruffini ed Einaudi a riferirne in una prossima adunanza.

LETTURE

Di una miscellanea quattrocentista di rime e di prose.

Nota del Dr. LUIGI CESARE BOLLEA.

Il nuovo codice fu da me scoperto in uno stipo dimenticato del castello di Envie (Cuneo), proprietà della Contessa Clementina Malabaila di Canale Romagnano-Provana, con altri di carattere storico e letterario.

Questi ultimi (uno della *Divina Commedia* di Dante Alighieri ed uno di lettere umanistiche) ed altri di natura giuridica sono, come la Miscellanea, di provenienza fiorentina. È probabile che li abbia acquistati in uno dei suoi viaggi di cultura il nonno dell'attuale proprietaria, il Marchese Carlo Guasco di Castelletto, ultimo erede di sua famiglia, appassionato bibliofilo che donava quattro preziosi *gobelins* d'immenso valore per una copia della *Biblioteca dei Classici Italiani*, come ricorda la Contessa Malabaila d'aver più volte sentito raccontare dalla mamma sua Leopoldina Guasco (1).

Il nuovo codice cartaceo, della metà del secolo XV, misura mm. 215 $\times$ 285; consta di due codici, distinti per filigrana, per scrittura e per contenuto, uniti insieme nel sec. XVIII con una rilegatura in mezza pelle, che sul tarlato dorso reca in oro il titolo: *Evangelii . Orat. Serm. Mss.* Il primo di essi, che noi indicheremo con la lettera A, contiene gli *Evangelii* e le *Orat*[*ioni*]; il secondo, designabile con la lettera B, comprende i *Ser*[*moni*].

(1) Circa i rapporti di parentela fra gli Amoretti antichi padroni del Castello di Envie, i Guasco di Castelletto, i Romagnano di Virle, i Provana del Sabbione e i Malabaila di Canale, vedi un prossimo mio studio *Silvio Pellico e il Castello di Envie*.

Consta il ms. complessivamente di 159 carte, delle quali le prime 5 non numerate sono bianche; seguono quindi 120 carte del codice A numerate e scritte a due colonne le prime 117, ma di esse alcune sono prive di numerazione tagliata nel rilegare il codice e manca la carta 1; sono bianche le carte 118, 119 e 120. Vengono infine 35 carte scritte su una colonna, non numerate, del codice B.

La scrittura è di tre maniere diverse; inclino però a credere che le prime due, da carta 2^a alla 37^b e da c. 37^b alla 117^b, siano della stessa mano. Del tutto differente è la scrittura delle 35 carte non numerate dei *Serm*[*oni*]. Le carte sono in ottimo stato di conservazione.

Nel margine superiore della carta 36^b del codice A una mano del 500 scrisse: " Sig^{re} francesco landi Cosimo landi Piero figliuolo suo "; nell'ultima carta (35^b) del codice B sta scritto con scrittura quattrocentistica: " Librj dandrea beloci Fjrenze ".

Gli *Evangelii* e *Orat*[*ioni*] hanno le didascalie in rosso, un segno rosso o turchino di paragrafo fra rima e rima e in bianco lo spazio destinato alla lettera iniziale da miniarsi in rosso e arabeschi. I *Serm*[*oni*] recano pure questo spazio bianco per le iniziali di ognuno di essi.

Nella sua prima parte (A) il codice d'Envie è in stretta parentela con il Riccardiano 1294, che al Morpurgo (1) parve essere frammentario e da collegarsi con il Riccardiano 2760, onde egli riunì assieme in un solo volume le 113 carte, che formavano il codice 1294 e le 80 del 2760, ripristinando così il codice originario.

Si direbbe che il codice Envie A sia una derivazione del Riccardiano 1294 fatta dopo che questo fu separato dal Riccardiano 2760, poichè esso contiene precisamente tutto il primo, e del secondo la sola leggenda del Purgatorio di S. Patrizio. Questa è collocata nel codice Envie A a carte 106^b-110^b, prima delle leggende di Sant'Agata (cc. 111^b-112^a), di Santa Caterina (cc. 112^b-115^a) e di San Basilio (cc. 115^b-117^a) con cui terminano sia il codice Envie A, sia il Riccardiano 1294; mentre essa si

(1) S. Morpurgo, *I manoscritti della R. Biblioteca Riccardiana di Firenze*, vol. I, pag. 356-363, Roma, 1893; nella raccolta *Indici e cataloghi*.

trova nel Riccardiano 2760 a carte 184[b]-188[a], cioè dopo ben nove componimenti (cc. 114[a]-184[a]), per cui è a presumersi che l'amanuense abbia inserto nel codice Envie A la leggenda del Purgatorio di San Patrizio traendola d'altra fonte.

Il contenuto dei due codici Envie A e Riccardiano 1294 è uguale, se si eccettua il secondo componimento, *La Confessione generale secondo la Chiesa e significato della messa*, che manca nel codice Envie A. L'ordine è per contro alquanto variato, posponendo il Riccardiano 1294 *I vangeli di fuori di Quaresima* di Antonio Pucci, il *Passio* e l'*Avemaria* di Messer Dolcibene, il *Pianto* di Enselmino da Montebelluna e il *Lamento di Nostra Donna composto per Santo Bernardo,* al *Pater nostro disposto per sette domandamenti*, alla *Divotissima oratione de la Croce* e alla *Divotissima oratione del Nostro Signore Iddio*, fra le quali due ultime pone *Il vangielio della generaçione* o *Incominciamento del Santo Evangelio secondo Matteo*, che nel codice Envie A è subito dopo *I vangelij de la quaresima*.

Piccole differenze esistono pure in alcuni caratteri esteriori; così il Morpurgo ci assicura che i varii componimenti in versi ed in prosa del Riccardiano 1294 portano, di mano del copista, un numero progressivo e il titolo dei capitoli; questi non esistono nel codice Envie A, nel quale fra *I vangelij de la quaresima* vi è un segno rosso o turchino di paragrafo e un *Seghuita* ripetuto al termine di ogni sonetto e negli altri componimenti nulla. Inoltre sono pure diversi i titoli di sonetti, canzoni, ternario e laudi di questo primo poemetto, più ricchi di didascalie nel codice Envie A. Così il Riccardiano 1294 scrive: *A dì tre, A dì quatro, A dì* v, *A dì* vj, *A dì* vij... sino *A dì* xl, e l'Envie A: *Venerdì A dì* iij *della quaresima Santo Matteo*, *Sabato A dì* iiij° *della quaresima Santo Marcho, Domenicha A dì* v *della quaresima Santo Matteo, Lunedì A dì* vj *della quaresima Santo Matteo.....*, *Venerdì A dì* x *della quaresima Santo Giovannj*, *Sabato A dì* xj *della quaresima Santo Matteo*, *Sopra il detto vangielio per lo sicondo dì cioè a dì* xij *della quaresima del vangielio dinançi*, *Sopra detto vangielio a dì* xij *della quaresima, Lunedì A dì* xiij *della quaresima, A dì* xiiij *della quaresima...*, *Santo Lucha A dì* xvj *della quaresima*, *A dì* xvij *della quaresima.....*, *A dì* xxv *della quaresima Santo Giovannj, Sopra el detto vangielio secondo m. Gabriello...*, *A dì* xxxviij *di quaresima Santo Giovannj*, *Seghuitando il detto vangielio di San*

Giovannj, A dì XXXVIIJ *della quaresima, A dì* XL *della quaresima sopra el detto vangielio.*

Non so se realmente il Riccardiano 1294 non contenga questi titoli completi e quindi il Morpurgo li abbia dati in riassunto — lo che non mi pare avendo egli segnato per disteso *El proemio de la quaresima, Mercholdì primo de la quaresima* — e, data la perfetta identità del codice Envie A e del Riccardiano 1294, non credo che franchi la spesa di far venire a Torino il codice Riccardiano, o di recarmi a Firenze per verificare.

Alcune caratteristiche confermano sempre più la stretta parentela dei due codici. Così nei *Vangelij de la quaresima* fra i sonetti del *A dì* XXVIJ e del *A dì* XXVIIJ vi è il sonetto: “ Dice el Vangelio, se ben mi ricorda „, preceduto in tutti e due i codici dalla didascalia: *Il dì che ssi chantava questo vangelio in Santa Croce, Antonio Pucci vidi a un frate cinto con cordilglo biancho come latte, ond'elli gli scrisse così* (cod. Riccard., c. 10[a]; cod. Envie A, c. 9[a]). Nel *Pianto* di Enselmino da Montebelluna il capitolo I comincia sia nel Riccard. (c. 62[a]), sia nell' Envie (c. 56[b]): “ Ave vergine, virgo gloriosa „, mentre in altri codici è detto: “ Ave regina, virgo gloriosa „; anzi nell'Envie il *vergine* è scritto nell'interlineo. Più significativo di tutti è l'errore di attribuzione della prima delle *Rime varie sacre* (cod. Ricc. 1294, c. 82[a]; cod. Envie A, c. 79[b]), cioè della canzone: *Vergine bella, che di sole vestita,* nell' uno e nell' altro codice preceduta dalla didascalia: *Lauda divota di Nostra Donna fatta per messer Giovanni Boccaccio* (sic).

A più chiara intelligenza delle relazioni che intercedono fra i due codici *Rime e Prose sacre e morali* (Riccardiano 1294 e 2760) e *Evangelii e Orat*[*ioni*] (Envie A), credo conveniente elencare i componimenti loro (1), segnandone il numero d' ordine progressivo e il numero corrispondente delle carte dei due codici.

---

(1) Porgo vivi ringraziamenti all'amico Dott. Santorre Debenedetti dell'Università di Strassburg, che con il suo prezioso schedario delle rime delle origini mi instradò subito al ravvicinamento del codice Envie A con il Riccardiano 1294.

Riccardiano 1294 e 2760.	Codice Envie A.
I. *I Vangelij de la quaresima in volgare e in rima* di ANTONIO PUCCI (cc. 1^a–12^b) (1).	I. [*I Vangieli de la quaresima in volgare e in rima* (2)] di ANTONIO PUCCI (cc. 2^a–11^b).
II. *Confessione generale secondo la Chiesa e significato della messa* (13^a-14^a).	(manca).
III. *Il Paternostro disposto per sette domandamenti* (14^a–15^a).	(vedi n. VII).
IV. *Divotissima oratione de la croce santa* (15^{ab}).	(vedi n. VIII).
V. *Incominciamento del Santo Evangelio secondo Matteo* (16^a).	II. *Il vangielio della gieneracione di Xpisto in volghare* cioè *Incominciamento del Santo Evangelio secondo Matteo* (11^b).
VI. *Una divotissima oratione del nostro Signore Idio* (16^{ab}).	(vedi n. IX).
VII. *I vangeli di fuori di Quaresima in rima e in volgare* di ANTONIO PUCCI (17^a–57^b).	III. *I vangieli fuor di quaresima in rima et in volghare* di ANTONIO PUCCI (12^a-52^a).
VIII. MESSER DOLCIBENE, *Il Passio e l'Avemaria* (57^b–61^b).	IV. [MESSER DOLCIBENE], Il *Passio* e l'*Avemaria* (52^a-56^a).

(1) Un errore di stampa nel Morpurgo, pag. 356, segna contenuti *I Vangelij de la quaresima* da c. 1^a a c. 113^a, che va corretto in 13^a, infatti a pag. 359 si dice che la *Confessione generale* comincia a c. 13^a.

(2) Manca nel Codice Envie A la carta 1, che doveva portare in alto la didascalia surriferita e le seguenti rime:

1. Quantunque i' mi cognoscha d'ignorancia. *Ternario.*
2. Venuto el tempo de la quarantina. *El proemio de la quarantina.*
3. Quando voi digiunate sí ssi taccia *Mercholdì primo de la quaresima.*
4. O spigholistri pien di ypocresia.
5. Se tu vuo' far buon digiun, pechatore.
6. O tu ch'amassi al mondo argento et oro.
7. In quel tempo essendo ito Gesù. *Il dì sechundo.*

La carta 2^a del Codice Envie comincia con il verso:

thome tu ai creduto sia servato

che è appunto il penultimo verso del sonetto:

In quel tempo essendo ito Gesù.

I successivi sonetti e stanze di canzone della parafrasi si succedono in tutti e due i Codici (Envie A e Riccardiano 1294) nello stesso ordine dal sonetto 8:

Fa che sia brieve tua horacione

sino alla laude 88:

Faccian festa del Singniore,

IX. *Uno lamento di Nostra Donna in rima facto per Messer Franciescho Petracchi ed è . x . capitoli,* cioè il *Pianto* di Enselmino da Montebelluna (62^a–70^a).

X. *Il lamento di Nostra Donna composto per Santo Bernardo* (70^a–74^b).

(vedi n. III).

(vedi n. IV).

(vedi n. VI).

XI. *L'ufficio della Nostra Donna Vergine Maria in volgare* (75^a–81^b).

XII. Rime varie sacre (*Lauda divota di Nostra Donna fatta per messer Giovanni Boccaccio* [F. Petrarca]; Sonetto *di virtù*; *La 'ntemerata*, con due orazioni in prosa; due Ballate di Jacopone da Todi; Corona di 11 sonetti *de' dieci comandamenti della Chiesa*; Sonetti *sopra i confessori, de' sette peccati mortali, del bugiardo*; Stanze di *Come non si debbia dubbitare de la fede di Christo*; Sonetto di *come Christo discese nel Linbo*; Sonetto rinterzato di *come si deve amare il prossimo*; Sonetti *d'amaestramento, 2 sopra la decta materia, de la passione di Cristo,*

V. Adesp. anepigr. il *Pianto* di Enselmino da Montebelluna (1) (56^b–64^a).

VI. *Il lamento di nostra donna composto per santo bernardo* (64^a–69^b).

VII. *Il Paternostro disposto per sette domandamenti* (70^a–70^b).

VIII. *Divotissima oratione de la crocie santa* (71^a–71^b).

IX. *Una divotissima oratione del nostro Singniore iddio* (71^b–72^a).

X. *L'uficio della nostra Donna Vergine Maria in volgare* (72^b–79^b).

XI. Rime varie sacre (*Lauda divota di Nostra donna fatta per messer Giovanni Bochacij* [F. Petrarca]; *Sonetto di virtù*; Una ballata di Jacopone da Todi; *L'antemerata*, con due orazioni in prosa; Una ballata di Jacopone da Todi (2); Corona di 11 sonetti *di X chomandamenti della chiesa*; Sonetti *sopra i chonfessorj, di* vij *pechatj mortalj, del bugiardo*; Stanze di *come non si debba dubitare della fede*; Sonetto di *come Xpisto disciese nel linbo*; sonetto rinterzato di *come si deve amare il prossimo*; Sonetti *d'amaestramento*; 2 *sopra la detta materia, della passion di*

---

(1) Nel Riccardiano 1294 mancano le carte 64 e 65, per cui andarono perduti una metà del capitolo IV, dal v. 45: " vedete quant'elli è vituperoso ", tutto il capitolo V: " Ancora non er io giunta al loco tristo ", e le prime 36 terzine del capitolo VI, ossia fino al verso: " Tu exaudisti ancor, dice 'l Salmista ". Il Codice Envie A contiene invece per intiero i dieci ternarî; quindi, se è una derivazione dal Riccardiano 1294, essa fu fatta prima della perdita delle due carte 64 e 65.

(2) Le " Rime varie Sacre " si succedono nel Codice Envie A nello stesso ordine che nel Codice Riccardiano 1294, ad eccezione di *La 'ntemerata* e delle due orazioni in prosa che la seguono, poste nell'Envie A fra le due ballate di Jacopone da Todi.

d'amaestramento, de la vendetta di Christo, e altro; Ternarii del *Credo*, del *Credo di Dante*, del *Gloria in excelsis*, del *Magnificat*; Sonetto del *Paternostro*; *L'Ave Maria*; 2 laude di *S. Michele*; 2 laude di A. Pucci *della povertà, della Passion di Christo*; Lauda di Jacopone da Todi *su Christo*) (82^a–91^b).

XIII. *Cantico di Moyses che ssi dice il giovidi nocte*; *Cantico di Moyses che ssi dice il Sabato notte*; *Cantico d'Anna madre di Samuel* (91^b–93^a).

XIV. *Lauda divotissima di Nostra Donna in volgare.* Ballata di Garzo (93^a).

XV. *Exenplo che occorse a uno peccatore* (93^{ab}).

XVI. *Uno bello miracolo d'uno giovane iscolare* (93^b).

XVII. *Autorità, o vero amaestramenti di Salomone ridocti in volgare* (94^a–96^a).

XVIII. *Uno contrasto che 'l Dimonio fece con Gesù benedecto* (96^a–97^a).

XIX. *Le dieci comandamenta che Idio diede a Moyses* (97^a).

I dodici articoli de la fede (97^b).

Quactro consigli che 'l nostro Signore diede a coloro che voglono essere perfecti (97^b).

Oratione divotissima del corpo di Christo (97^b).

XX. *Molte belle cose della Nostra Donna vergine Maria, in gramatica.* Ve ne sono 5 in rima (98^a–100^b).

XXI. *Certe cose notabili che ssi aspectano a la Passione del nostro Signore Gesù* (Un inno; varie orazioni; la *Missa beatissime Crucis*; l'*Ymnus Spirictus Sancti*; *Oratio facta per dominum Bonifatium papam*; sei versetti del salterio;

Xpisto, d'amaestramento, della vendetta di Xpisto, e altro; Ternarii del Credo, del *Credo* di Dante [di A. Beccari da Ferrara (?)], del *Gloria in excelsis*, del *Magnificat*, del *Paternostro*, dell'*Ave Maria*; 2 laude di San Michele; 2 laude di A. Pucci *della povertà, della Passion di Xpisto*; Lauda di Jacopone da Todi su *Xpisto*) (79^b–88^b).

XII. *Cantico di Moyses che ssi dice il giovidi nocte*; *Cantico di Moyses che ssi dice il Sabato notte*; *Cantico d'Anna madre di Samuel* (88^b–90^a).

XIII. *Lauda divotissima di Nostra Donna in volgare.* Ballata di Garzo (90^a).

XIV. *Exenplo che occorse a uno peccatore* (90^{ab}).

XV. *Un bel miracolo d'un giovane iscolaro* (90^b).

XVI. *Autorità o vero amaestramenti di Salomone ridocti in volgare* (91^a-92^b).

XVII. *Un contrasto che 'l dimonio fecie con giesu benedetto* (93^a–94^a).

XVIII. *I X chomandamentj che iddio diede a Moyses.*

I xij *articolj della fede* (94^b).

Quattro chonsiglj che 'l nostro singnore diede a choloro che vogliono esser perfetti (95^a).

Orazione divotissima del corpo di Xpisto (95^a).

XIX. *Molte belle cose della nostra donna vergine Maria in gramatica.* Ve ne sono 5 in rima (95^a–98^a).

XX. *Cierte cose notabili che ssi aspettano alla passione del nostro singnore giesu* (Un inno; varie orazioni; la *Missa beatissime Crucis*; l'*Epistula beati pauli apostoli ad Filipenses*; *Sequentia Sancti evangielj secundum Johannem*;

il *Dies irae*; *La misura del glorioso corpo del nostro Signore*; il *Pater noster*; l'*Avemaria*; la *Salve regina*; l'*Initium Sancti Evangelii secundum Johannem*; l' *Epistula ad Abagarum*; e altre orazioni) (101^a–106^b).	l'*Ymnus Spiritus sancti*; *Oratio facta per dominum Bonifatium papam*; sei versetti del salterio; il *Dies yrae*; *La misura del glorioso corpo del nostro Singniore*; il *Pater noster*; l'*Ave Maria*; la *Salve regina*; l'*Initium Sancti evangelij secundum Johannem*; l'*Epistula ad Abagarum*; e altre orazioni) (98^a-105^a).
XXII. *Le pene de lo 'nferno dimostrate per Santo Michele Arcangelo a Santo Pavolo* (107^a-108^a). (vedi n. XXXIV).	XXI. *Le pene dello 'nferno dimostrate per Santo Michele arcangielo a santo paulo* (105^a–106^b).
	XXII. *Il Purgatorio di Santo patrizio* (106^b–110^b).
XXIII. *La leggenda di Santa Aghata vergine* (108^b–109^b).	XXIII. *La leggienda di santa Agatas vergine* (111^a-112^a).
XXIV. *La leggenda di madona Santa Caterina vergine* (110^a–112^a).	XXIV. *La leggienda di madonna santa Chaterina* (112^b-115^a).
XXV. *La vita e la morte di Santo Basilio* (112^b–113^b) (1).	XXV. *La vita e la morte di santo basilio* (115^b-117^a) (2).
XXVI. *Fior di virtù conposto per Santo Tommaso d'Aquino* (114^a–144^a).	(manca).
XXVII. *La leggenda di Santo Arsenio* (144^b–145^a).	(manca).
XXVIII. *Di Santo Agaton abate* (145^a).	(manca).
XXIX. Tre esempi: *D'alcun santo padre*; *D'uno monaco senplice e divoto*; *D'uno usurajo* (145^b–146^b).	(manca).
XXX. Leggenda di San Giovanni Battista, mutila per difetto della carta 146; a cui seguono le Meditazioni sulla discesa al Limbo e *Una visione bellissima e divota del decto messer Santo Giovanni per uno suo divoto* (147^a-175^a).	(manca).
XXXI. *Leggenda di Santa Marina vergine* (175^{ab}).	(manca).
XXXII. *Miracolo di santo frate Ramondo* (175^b).	(manca).

(1) Qui finisce il Codice Riccardiano 1294 e comincia il 2760.

(2) Seguono nel Codice Envie A le carte 118-120 bianche.

XXXIII. Leggenda di S. Margherita, acefala per difetto delle carte 177-180 (181^a–184^b).	(manca).
XXXIV. *Il Purgatorio di Santo Patritio* (184^b–188^a).	(vedi n. XXII).
XXXV. *La vita di Giovanni Limosiniero* (188^a–189^b).	(manca).
XXXVI. *La storia di Barlaam* (190^a–193^b).	(manca).

Il Codice Envie — come dicemmo — risulta dall'unione dei due codici: *Evangelii Orat*[*ioni*] (A) e *Ser*[*moni*] (B). Questo secondo comprende i *Sermoni di Santo Agustino*, che cominciano: " Fratelli miei carissimj et letitia del chuor mio... „ (c. 1^a non numerata) e finiscono: " ...Il nostro Salvatore Il quale vive e regna in secula seculorum. deo gratias. Amen. Amen „ (c. 35^b non numerata). Essi sono così disposti:

Numero progr.	Capitolo dei Sermoni di Santo Agustino nel Cod. Envie B	Carte del Codice B
I.	Proemio	1^a–2^b
II.	Sermone di pace	2^b–5^a
III.	Sermone di silentio	5^a–6^a
IV.	Sermone di prudença	6^b–9^a
V.	Sermone dj misericordia	9^a–11^a
VI.	Sermone d'ubidientia	11^a–12^a
VII.	Sermone di perseverança	12^a–13^a
VIII.	Sermone dell'ira e dell'hodio	13^a–14^a
IX.	Sermone della purità della coscienҫa	14^a–15^a
X.	Sermone dj penitentia	15^a–16^b
XI.	Sermone della humiltà	16^b–17^b
XII.	Sermone dj fortitudine	18^a–19^a
XIII.	Sermone di justitia	19^a–21^a
XIV.	Sermone contro ai parlanti	21^a–23^b
XV.	Sermone di Judicio	23^b–24^b
XVI.	Sermone della otiosità	24^b–26^b
XVII.	Sermone dell' Invidia	26^b–28^b
XVIII.	Sermone della misericordia di Dio a poverj . . .	28^b–30^b
XIX.	Sermone della formatione dell'uomo	30^b–32^a
XX.	Sermone dell'allegreça	32^a–33^a
XXI.	Sermone di digiuno e d'elimosina	33^a–35^a

Le Ὑποθετικά di Filone.

Nota di BACCHISIO MOTZO.

Nel catalogo delle opere di Filone, Eusebio non ne ricorda alcuna col titolo di Ὑποθετικά, ma in *Praep. evang.* VIII, 5, 11, volendo dare un'idea esatta della legislazione mosaica, introduce dei lunghi frammenti con queste parole: *Φέρε δὴ καὶ τὸ πολίτευμα τῆς κατὰ Μωσέα νομοθεσίας ἐκ τῶν παρὰ τοῖς ἀνδράσι διαφανῶν θεασώμεθα· πρῶτα δὲ θήσω Φίλωνος τὰ περὶ τῆς ἀπ' Αἰγύπτου πορείας τῶν Ἰουδαίων ἣν πεποίηνται Μωσέως ἡγουμένου, ἀπὸ τοῦ πρώτου συγγράμματος ὧν ἐπέγραψεν Ὑποθετικῶν, ἔνθα τὸν ὑπὲρ Ἰουδαίων ὡς πρὸς κατηγόρους αὐτῶν ποιούμενος λόγον ταῦτά φησιν.*

Riporta quindi quattro passi: il I (VIII, 6, 1) in citazione indiretta e compendiata tratta dell'origine del popolo ebreo, dell'andata in Egitto, del moltiplicarvisi e della determinazione di uscirne; il II (VIII, 6, 2-9) di Mosè condottiero degli Ebrei e dello stabilirsi di questi in Palestina; il III (VIII, 7, 1-9) è parte di un compendio dei precetti morali della legge mosaica; il IV (VIII, 7, 10-20) si occupa del sabato e dell'anno sabatico (1). Non

(1) I frammenti delle Ὑπ. in EUSEB., *Praep. evang.*, VIII, 6, 1 seg. ed. Dindorf, Lipsiae, 1867. Sulle Ὑπ. cf. BERNAYS, *Philons Hypothetica und die Verwünschungen des Buzyges in Athen*, in " Monatsberichte der Berliner Akademie ", 1876, p. 589-609 ristampato in BERNAYS, " Gesammelte Abhandlungen ", I, 262-282. — MASSEBIEAU, *Le classement des œuvres de Philon*, p. 54-9 in " Bibliothèque de l'Éc. des H. Études, Sciences religieuses ", I, Parigi, 1889. — ELTER, *De Gnomologiorum graecorum historia*, IX (Bonn, Programma 1895), col. 236-8. — WENDLAND, *Die Therapeuten*, in " Jahrb. für class. Philologie ", 22 Supplbd. 1896, p. 714 seg. — COHN, *Einteilung und Chronologie der Schriften Philos*, in " Philologus ", 7 Supplbd., 1899, p. 418-9. — SCHÜRER, *Geschichte des jüdischen Volkes im Zeitalter Jesu Christi*, III, 685-6, 4ª ed., Lipsia, 1909. — CHRIST, *Gesch. der griech. Litt.*, II, p. 498-9, 5ª ed., Monaco, 1911: questa parte è curata dallo Stählin.

ostante la lunghezza dei frammenti, può dirsi che tutto di quest'opera rimanga oscuro: lo scopo, l'argomento, la forma, il numero dei libri, il tempo della composizione e persino il significato del titolo: anzi è principalmente la difficoltà di determinare quest'ultimo che impedisce di formarci un concetto dell'opera.

Ora esiste tra questi frammenti e il *contra Apionem* di Giuseppe Flavio (1) una certa analogia, che merita di esser rilevata, perchè ci permetterà di fare un po' più di luce sull'opera di Filone. Già Eusebio aveva notato che l'esposizione della legge mosaica contenuta nelle *Ὑποθετικά* era simile a quella del *c. Apionem*: dice infatti dopo aver riportato i frammenti ricordati: *τοσαῦτα μὲν ὁ Φίλων· ὅμοια δ' αὐτῷ καὶ Ἰώσηπος ἱστορεῖ ἐν δευτέρῳ συγγράμματι ὧν πεποίηται Περὶ τῆς τῶν Ἰουδαίων ἀρχαιότητος*, e cita quindi il tratto *c. Apionem*, II, 163-228. Questa somiglianza non è però casuale, come potrebbe credersi: un più attento esame rivela che Giuseppe, nello scrivere il *c. Apionem*, o l'ultima parte almeno di esso dal § 145 del II libro alla fine, ebbe davanti come modello le *Ὑποθετικά* e ne ha seguito la traccia, pur senza rendersene schiavo.

I primi due frammenti delle *Ὑποθετικά* sull'antica origine del popolo dalla Siria, l'andata in Egitto, i motivi dell'uscirne sotto la condotta di Mosè, e il modo dello stabilirsi nella Palestina, formano l'argomento che Giuseppe discute nel I libro e nella prima parte del II, che sono rivolti specialmente contro

(1) FL. JOSEPH., *Opera omnia*, ed. Naber, VI, Lipsiae, 1896. Il titolo *κατὰ Ἀπίωνος* corrisponde solo in parte al contenuto dell'opera, che Giuseppe dovette intitolare *περὶ τῆς Ἰουδαίων ἀρχαιότητος*, come si rileva dall'introduzione del I libro dove dice di voler trattare *περὶ τῆς ἡμετέρας ἀρχαιότητος* (§ 3) dal principio del II dove afferma di avere trattato nel I *περὶ τῆς ἀρχαιότητος ἡμῶν* (§ 1) e alla fine (§ 296) che chi vuol conoscere *περὶ τοῦ γένους ἡμῶν* può farlo leggendo i due libri. Questo è il titolo che dànno Origene (*c. Celsum*, I, 16; IV, 11) ed Eusebio (*hist. eccl.*, III, 9; *praep. evang.*, VIII, 7, 21; X, 6, 15). Porfirio (*de abstinentia*, IV, 11) ricorda l'opera col titolo *πρὸς τοὺς Ἕλληνας*, ma Giuseppe non amava prendersela manifestamente con l'Ellenismo; inoltre in quel passo Porfirio cita a memoria, poichè afferma che vi si parla degli Esseni, il che non è. Dal § 145 del II libro incomincia l'esposizione positiva della legge mosaica: questa parte forma come un tutto a sè, e in qualche codice della versione latina è considerata come un III libro.

Manetone, Cheremone, Lisimaco, Apione. Della polemica di Filone contro le calunnie lanciate verso i Giudei, non abbiamo che la parte riguardante l'accusa a Mosè di esser stato un impostore, e l'altra relativa al modo con cui gli Ebrei si stabilirono in Palestina: ma non v'è dubbio, che anche le leggende relative all' origine prima del popolo da una folla di lebbrosi, d'impuri e di reietti scacciati d'Egitto, al costituirsi di quelle turbe in nazione, fossero da Filone confutate con uguale energia, in quella parte che Eusebio ha omesso, o il cui contenuto ci ha dato in compendio, sotto forma indiretta, nel I frammento: tanto più che queste ultime erano le accuse più gravi ed atroci per i Giudei di quel tempo, che tenevano tanto alla loro purezza da separarsi, con una barriera infrangibile di usanze e di prescrizioni rituali, dagli altri popoli considerati come impuri.

Di somiglianze in questa parte, tra le due opere, non possiamo indicarne altre che quella della materia e un po' anche del metodo. Entrambi gli scrittori prescindono dall'autorità del racconto biblico e su di esso non si appoggiano, ma partendo dalle testimonianze e dalle affermazioni degli avversari, e da ciò che questi implicitamente ammettono, cercano di giungere allo stesso risultato: la confutazione delle accuse e la conferma della onorabilità e grandezza del popolo ebraico e del suo legislatore Mosè. Dice Giuseppe in principio del *c. Apionem* che, non prestandosi fede al racconto da lui fatto nelle *Antiquitates* seguendo i libri sacri, egli vuole scrivere sullo stesso argomento in breve, servendosi delle testimonianze degli scrittori greci e mostrando gli avversari confutati dalle proprie affermazioni (1). Ma egli è uno storico, e seguendo il suo carattere procede per via di testimonianze, di citazioni, mostrando gli avversari inconseguenti e contradicentisi nei dati di fatto. Filone faceva forse analoga dichiarazione in principio della sua opera; certo è che verso la metà del II frammento, dopo aver detto che il luogo dove si stabilirono gli Ebrei e il modo con cui se ne impadronirono son raccontati nelle Sacre Scritture, egli protesta di non voler esporre ciò che gli sembra vero intorno a quegli avvenimenti

---

(1) *c. Apion.*, I, 4: *τοὺς δὲ βλασφήμως περὶ ἡμῶν καὶ ψευδῶς γεγραφότας αὐτοὺς δι᾽ ἑαυτῶν ἐλεγχομένους παρέξω.*

seguendo la storia (sacra), ma per via di ragionamento (1). E propone all'avversario il dilemma: o che gli Ebrei conquistassero il paese per forza d'armi, il che mostrerebbe che non erano nè vili nè imbelli; o che gli abitanti della regione, pur dovendoli considerare come nemici, si sentissero presi di tanta ammirazione e rispetto per essi, che si sian sottomessi spontaneamente, ed anche questo tornerebbe ad onore e gloria degli Ebrei. S'intende che Filone preferisse questa via a quella seguita da Giuseppe, come più semplice e facile (le minute ricerche storiche sono un po' fastidiose): ed anche per la personale maggior inclinazione al ragionamento e alla prova razionale che non al fatto concreto positivo.

Ma con quella parte del *c. Apionem* che incomincia dal § 145 del II libro le somiglianze sono molto più evidenti. Giuseppe prende occasione ad aggiungerla da ciò che Apollonio, Lisimaco ed alcuni altri, parte per ignoranza, parte per malvagità, avevan parlato del legislatore Mosè e delle leggi contro giustizia e verità, quello calunniando come mago ed impostore (*ὡς γόητα καὶ ἀπατεῶνα*), le leggi poi come maestre di ogni nequizia e di nessuna virtù (2). Ora anche Filone, in principio del II frammento, se la prende con alcuni che han fatto a Mosè la medesima accusa (*οὕτω καὶ ἐλοιδόρουν γόητα καὶ κέρκωπα λόγων*). Giuseppe ritiene di confutare pienamente gli avversari, quando dimostri, che i precetti della legge data da Mosè sono di natura del tutto opposta a quella da essi affermata, e perciò ne fa l'esposizione sommaria. Filone da parte sua per mostrare l'eccellenza del legislatore e della legge, ne introduceva un riassunto, di cui il III e il IV frammento eran parte.

Giuseppe per farne risaltare la superiorità la confronta con quelle degli altri popoli e legislatori e Filone procedeva nello stesso modo: il passo infatti con cui incomincia il III frammento

---

(1) Euseb., *Praep. evang.*, VIII, 6, 5: *οὐ μὴν ἔγωγε δικαιῶ μᾶλλον καθ' ἱστορίαν ἢ κατά τινα λογισμὸν περὶ αὐτῶν τὰ εἰκότα διεξελθεῖν.*

(2) *c. Apion.*, II, 145. Il passo di Lisimaco al quale qui accenna Giuseppe, lo riporta egli stesso in *c. Apion.*, I, 304 seg.: in esso si dice male della Legge, ma non si trova l'accusa così formulata contro Mosè. È da ritenere che le qualifiche di *γόης καὶ ἀπατεών* fossero date da Apollonio Molone, per il quale cf. Schürer, *Geschichte*, III, 532-5.

Ἀρά τι τούτων ἢ τούτοις προσόμοιον παρ' ἐκείνοις ἐστί ecc. (1) indica che, nella parte perduta che precedeva, aveva parlato delle legislazioni pagane, che metteva a fronte della mosaica quanto alle disposizioni penali. E un accenno ad un confronto con la legislazione e la morale religiosa ateniese è nella frase *ποῖ δὴ πρὸς τοῦ θεοῦ ἡμῖν τὰ βουζύγια ἐκεῖνα*; (2).

Tanto Filone come Giuseppe, prima di procedere all'esposizione della legge, si fermano a parlare del legislatore e confutano in una stessa maniera l'accusa ch'egli fosse un impostore e un ciarlatano, ricordando cioè la grande impresa da lui compita, guidando un immenso popolo attraverso i pericoli e le difficoltà del deserto, conservandolo unito ed ubbidiente. Qui anzi il contatto tra i due scrittori è sensibile anche nella forma, come si può vedere leggendo i due tratti seguenti:

Praepar. evang, VIII, 6, 2 dopo aver detto che il popolo ebraico *μυριάσι τε ἀμυθήτοις πλήθοντα* per desiderio *τῆς πατρίου καὶ ἀρχαίας γῆς* s'era deciso a lasciar l'Egitto (6, 1) e che lo guidava un uomo non differente se si vuole dagli altri.
οὕτω καὶ ἐλοιδόρουν γόητα καὶ κέρκωπα λόγων· καλῆς μέντοι γοητείας καὶ πανουργίας, ἐξ ἧς τόν γε λαὸν ἅπαντα ἐν ἀνυδρίᾳ καὶ λιμῷ καὶ τῶν ὁδῶν ἀγνοίᾳ καὶ ἀπορίᾳ τῶν συμπάντων, οὐ μόνον εἰς τὸ παντελὲς διεσώσατο καὶ ὥσπερ ἐν εὐθηνίᾳ πάσῃ καὶ παραπομπῇ τῶν μεταξὺ κειμένων ἐθνῶν, ἀλλὰ καὶ πρὸς ἀλλήλους ἀστασιάστους αὐτοὺς καὶ πρὸς ἑαυτὸν μάλιστα εὐπειθεῖς διεφύλαξε.

c. Apionem, II 157-158.
ἐκεῖνος γὰρ τοὺς προγόνους ἡμῶν, ἐπείπερ ἔδοξεν αὐτοῖς τὴν Αἴγυπτον ἐκλιποῦσιν ἐπὶ τὴν πάτριον γῆν ἐπανιέναι, πολλὰς τὰς μυριάδας παραλαβὼν ἐκ πολλῶν καὶ ἀμηχάνων διέσωσεν εἰς ἀσφάλειαν· καὶ γὰρ τὴν ἄνυδρον αὐτοὺς καὶ πολλὴν ψάμμον ἔδει διοδοιπορῆσαι, καὶ νικῆσαι πολεμίους, καὶ τέκνα καὶ γυναῖκας καὶ λείαν ὁμοῦ σώζειν, μαχομένους· ἐν οἷς ἅπασι καὶ στρατηγὸς ἄριστος ἐγένετο, καὶ σύμβουλος συνετώτατος, καὶ πάντων κηδεμὼν ἀληθέστατος, ἅπαν δὲ τὸ πλῆθος εἰς ἑαυτὸν ἀνηρτῆσθαι παρεσκεύασε, καὶ περὶ παντὸς ἔχων πεισθέντας...

Confrontisi anche *Praep. evang.*, VIII, 6, 9 con *c. Apionem*, II, 160, 226.

Altri e più numerosi raffronti letterali ci permette di fare il III frammento.

(1) Euseb., *Praep. evang.*, VIII, 7, 1.
(2) Ib., 7, 8.

Così quanto alle disposizioni penali.

Praep. ev., VIII, 7. 1. Ἆρά τι τούτων, ἢ τούτοις προσόμοιον παρ' ἐκείνοις ἐστί, πρᾶον εἶναι δοκοῦν καὶ τιθασόν, καὶ δικῶν ἐπαγωγὰς καὶ σκήψεις καὶ ἀναβολὰς καὶ τιμήσεις καὶ πάλιν ὑποτιμήσεις ἔχον; οὐδέν, ἀλλὰ πάντα ἁπλᾶ καὶ δῆλα· ἐὰν παιδεραστῇς, ἐὰν μοιχεύῃς, ἐὰν βιάσῃ παῖδα (ἄρρηνα μὲν μηδὲ λέγε) ἀλλὰ κἂν θήλειαν· ὁμοίως ἐὰν σαυτὸν καταπορνεύῃς, ἐὰν καὶ παρ' ἡλικίαν αἰσχρόν τι πάθῃς, ἢ δοκῇς, ἢ μέλλῃς, θάνατος ἡ ζημία. (2) ἐὰν εἰς δοῦλον σῶμα, ἐὰν εἰς ἐλεύθερον ὑβρίζῃς . . . . . . ἐὰν ἀσεβῇς, οὐκ ἔργῳ μόνον, ἀλλὰ καὶ ἐὰν ῥήματι τῷ τυχόντι, εἰς μὲν θεὸν αὐτὸν (ἵλεως ἡμῖν ὁ θεὸς καὶ αὐτῆς τῆς περὶ τούτων ἐννοίας γένοιτο, οὐδὲ ἄξιον λέγειν) ἀλλ' εἰς πατέρα ἢ μητέρα ἢ εὐεργέτην σαυτοῦ, θάνατος ὁμοίως, καὶ οὗτος οὐ κοινός, οὐδ' ὁ τυχών, ἀλλὰ δεῖ καταλευσθῆναι τὸν εἰπόντα μόνον, ὡς οὐ χείρονα ἀσεβείας πράξαντα·

c. Apionem, II, 276 ἐῶ νῦν περὶ τῶν τιμωριῶν λέγειν, ὅσας μὲν ἐξ ἀρχῆς ἔδοσαν οἱ πλεῖστοι νομοθέται τοῖς πονηροῖς διαδύσεις, ἐπὶ μοιχείας μὲν ζημίας χρημάτων, ἐπὶ φθορᾶς δὲ γάμους νομοθετήσαντες, ὅσας δὲ περὶ τῆς ἀσεβείας προφάσεις περιέχουσιν ἀρνήσεως, εἴ καί τις ἐπιχειρήσειεν ἐξετάζειν· ἤδη γὰρ παρὰ τοῖς πλείοσι μελέτη γέγονε τοῦ παραβαίνειν τοὺς νόμους· οὐ μὴν καὶ παρ' ἡμῖν . . . . .

§ 214. . . . . . τοὺς δ' αὖ κατὰ τῶν παραβαινόντων τιμωρητικοὺς τάξας ἄνευ προφάσεως.

§ 215. ζημία γὰρ ἐπὶ τοῖς πλείστοις τῶν παραβαινόντων ἐστὶ θάνατος, ἂν μοιχεύσῃ τις, ἂν βιάσηται κόρην, ἂν ἄρρηνι τολμήσῃ πεῖραν προσφέρειν, ἂν ὑπομείνῃ παθεῖν ὁ πειρασθείς· ἔστι δὲ καὶ ἐπὶ δούλοις ὁμοίως ὁ νόμος ἀπαραίτητος.

§ 216. . . . πάντων εἰσὶ κολάσεις οὐχ οἷαι παρ' ἑτέροις ἀλλ' ἐπὶ τὸ μεῖζον

§ 217. περὶ μὲν γὰρ γονέων ἀδικίας ἢ τῆς εἰς τὸν θεὸν ἀσεβείας, κἂν μελλήσῃ τις, εὐθέως ἀπόλλυται·

Ambedue gli scrittori insistono sulla differente legislazione quanto all'amore, al matrimonio, alla famiglia, alle relazioni con gli amici e col prossimo, vestendo i precetti mosaici alla greca, trasformandoli e talora purificandoli ed adattandoli al grado più raffinato, a cui era giunta la morale filosofica ellenica.

I raffronti letterali sono in questa parte tanto più importanti, per determinare il rapporto delle due opere, in quanto parecchi di quei precetti, o non si hanno affatto, o non in forma simile nella Scrittura. Il Wendland (1) ha già rilevato un certo

(1) *Die Therapeuten*, p. 714 seg.

numero di paralleli letterali: così tra *Praep. evang.*, VIII, 7, 7 e *c. Apion.*, II, 202 quanto al divieto dell'aborto; *Praep.*, VIII, 6, 7 e *c. Apion.*, II, 211 sui doveri generali di umanità; *Praep.*, VIII, 6, 9 e *c. Apion.*, II, 213 sulla mitezza verso gli animali; *Praep.*, VIII, 7, 3 e *c. Apion.*, II, 201 sulla soggezione della donna all'uomo; nè qui occorre citarne i testi. Ad essi si aggiunga quanto agli amici.

Praep. evang., VIII, 7, 8. *μὴ φίλων ἀπόρρητα ἐν ἔχθρᾳ φαίνειν·*

c. Apion., II, 206 *κἂν συμβῇ τις ἔχθρα, τούτων (φίλων) τἀπόρρητα λέγειν κεκώλυκε.*

Ambedue gli scrittori parlano del sabato destinato dal legislatore allo studio della Legge, per cui avviene che, mentre presso gli altri popoli nessuno conosce i propri obblighi e doveri, e si deve ricorrere agli specialisti in materia, presso i Giudei chiunque è capace di rispondere alle domande che gli vengano fatte sull'argomento.

Praep. evang., VIII, 7, 12-14. *τί οὖν ἐποίησε ταῖς ἑβδόμαις ταύταις ἡμέραις; αὐτοὺς εἰς ταυτὸν ἠξίου συνάγεσθαι καὶ καθεζομένους μετ' ἀλλήλων σὺν αἰδοῖ καὶ κόσμῳ τῶν νόμων ἀκροᾶσθαι τοῦ μηδένα ἀγνοῆσαι χάριν . . . . . τοιγαροῦν οὐκ ἐπὶ θεσμῳδοὺς ἔρχονται περὶ τῶν πρακτέων, καὶ μὴ διερωτῶντες οὐδὲ καθ' ἑαυτοὺς ὑπ' ἀγνοίας τῶν νόμων ῥᾳδιουργοῦσιν, ἀλλ' ὅντινα αὐτῶν κινεῖς καὶ περὶ τῶν πατρίων διαπυνθάνῃ, προχείρως ἔχει καὶ ῥᾳδίως εἰπεῖν, καὶ ἀνὴρ γυναικὶ, καὶ παισὶ πατήρ, καὶ δούλοις δεσπότης ἱκανὸς εἶναι δοκεῖ τοὺς νόμους παραδιδόναι.*

c. Apion., II § 175-8. *οὐδὲ γὰρ τὴν ὑπ' ἀγνοίας ὑποτίμησιν ἠνέσχετο καταλιπεῖν, ἀλλὰ καὶ κάλλιστον καὶ ἀναγκαιότατον ἀπέδειξε παίδευμα τὸν νόμον, οὐκ εἰσάπαξ ἀκροασομένοις, οὐδὲ δὶς ἢ πολλάκις, ἀλλ' ἑκάστης ἑβδομάδος, τῶν ἄλλων ἔργων ἀφειμένους ἐπὶ τὴν ἀκρόασιν τοῦ νόμου ἐκέλευσε συλλέγεσθαι καὶ τοῦτον ἀκριβῶς ἐκμανθάνειν· ὃ δὴ πάντες οἱ νομοθέται ἐοίκασι παραλιπεῖν, καὶ τοσοῦτον οἱ πλεῖστοι τῶν ἀνθρώπων ἀπέχουσι τοῦ κατὰ τοὺς οἰκείους ζῆν νόμους ὥστε σχεδὸν αὐτοὺς οὐδ' ἴσασιν . . . . . ἡμῶν δ' ὁντινοῦν τις ἔροιτο τοὺς νόμους, ῥᾷον ἂν εἴποι πάντας ἢ τοὔνομα τὸ ἑαυτοῦ.*

Poichè adunque le *Ὑποθετικά* e questa parte del *c. Apionem* hanno di mira gli stessi avversari e le stesse accuse, un modo di procedere e un contenuto press'a poco uguale, e così molteplici contatti di forma oltre che di pensiero, non è arbitrario affermare, che il *c. Apionem* ci rappresenta all'ingrosso quel che

doveva essere il I libro delle Ὑποθετικά. Apollonio, Lisimaco e gli altri avevano accusato Mosè come un mago e un impostore, le leggi come maestre di malvagità e di nessuna virtù; Apollonio in ispecie ora rimproverava i Giudei di essere atei e di odiare il genere umano, ora di viltà, talora di sfrontatezza e di stoltezza, di essere i più inutili di tutti i Barbari e perciò di non aver arrecato nessun contributo al vivere civile (1). In contrapposto Giuseppe si propone di dimostrare che quanto a religiosità, a fratellanza tra connazionali, a solidarietà con tutti gli uomini, quanto a giustizia, operosità e disprezzo della morte, le loro leggi fossero ottime non solo, ma di fatto venissero scrupolosamente osservate (2). Questo doveva essere senza dubbio anche il piano di Filone. Ma i frammenti I e II delle Ὑποθετικά hanno quanto all'argomento il loro raffronto nel I libro del *c. Apionem*, riferendosi alle accuse relative all'origine e all'antica storia d'Israele: questa parte adunque, che Giuseppe svolge molto ampiamente nel I libro del *c. Apionem*, formava l'oggetto di una parte del I libro delle Ὑποθετικά. Viceversa manca quasi nei frammenti la parte riguardante l'εὐσέβεια, in cui doveva essere confutata l'accusa d'ateismo, che non poteva essere trascurata, sia per la sua importanza, sia perchè spesso nelle altre opere Filone insiste nel dimostrare la pietà degli Ebrei, i soli veramente religiosi in confronto con i gentili. Ad altre accuse capitali, come a quella di odiare il genere umano e d'insociabilità, vengono sì contrapposti i precetti della legge nel riassunto che l'autore fa di questa: ma ciò sarebbe veramente poco per combattere accuse di tanta gravità. Inoltre occorreva mostrare non solo che la legge era buona e santa, ma che di fatto i Giudei la praticavano, come si propone di fare Giuseppe e doveva fare anche Filone, il quale ama intercalare quadretti ed episodi, come p. es. quello degli Ebrei che si raccolgono nelle sinagoghe ad ascoltar la legge e a filosofare, nel IV frammento, ch'era parte della confutazione dell'accusa di pigrizia e d'inerzia (ἀργία).

È qui il luogo di domandarci se il quadro ch'egli fa degli

(1) *c. Apion.*, II, 145, 148.
(2) Ib., 146, 149.

Esseni nel brano che Eusebio riporta alcuni capitoli dopo (1) dicendo di toglierlo ἀπὸ τῆς ὑπὲρ Ἰουδαίων ἀπολογίας appartenga anch'esso al primo libro delle Ὑποθετικά, e quindi l'Apologia e le Ὑποθετικά siano una medesima opera. Per sè le parole di Eusebio con cui introduce i frammenti, ἀπὸ τοῦ πρώτου συγγράμματος ὧν ἐπέγραψεν Ὑποθετικῶν, ἔνθα τὸν ὑπὲρ Ἰουδαίων, ὡς πρὸς κατηγόρους αὐτῶν ποιούμενος λόγον, potrebbero ugualmente bene intendersi nel senso che in quel punto, da cui Eusebio toglieva la citazione, Filone difendeva i Giudei contro i loro accusatori, ma il libro stesso poteva avere altro fine ed altro contenuto, la difesa de' Giudei occupandovi solo un breve tratto. Quanto però siamo venuti dicendo sulla natura de' frammenti ed il confronto con il *c. Apionem*, tolgono ogni dubbio che il I libro almeno delle Ὑπ. era una vera e propria apologia de' Giudei, la quale cominciando dalle leggende calunniose sull'origine e l'antica storia del popolo d'Israele, veniva a difendere la Legge e la vita pratica dei Giudei, contro le accuse generiche e specifiche di cui eran fatti bersaglio. Tutto ciò forniva argomento sufficiente per un intero libro di Filone, ma a mio parere a non più d'uno, poichè il fatto che il IV frammento confuta l'accusa di ἀργία, mostra che anche quelle più particolari erano trattate nello stesso primo libro. Ritengo quindi del tutto certa con l'Harris (2), il Wendland (3) ed il Cohn (4) l'identità dell'Ἀπολογία ὑπὲρ Ἰουδαίων con le Ὑποθετικά, o meglio col primo σύγγραμμα di esse.

Resta così risolta anche una difficoltà che nasce dai dati di Eusebio, il quale nel catalogo delle opere di Filone, mentre non ricorda nè le Ὑποθετικά, nè l'Apologia, fa menzione di uno scritto περὶ Ἰουδαίων composto di un sol libro (5), che viene generalmente identificato con l'Apologia. Se si ammette, come a me pare, che l'Apologia fosse compresa tutta nel primo σύγ-

(1) *Praep. evang.*, VIII, 10, 19.

(2) Harris, *Fragments of Philo Judaeus*, Cambridge, 1886, p. 76.

(3) *Die Therapeuten*, p. 715.

(4) *Einteilung*, p. 419.

(5) *Hist. eccl.*, II, 18, 6: πρὸς τούτοις ἅπασιν καὶ μονόβιβλα αὐτοῦ φέρεται ὡς τὸ περὶ προνοίας, καὶ ὁ περὶ Ἰουδαίων αὐτῷ συνταχθεὶς λόγος. Potrebbe però anche darsi che questo fosse un riassunto storico delle vicende dei Giudei negli antichi tempi, e che non avesse nulla a vedere con l'Apologia.

γραμμα delle *Ὑποθετικά*, non fa difficoltà il fatto che questa opera constava di due o più libri, potendo gli altri trattare di altro argomento (quale questo probabilmente fosse lo vedremo più tardi), mentre il primo, che faceva come un tutto a sè, poteva andare per le mani anche separato, ed esser chiamato da Eusebio secondo il suo contenuto, ora una *Ἀπολογία ὑπὲρ Ἰουδαίων*, ora un *περὶ Ἰουδαίων λόγος*.

Il racconto sugli Esseni serviva a Filone nell'Apologia per dimostrare di fatto parecchie cose: l'alta sapienza delle leggi mosaiche, che avevano prodotto un così mirabile frutto in una società di filosofi e di saggi; l'ubbidienza de' Giudei alle leggi, attuandole non solo in modo comune, come la massa del popolo, ma in modo eccellentissimo e perfetto; la pietà, la santità, l'amore degli uomini, la perfetta comunanza dei beni, la vera libertà, l'instancabile operosità, il disprezzo dei piaceri e tutte le virtù, non più sogno di pensatori idealisti come Platone, ma fatto concreto in mezzo al popolo giudaico, per opera delle sante leggi di Mosè. Alle accuse degli avversari niente di meglio poteva Filone contrapporre che l'esempio degli Esseni, per mostrare come esse fossero false, e con tanta maggior efficacia, in quanto questi avevano già certamente incontrata la simpatia di scrittori pagani, e che nulla poteva ad essi paragonarsi nel mondo ellenico. Aggiungendo questo brano abbiamo un V frammento del I libro delle *Ὑποθετικά* = Apologia per i Giudei, che possiamo così a un dipresso ricostruire.

Introduzione: oggetto: la difesa dei Giudei; *captatio benevolentiae*; gli avversari.

Accuse sull'origine ed antichità del popolo: vera origine di esso (*I frammento*).

" sulle cause e sul modo dell'Esodo, su Mosè, sullo stabilirsi in Palestina (*II frammento*).

" generali contro la legge: riassunto positivo di essa (*III frammento*).

" speciali: inerzia (*IV frammento*).

ateismo
misantropia
insociabilità
altre accuse } (*V frammento*).

Conclusione: Vanità delle accuse: eccellenza della Legge dei Giudei e della loro condotta pubblica e privata.

Ma pur essendo un'apologia de' Giudei, questo primo libro doveva avere de' caratteri tali, da permettere a Filone di unirlo sotto il medesimo titolo di *Ὑποθετικά* con uno o più altri libri. Questo ci conduce ad esaminare la forma dell'opera, il valore del titolo comune, l'occasione in cui essa venne probabilmente composta e il verosimile contenuto di ciò ch'è andato perduto.

Quanto alla forma è certo che i frammenti non appartengono a uno de' soliti trattati di Filone: la forza, la vivacità, la rapidità dello stile che da essi traspaïono, li allontanano di molto dalla maniera abitualmente placida, qualche volta anche scolorita, dei trattati del nostro autore. E nemmeno è un dialogo, come pare supponga il Massebieau (1), poichè non vi appare nessun interlocutore, e il tono è talora anche troppo violento verso l'avversario, per supporre una conversazione dialogata. Vi sono ben dodici interrogazioni dirette (2), ma la risposta è data sempre dall'autore stesso. Egli rivolge la parola più di dieci volte (3) a una persona che ha di fronte e che è un avversario, un sostenitore delle calunnie contro i Giudei, o che queste siano state da altri già formulate, come nel caso di quelle recate contro di Mosè, o che dall'avversario vengano ora proposte. In una parola, Filone litiga; i frammenti appartengono a uno scritto, che in forma di orazione combatteva le accuse fatte ai Giudei. Le parole di Eusebio che nel I libro delle *Ὑποθετικά* Filone parlava *ὑπὲρ Ἰουδαίων ὡς πρὸς κατηγόρους αὐτῶν ποιούμενος λόγον* sono vere nel più stretto significato della frase. E non è a credere che la forma oratoria sia in questo caso un semplice artificio retorico: Filone si trovò veramente in circostanze di dover scrivere delle orazioni in difesa del suo popolo.

La questione sorta tra i Giudei e gli Alessandrini sotto Caligola, per l'importanza politica e religiosa, per la vastità

---

(1) *Le classement*, p. 58.

(2) *Praep. evang.*, VIII, c. 6, 3; 6; 8 tre volte; c. 7, 1; 8; 10; 11; 12; 14; 18

(3) *καίτοι τί βούλει* ib., 6, 4; *ὅπερ γάρ σοι μάλιστα ...δόξῃ* 6, 4; *πότερον γάρ ποτε βούλει* 6, 5; *ἢ τοὺς μὲν ἀπολέμους ...ὑποθώμεθα* 6, 6; *ἐὰν παιδεραστῇς, ἐὰν μοιχεύῃς* ecc. 7, 1; *ἄλλα δὲ πρὸς τούτοις ὅρα* 7, 8; *οὐ θαυμάζεις* 7, 10; *ἆρά σοι οὐ δοκεῖ* 7, 14; *ἴδοις* 7, 16; *καὶ περὶ μὲν τούτων ἅλις σοι* 7, 20; *ταῦτα οὐκ ἂν ἐμὲ ἀπαιτήσαις* 7, 20.

degl'interessi che veniva a coinvolgere, per il luogo dove aveva origine Alessandria, e il tribunale nel quale doveva decidersi, quello dell'imperatore, per l'animosità delle due parti, deve dirsi una " causa celebre „ nel più vasto senso della parola. Dei cinque rappresentanti mandati a Roma dagli Alessandrini uno Isidoro ne ricorda Filone (1): d'un altro Apione ci ha conservato memoria Giuseppe (2); un terzo Lampone possiamo con probabilità indicarlo (3); dei Giudei non conosciamo che Filone il quale sia per posizione sociale che per coltura era il capo (4).

Per i retori come Apione, per i tribuni popolari come Isidoro e Lampone era questa una opportunissima circostanza per acquistare fama e popolarità, e non è da dubitare che essi ne approfittassero preparando e componendo de' discorsi, che si proponevano di recitare e che dovevano lanciare al pubblico dopo l'esito della lite. I Giudei, dalla loro parte, non se ne stettero certamente inerti. Nella *Legatio ad Caium* Filone ci descrive con una sincerità e verità sorprendente le ansie, i timori, le trepidazioni di quei giorni, mentre egli e i suoi compagni aspettavano di comparire davanti all' imperatore, e si trovavano ad aver affidata nelle loro mani, in un certo modo, la causa non dei soli Giudei alessandrini, ma di tutti quelli viventi nell'impero: e il timore tormentoso di non riuscire e di perdervi causa e vita e tutto. Una memoria ampia, sui danni ricevuti e sui diritti che rivendicavano, avevano già mandata a Roma alcuni mesi prima per mezzo del re Agrippa; ora trovano necessario di farne pervenire a Caio un compendio (5). Che nell'attesa del giudizio preparassero i loro discorsi e le loro armi s'intende. Filone sperava in un giudizio serio e con tutte le forme, e lascia traboccare il suo sdegno quando racconta come Caligola li ricevette, mentre percorreva le sue ville, dando ordini a destra e

(1) *Legatio ad Caium* § 45, ed Mangey, II, 598.

(2) *Antiq.*, XVIII, 257.

(3) Esso si trovava con Isidoro a Roma nell'inverno 38/39 ad accusarvi il prefetto Avillio Flacco caduto in disgrazia dell'imperatore; cf. Philo, *In Flaccum*, § 16, M. II, 536.

(4) Cf. Philo, *Legatio* e Fl. Joseph., *Antiq.*, XVIII, 259.

(5) Philo, *Legatio*, § 28, M. II, 572.

a sinistra. “ Un giudice — dice egli — avrebbe dovuto assidersi con i suoi assessori diligentemente prescelti, ad esaminare una causa così grave, che non era stata mai mossa in quattrocento anni, e che per la prima volta allora si promoveva contro molte diecine di migliaia di Giudei alessandrini; e da una parte e dall'altra dovevano stare gli avversari, con i loro patrocinatori, ed udire ora l'accusa, ora la difesa, fissando alle parti l'ora, e poi levarsi il giudice e consigliarsi con i suoi assessori quale sentenza proferire con piena rettitudine „ (1).

Niente di tutto ciò fece Caligola: Filone non ebbe dunque campo a dar molta prova della sua valentia oratoria, ma ciò non impedisce che, morto Caligola, egli pubblicasse i discorsi che aveva preparati, o quelli che a cose finite gli sembravano più opportuni per sostenere la causa, se non più davanti al tribunale dell' imperatore, davanti a quello dell' opinione pubblica anche giudaica, alla quale doveva render conto del mal esito ottenuto, cosa che egli procaccia anche con la relazione che ne fa nella *Legatio ad Caium*.

Questi discorsi dovevano essere più d'uno, data l'importanza dei fatti e delle questioni: in uno dovevano discutersi i fatti di Alessandria, delle violenze e dei danni patiti dai Giudei, e specialmente i due punti principali delle sinagoghe o *προσευχαί* che il popolo alessandrino aveva invaso e consacrato al culto dell'imperatore, innalzandovi statue di Caligola, e l'altro della cittadinanza (*ἰσοπολιτεία*) alessandrina, che i Giudei ivi abitanti vantavano e che loro era stata negata in un decreto del prefetto Flacco. In un altro discorso dovevano essere prese le difese in genere del popolo giudaico e della sua Legge. Poichè vi fu un momento, in cui la causa minacciò di divenire questione di vita o di morte per il Giudaismo intero. Mentre i legati attendevano l'udienza loro promessa, Caligola già irritato contro i Giudei, ricevette la notizia che in Iamnia essi avevano abbattuto l'altare, che i gentili di quella città avevano eretto in suo onore, onde diede ordine a Petronio, legato della Siria, che, anche con le armi, innalzasse per castigo una sua statua nel tempio di Gerusalemme (2). Solo la prudenza di Petronio, l'in-

---

(1) *Legatio*, § 44, M. II, 597.
(2) *Legatio*, § 29 seg. M. II 573 seg.

tervento del re Agrippa e la morte di Caligola impedirono che questi non rinnovasse i fatti di Antioco Epifane, e che la sollevazione della Giudea non si verificasse trenta anni prima di quel che avvenne. In corte intanto i nemici de' Giudei brigavano per mettere in mala vista, questi, i loro costumi e le loro leggi, appoggiati da Apelle ed Elicone (1) due intimi cortigiani dell'imperatore. Durante l'udienza, i delegati degli Alessandrini insistettero specialmente nel rilevare le parti odiose e ridicole della loro condotta, e quei punti che potevano indisporre contro di loro l'animo di Caligola (2). Inoltre era tanto diffuso, a confessione dello stesso Filone, l'odio contro i Giudei (3), e le accuse a loro carico trovavano tanto credito nel pubblico, ch'egli dovette certo preoccuparsi, non forse la causa finisse con una condanna del giudaismo intero e col divieto di professarlo. Tale la circostanza in cui nacque l'Apologia per i Giudei e l'altro o gli altri discorsi, che con essa costituivano le *Ὑποθετικά*. Qual significato ha dunque questo titolo?

Se ne sono date diverse spiegazioni. La prima è del Viger (4) secondo il quale deriverebbe da ciò " quod hoc in opere *καθ' ὑπόθεσιν* ut plurimum disputaret, ac frequenter dilemmate proposito, alterutrius partis optionem daret, sic tamen ut ex utraque postmodum *καθ' ὑπόθεσιν* ingeniose tractata suam in rem argumenta duceret „. A questa interpretazione ha aderito tra gli ultimi il Massebieau (5), che la trova la più probabile, e a sostegno di essa osserva che nel II frammento ricorre la parola *ὑποθώμεθα* (vuoi tu che noi supponiamo?). Secondo l'Elter (6) e il Wendland (7) il titolo deriva da ciò che Filone vi prescindeva dall'autorità della Scrittura, che gli avversari non riconoscevano, e procedeva " *καθ' ὑπόθεσιν*, hypothetice „, adattandosi al loro modo di pensare. Per il Cohn (8) e lo Schürer (9)

(1) *Legatio*, § 26, M. II, 570.

(2) *Legatio*, § 45, M. II, 598.

(3) *Legatio*, § 46, M. II, 600.

(4) Nel commento alla *Praep. evang.* di Eusebio, in Migne, *P. G.*, 21, c. 598 n. 52.

(5) *Le classement*, p. 55.

(6) *Gnomol. hist.*, col. 237-8.

(7) *Die Therapeuten*, p. 717.

(8) *Einteilung*, p. 418.

(9) *Geschichte*, III, 685.

deriverebbe invece dal fatto che l'autore vi combatteva false supposizioni, ipotesi degli avversari. Cominciando da quest'ultima spiegazione, sarebbe veramente singolare che Filone chiamasse semplici supposizioni, ipotesi, le accuse atroci e le calunnie d'ogni genere lanciate non in modo dubitativo, ma con tutta l'acredine dell'odio antisemita contro di Mosè, della sua Legge e del suo popolo, e che egli combatte con tanto sdegno. Nè il prescindere dall' autorità della Scrittura e il procedere per via d' ipotesi può aver dato il titolo all'opera, poichè ciò se mai valeva solo per quella parte, che conteneva la confutazione delle accuse riguardanti l'antica storia d' Israele, non per ciò che riguardava la religione, la vita, la morale giudaica del tempo, ch'era il vero punto importante della questione, e nel trattare il quale Filone doveva procedere e procede di fatto, per necessità, affermativamente, a nulla giovandogli la Scrittura, anche se gli avversari n'avessero ammessa l'autorità. Nè del procedere per via d'ipotesi e di dilemmi si ha traccia, tranne che nel II frammento, dove come osserva il Bernays (1), costituisce un naturale modo di discussione, che non avrebbe potuto però divenir normale per un paio almeno di libri. Il Bernays alla sua volta proponeva d' interpretare *Ὑποθετικά* con " consigli per la condotta pratica, esortazioni pratiche „, ricordando che *ὑποθετικὸς λόγος* ebbe questo significato tecnico nella scuola stoica e nell'accademica; ma vale contro di ciò l'osservazione del Massebieau, che di tali consigli ed esortazioni pratiche non v'è nemmeno l'ombra nei frammenti, i quali sono invece d'indole apologetica e polemica.

Resta una interpretazione alla quale ha accennato di sfuggita il Massebieau (2), proponendosi di ritornare sulla questione più tardi, il che gli fu impedito dalla morte. Egli aveva osservato che, nella *Legatio ad Caium*, Filone chiama *ὑπόθεσις* l'affare affidato a lui ed ai suoi colleghi mandati a Caligola, e sospetta che *Ὑποθετικά* significhi " punti relativi al nostro affare „, ricordando che in tale occasione due memorie furono composte, specialmente per opera di Filone, e presentate all'imperatore, sui diritti dei Giudei e i torti loro fatti: le *Ὑποθετικά*

(1) *Philons Hypothetica*, in " Gesamm. Abhand. „, I, 265.
(2) *Le classement*, p. 58.

sarebbero forse una di queste memorie. Ma devesi tener conto del tono acre dei frammenti, il quale è adatto ad un discorso contro accusatori davanti a dei giudici, ma non può essere assolutamente quello di una memoria presentata all'imperatore.

Resta il fatto che Filone chiama l'affare a lui affidato *ὑπόθεσις*: ma che affare è questo? La causa dei Giudei alessandrini davanti al tribunale dell'imperatore. Ora *ὑπόθεσις*, oltre gli altri significati, ne ha uno tecnico di " causa, questione giudiziaria „, come si può vedere leggendo il quinto capitolo del III libro della *Institutio oratoria* di Quintiliano. " Convenit quaestiones esse aut infinitas aut finitas. Infinitae sunt quae remotis personis et temporibus et locis ceterisque similibus in utramque partem tractantur, quod Graeci *θέσιν* dicunt, Cicero propositum, alii quaestiones universales civiles, alii quaestiones philosopho convenientes, Athenaeus partem causae appellat... Finitae autem sunt ex complexu rerum, personarum, temporum, ceterorumque; quae *ὑποθέσεις* a Graecis dicuntur, causae a nostris. In his omnis quaestio videtur circa res personasque consistere „. Il passo di Cicerone a cui accenna Quintiliano è questo in *Topica*, c. 21: " Quaestionum duo sunt genera, alterum infinitum definitum alterum. Definitum est, quod *ὑπόθεσιν* Graeci, nos causam; infinitum, quod *θέσιν* illi appellant nos propositum possumus nominare „. Numerosi esempi vedansi nel *Thesaurus* dell'Estienne e nel *Glossarium* del Ducange. Ne aggiungerò due soli dal *Corpus inscriptionum Graecarum*, perchè riguardano l'Egitto e son contemporanei di Filone. Nell'iscrizione 4956 (1) il prefetto d'Egitto Gneo Vergilio Capitone, in data del 49 d. C. dice di aver conosciuto alcuni abusi, che si compivano nella Libia, specialmente nella causa dei Libii: *ἐν τῇ τῶν Λιβύων μάλιστα ἔγνων ὑποθέσει*. Nell'iscrizione 4957 (2) in data del 68 d. C. il prefetto Tiberio Giulio Alessandro, il nipote di Filone, stabilisce che essendosi moltiplicati i delatori (v. 41 e seg.) *ἐὰν μέν τις τῶν ἐν ἰδίῳ λόγῳ κατηγόρων, ὡς ἑτέρῳ συνηγορῶν εἰσάγῃ ὑπόθεσιν, παρίστασθαι ὑπ' αὐτοῦ τὸν προσαγγείλαντα, ἵνα μηδὲ ἐκεῖνος ἀκίνδυνος ᾖ· ἐὰν δὲ ἰδίῳ ὀνόματι κατενεγκὼν τρεῖς*

(1) Anche presso Dittenberger *Orientis Graeci inscr. sel.* II 665. V. ivi sul vocabolo *ὑπόθεσις* la n. 18.

(2) Ibid. 669.

ὑποθέσεις μὴ ἀποδείξῃ, μηκέτι ἐξεῖναι αὐτῷ κατηγορεῖν, ἀλλὰ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ τῆς οὐσίας ἀναλαμβάνεσθαι, dove *ὑπόθεσις* potrebbe avere oltre quello di " causa „ anche il significato di " denunzia giudiziaria „. E che Filone usi la parola nel senso di " causa „ risulta dal contesto dei vari passi in cui essa ricorre. Così *Legatio*, § 1, M. II, 546 dice che al suo tempo furono giudicate molte e grandi cause (*αἱ ...κριθεῖσαι πολλαὶ καὶ μεγάλαι ὑποθέσεις*); ib., § 44, M. II, 597 dice quale doveva essere la condotta di Caligola se si fosse voluto mostrare equo giudice in così grande causa (*δικαστοῦ μὲν γὰρ ἔργα ταῦτα ἦν· καθίσαι μετὰ συνέδρων ἀριστίνδην ἐπιλελεγμένων ἐξεταζομένης ὑποθέσεως μεγίστης*); ib., § 46, M. II, 600, dopo l'udienza imperiale restano dubbiosi quale sarebbe stata la sentenza della causa (*ποταπὴ γένοιτ' ἂν ἡ κρίσις· ἤκουσε γὰρ τῆς ὑποθέσεως ὃς πραγμάτων ἐνίων παρήκουσεν;*). Anche in altre opere come nel *De specialibus legibus*, IV (ed. Cohn, 5° vol.) § 171 egli adopera la parola nello stesso significato.

Posto ciò il titolo dell'opera di Filone vale o " discorsi giudiziarii „, potendosi sottointendere la parola *λόγος* (Eus., *Praep. evang.*, VIII, 5, 11, *ὧν ἐπέγραψεν Ὑποθετικῶν*), oppure *Ὑποθετικά* vale " accuse fatte contro i Giudei in giudizio „ " punti sui quali furono i Giudei gravati in tribunale „. Il primo discorso, di cui abbiamo i frammenti, discuteva le accuse fatte contro il Giudaismo e i Giudei in genere, un secondo, andato perduto, esaminava le questioni sorte tra i Giudei e la popolazione gentile di Alessandria. E poichè di queste si occupa Giuseppe nella prima parte del II *c. Apionem*, è verisimile che anche nello scriver questa, come la seconda parte, egli abbia avuto davanti le *Ὑποθετικά*. Così si spiegherebbe la singolarità del § 77 in cui, dopo circa trent'anni dalla distruzione del tempio di Gerusalemme e la cessazione di ogni sacrifizio, rispondendo all'accusa di Apione di non onorare con statue gl' imperatori, arreca per ragione il divieto della Legge, la quale tuttavia permette che si tributino ad essi altri onori, e soggiunge: " Facimus autem pro eis continua sacrificia, et non solum cotidianis diebus ex impensa communi omnium Judaeorum talia celebramus, verum cum nullas alias hostias ex communi neque pro filiis peragamus, solis imperatoribus hunc honorem praecipuum pariter exhibemus, quem hominum nulli persolvimus „.

Questo poteva esser vero in bocca di Filone, non mai in quella di Giuseppe. E si spiegherebbe anche come egli, in appoggio del diritto di cittadinanza vantato dai Giudei alessandrini, ricordi lettere di Alessandro Magno, di Tolomeo di Lago e dei suoi successori ed altri documenti (1), ch'egli ignora del tutto nelle *Antiq.* e nel *Bellum*, e che anche quando scriveva il *c. Apionem* certamente non conosceva nel loro testo, che in tal caso non avrebbe mancato di citare, trattandosi di documenti, apocrifi per noi, ma genuini per lui e così importanti, in gloria dei Giudei e in prova del negato diritto di quelli di Alessandria: la notizia di essi egli l'attingeva alla sua nuova fonte Filone.

(1) *c. Apion.*, II, 37.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLVII. Disp. 11ª. 1911-1912

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 14 Aprile 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Vice-presidente CAMERANO, NACCARI, Direttore della Classe, e i Soci: SALVADORI, D'OVIDIO, JADANZA, GUARESCHI, GRASSI, FUSARI e SEGRE, Segretario.

Vien letto ed approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente comunica il telegramma con cui, il 25 marzo scorso, il Rettore dell' Università di Pisa annunziava all'Accademia la morte del nostro illustre Socio Corrispondente PACINOTTI. Accenna ai grandi meriti di questo scienziato, dei quali dirà più ampiamente il Socio GRASSI in una prossima seduta. L'Accademia non mancò di farsi rappresentare ai funerali.

È giunto alla Classe un estratto del Bullettino della Società botanica italiana, nel quale sono segnate varie adesioni, fra cui la nostra, alla iniziativa di quella Società, per la protezione della Flora italiana.

Il prof. Gino LORIA ha offerto all'Accademia un esemplare delle Opere matematiche, in tre volumi, del marchese Giulio Carlo de' TOSCHI di FAGNANO, pubblicate sotto gli auspici della Società italiana per il progresso delle Scienze, dai Soci V. VOLTERRA, G. LORIA, D. GAMBIOLI. Il Socio SEGRE rileva l'interesse di questa pubblicazione.

Il Socio D'OVIDIO presenta, per la stampa negli *Atti*, una Nota del prof. Alfonso BONOLIS, *Sui numeri primi*, ed il Socio SEGRE una Nota del prof. Ermenegildo DANIELE, *Sui centri di librazione in un problema più generale di quello ristretto dei tre corpi*.

LETTURE

Sui numeri primi.

Nota di ALFONSO BONOLIS.

1. In una importante memoria, presentata nel 1850 all'Accademia Imperiale delle Scienze di Pietroburgo, il distinto matematico russo Cebiscioff [1] ha esposta un' analisi ingegnosa, fondata su considerazioni del tutto originali, dalla quale ha dedotto due limiti del numero indicante quanti numeri primi sono compresi in un dato intervallo. Come conseguenza di quest'analisi Cebiscioff ha ricavata la dimostrazione d'un *postulato*, sul quale Bertrand aveva fondata la dimostrazione d'un importante teorema relativo alla teoria delle *Sostituzioni*, il quale postulato stabilisce che " *vi è sempre almeno un numero primo compreso fra* x *e* $2x - 2$ *se si ha* $x > \frac{7}{2}$ ".

Però dalla stessa analisi di Cebiscioff si ricavano altri due teoremi, che ci sembrano d'una certa importanza e che formano l'oggetto della presente nota; la quale era già scritta quando è stato pubblicato l'eccellente trattato del Landau (*Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig und Berlin, B.G. Teubner, 1909). Abbiamo quindi rimaneggiata questa nota, tenendo presenti i risultamenti ottenuti dal Landau, e precisando anche qualche punto da lui lasciato indeciso.

2. L'analisi del Cebiscioff è molto conosciuta ed è quindi inutile esporla. Indicando allora con m il numero che dinota quanti sono i numeri primi maggiori d'un numero dato x e che

[1] Il cognome di questo matematico è stato scritto dai francesi Tchebicheff, perchè nella loro lingua mancano assolutamente i suoni adatti per esprimerlo. Non è così per noi italiani che abbiamo i suoni che corrispondono a quelli della lingua russa, e perciò abbiamo scritto questo cognome in modo da rendere più esattamente la sua pronunzia in russo.

non sorpassano un altro numero dato $L = (1 + \epsilon)x$, dalla memoria di Cebiscioff si ricava che:

$$(1)\quad \begin{cases} m < \dfrac{A\left(\frac{6}{5}L - x\right) - A\left(L^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{5}x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5}{8\lg_e 6}(2\lg_e^2 L + \lg_e^2 x) + \frac{5}{4}(2\lg_e L + 3\lg_e x) + 5}{\lg_e x}, \\ m > \dfrac{A\left(L - \frac{6}{5}x\right) - A\left(\frac{12}{5}L^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{5}{8\lg_e 6}(\lg_e^2 L + 2\lg_e^2 x) - \frac{5}{4}(3\lg_e L + 2\lg_e x) - 5}{\lg_e L}, \end{cases}$$

dove $A = \lg_e \dfrac{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{5}}}{30^{\frac{1}{30}}} = 0{,}92129202 \ldots\ldots$

La seconda delle (1) ci dice che si troveranno più di K numeri primi fra i limiti x ed $L = (1 + \epsilon)x$, se è soddisfatta la condizione seguente, cioè:

$$(2)\quad K < \frac{A\left(L - \frac{6}{5}x\right) - A\left(\frac{12}{5}L^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{1}{2}}\right) - \frac{5}{8\lg_e 6}(\lg_e^2 L + 2\lg_e^2 x) - \frac{5}{4}(3\lg_e L + 2\lg_e x) - 5}{\lg_e L},$$

e poichè $0 < x < L$, si verificherà la (2) facendo:

$$K = \frac{A\left(L - \frac{6}{5}x\right) - \frac{12}{5}AL^{\frac{1}{2}} - \frac{15}{8\lg_e 6}\lg_e^2 L - \frac{25}{4}\lg_e L - 5}{\lg_e L},$$

dalla quale si ricava:

$$x = \frac{5}{6}(1 + \epsilon)x - 2\sqrt{(1 + \epsilon)x} - \frac{25}{16A\lg_e 6}\lg_e^2 (1 + \epsilon)x -$$
$$- \frac{125}{24A}\lg_e (1 + \epsilon)x - \frac{5K}{6A}\lg_e (1 + \epsilon)x - \frac{25}{6A},$$

ovvero, passando dai logaritmi neperiani agli ordinarii,

$$x = \frac{5}{6}(1 + \epsilon)x - 2\sqrt{(1 + \epsilon)x} - \frac{25\lg^2 (1 + \epsilon)x}{16A\lg 6\lg_e} -$$
$$- \frac{125\lg(1 + \epsilon)x}{24A\lg_e} - \frac{25}{6A} - \frac{5K\lg(1 + \epsilon)x}{6A\lg_e},$$

e finalmente:

$$(3) \qquad \frac{1}{6}(5\epsilon-1)x - \{2\sqrt{(1+\epsilon)x} + 5{,}0184 \lg^2(1+\epsilon)x + 13{,}0176 \lg(1+\epsilon)x + 4{,}5226 + 2{,}0828\, K \lg(1+\epsilon)x\} = 0.$$

3. Dalla (3) si deduce immediatamente che deve essere $\epsilon > \frac{1}{5}$. Inoltre, se poniamo:

$$f(x) = \frac{1}{6}(5\epsilon-1)x - \{2\sqrt{(1+\epsilon)x} + 5{,}0184 \lg^2(1+\epsilon)x + 13{,}0176 \lg(1+\epsilon)x + 4{,}5226 + 2{,}0828\, K \lg(1+\epsilon)x\},$$

si ricava:

$$f'(x) = \frac{1}{6}(5\epsilon-1) - \left\{\frac{1+\epsilon}{\sqrt{(1+\epsilon)x}} + \frac{2\,.\,5{,}0184 \lg(1+\epsilon)x}{(1+\epsilon)x}(1+\epsilon)\lg e + \frac{13{,}0176 \lg e}{x} + \frac{2{,}0828\, K \lg e}{x}\right\}.$$

Per $x = 1$ risultano negative tanto $f(x)$ che $f'(x)$, perchè tutti i termini sono negativi salvo $\frac{5\epsilon}{6}$ e questo è minore di 1 mentre, anche prescindendo da tutti gli altri, si ha che è maggiore di 1 tanto il termine negativo $2\sqrt{1+\epsilon}$ in $f(x)$ quanto il termine negativo $\frac{1+\epsilon}{\sqrt{(1+\epsilon)}} = \sqrt{1+\epsilon}$ in $f'(x)$. Facendo crescere x da 1 in poi, tutti i termini di $f'(x)$ racchiusi nella parentesi a grappe diminuiscono, giacchè tutti hanno i numeratori costanti e contengono la x solo nel denominatore, salvo il termine $\frac{2\,.\,5{,}0184 \lg(1+\epsilon)x}{(1+\epsilon)x}(1+\epsilon)\lg e$, il quale però pure diminuisce col crescere di x, perchè l'unico fattore variabile del numeratore, cioè $\lg(1+\epsilon)x$, cresce meno rapidamente del denominatore $(1+\epsilon)x$. Inoltre tutti questi termini si annullano per $x = \infty$, mentre il termine $\frac{2\,.\,5{,}0184 \lg(1+\epsilon)x}{(1+\epsilon)x}(1+\epsilon)\lg e$ prende la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$; ma per la regola di Hospital si ha:

$$\lim_{x=\infty} \frac{\lg(1+\epsilon)x}{(1+\epsilon)x} = \lim_{x=\infty} \frac{\frac{(1+\epsilon)\lg e}{(1+\epsilon)x}}{1+\epsilon} = \lim_{x=\infty} \frac{\lg e}{(1+e)x} = 0,$$

e quindi anche esso si annulla; si ha in conseguenza che $f'(x) = \frac{1}{6}(5\epsilon - 1)$ per $x = \infty$.

Da ciò segue che $f'(x)$, che varia con legge di continuità, si mantiene negativa fino a quel valore della x, che indicheremo con λ, pel quale $f'(x)$ si annulla, e da quel punto in poi $f'(x)$ risulta positiva; allora $f(x)$, che è negativa per $x = 1$, decresce fino ad $x = \lambda$, pel quale valore diventa minima, e da questo valore in poi è sempre crescente. L'equazione (3), poichè $f(1) < 0$ ed $f(\infty) > 0$, ammette dunque sempre una radice fra 1 ed ∞, ed una sola.

Ora se indichiamo con p il numero delle cifre di x, trascurando nella (3) tutti i termini tranne il primo e l'ultimo, risulta:

$$\frac{1}{6}(5\epsilon - 1)\,x - 2{,}0828\,K(p-1) > 0\,,$$

dalla quale si trae:

$$x > \frac{12{,}4968\,K(p-1)}{5\epsilon - 1}\,. \tag{4}$$

Il vero valore dell'unica radice compresa fra 1 ed ∞ della (3) è dunque maggiore della frazione $\frac{12{,}4968\,K(p-1)}{5\epsilon - 1}$.

Dalla (4) si può facilmente, dati K ed ϵ, determinare un valore di x pel quale vi sono almeno K numeri primi fra x ed $(1+\epsilon)\,x$; si viene così a precisare un punto lasciato indeciso dal Landau. Ed infatti supposto $\epsilon = \frac{1}{4}$, se vogliamo che sia $K = 1000$, avremo dalla (4):

$$x > 49987{,}2\,(p-1)\,,$$

nella quale facendo successivamente $p = 2, 3, 4, \ldots\ldots$, si trova che solo per $p = 6$ si ottiene per x un numero di 6 cifre, e propriamente $x = 249936$; quindi si deduce che tra 249936 e $\frac{5}{4} \cdot 249936$, cioè tra 249936 e 312420, vi sono almeno 1000 numeri primi. Se con $\epsilon = \frac{1}{4}$ avessimo fatto $K = 10000$, la stessa formola (4) ci avrebbe detto che tra 2999232 e 3749040 esistono almeno 10000 numeri primi.

4. Possiamo ora dimostrare il seguente teorema: *Se* x *è un numero di* p *cifre maggiore di* 13 *ed* α *è il più piccolo numero intero superiore ad* $\frac{x}{10(p+1)}$, *tra* x *ed il massimo intero contenuto in* $\frac{3}{2}x - 2$ *vi sono almeno* α *numeri primi.*

Ed infatti, tenendo presente la (2), sarà stabilito che vi saranno almeno α numeri primi tra i limiti x e $\frac{3}{2}x - 2$ se si prova che si può, con un conveniente valore di L, soddisfare le due disuguaglianze:

$$\frac{3}{2}x - 2 > L,$$

$$x < \frac{5}{6}L - 2L^{\frac{1}{2}} - \frac{25 \lg_e^2 L}{16 A \lg_e 6} - \frac{5}{6A}\left\{\frac{25}{4} + \frac{x}{10(p+1)}\right\}\lg_e L - \frac{25}{6A}.$$

Ora si verifica evidentemente la prima di queste due disuguaglianze prendendo $L = \frac{2}{3}x - 3$ (se $\frac{3}{2}x - 3$ non è intero, si fa L uguale al massimo intero contenuto in esso); in quanto alla seconda, essa, per $L = \frac{3}{2}x - 3$, diventa:

$$x < \frac{5}{6}\left(\frac{3}{2}x - 3\right) - 2\sqrt{\frac{3}{2}x - 3} - \frac{25 \lg_e^2\left(\frac{3}{2}x - 3\right)}{16 A \lg_e 6} -$$

$$- \frac{125}{24A}\lg_e\left(\frac{3}{2}x - 3\right) - \frac{25}{6A} - \frac{x \lg_e\left(\frac{3}{2}x - 3\right)}{12 A (p+1)},$$

cioè, passando dai logaritmi neperiani agli ordinarii,

$$x < \frac{5}{6}\left(\frac{3}{2}x - 3\right) - 2\sqrt{\frac{3}{2}x - 3} - \frac{25 \lg^2\left(\frac{3}{2}x - 3\right)}{16 A \lg 6 \lg e} -$$

$$- \frac{125 \lg\left(\frac{3}{2}x - 3\right)}{24 A \lg e} - \frac{25}{6A} - \frac{x \lg\left(\frac{3}{2}x - 3\right)}{12 A (p+1) \lg e}.$$

Ma $\lg\left(\frac{3}{2}x-3\right)<p+1$, quindi la precedente disuguaglianza è sicuramente soddisfatta se si ha:

$$x<\frac{5}{6}\left(\frac{3}{2}x-3\right)-2\sqrt{\frac{3}{2}x-3}-\frac{25\lg^2\left(\frac{3}{2}x-3\right)}{16A\lg 6\lg e}-$$

$$-\frac{125\lg\left(\frac{3}{2}x-3\right)}{24A\lg e}-\frac{25}{6A}-\frac{x}{12A\lg e},$$

ovvero:

$$x<\frac{5}{6}\left(\frac{3}{2}x-3\right)-2\sqrt{\frac{3}{2}x-3}-5{,}0184\lg^2\left(\frac{3}{2}x-3\right)-$$

$$-13{,}0176\lg\left(\frac{3}{2}x-3\right)-4{,}5226-0{,}2083\,x,$$

e finalmente:

$$0{,}0417\,x-\left\{2\sqrt{\frac{3}{2}x-3}+5{,}0184\lg^2\left(\frac{3}{2}x-3\right)+\right.$$

$$\left.+13{,}0176\lg\left(\frac{3}{2}x-3\right)+7{,}0226\right\}>0.$$

Poniamo:

$$F(x)=0{,}0417\,x-\left\{2\sqrt{\frac{3}{2}x-3}+5{,}0184\lg^2\left(\frac{3}{2}x-3\right)+\right.$$

$$\left.+13{,}0176\lg\left(\frac{3}{2}x-3\right)+7{,}0226\right\};$$

si ha allora:

$$F'(x)=0{,}0417-\left\{\frac{3}{2\sqrt{\frac{3}{2}x-3}}+\frac{3\,.\,5{,}0184\lg\left(\frac{3}{2}x-3\right)}{\frac{3}{2}x-3}\lg e+\right.$$

$$\left.+\frac{\frac{3}{2}\,.\,13{,}0176\lg e}{\frac{3}{2}x-3}\right\}.$$

Per $x=3$ risultano negative tanto $F(x)$ quanto $F'(x)$; facendo crescere x da 3 in poi, con un ragionamento analogo a quello

fatto precedentemente sopra $f(x)$ ed $f'(x)$, si vede che $F'(x)$ si mantiene negativa sino a quel valore di x, che indicheremo con μ, pel quale $F'(x)$ si annulla, mentre da $x = \mu$ in poi $F'(x)$ è sempre positiva e diventa uguale a 0,0417 per $x = \infty$. Da ciò segue che $F(x)$, che è negativa per $x = 3$, decresce fino ad $x = \mu$, pel quale valore diventa minima, e da questo valore in poi è sempre crescente; ma per $x = 9100$ si ha $F(9100) > 0$; dunque ne segue che da questo valore di x in poi vi sono necessariamente almeno α numeri primi tra x e $\frac{3}{2}x - 2$. In quanto ai valori di x maggiori di 13 e minori di 9100, il teorema si può immediatamente verificare mediante una tavola di numeri primi.

5. Dal teorema del paragrafo precedente si ricava come caso particolare quello dimostrato da Cebiscioff, cioè: *per* $2x > 7$ *vi è almeno un numero primo tra* x *e* $2x - 2$.

6. Avendo fatto $L = \frac{3}{2}x - 2$ nel teorema del § 4, mentre era $L = (1 + \epsilon)x$, ne risulta che in quel teorema ϵ è di poco minore di $\frac{1}{2}$.

7. Dimostriamo ora che: *se* x *è un numero di* p *cifre maggiore di* 13, *e* β *rappresenta il più gran numero intero minore di* $\frac{x}{3(p-1)}$, *tra* x *ed il massimo intero contenuto in* $\frac{3}{2}x - 2$ *non vi sono mai nè* β, *nè più di* β *numeri primi.*

Infatti dalla prima delle formole (1) si ricava che si troveranno sempre meno di K numeri primi fra i limiti x ed L se è soddisfatta la condizione:

$$K > \frac{A\left(\frac{6}{5}L - x\right) - A\left(L^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{5}x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5}{8\lg_e 6}(2\lg_e{}^2 L + \lg_e{}^2 x) + \frac{5}{4}(2\lg_e L + 3\lg_e x) +}{\lg_e x}$$

ovvero, passando dai logaritmi neperiani agli ordinarii,

$$K > \frac{A\left(\frac{6}{5}L - x\right) - A\left(L^{\frac{1}{2}} - \frac{12}{5}x^{\frac{1}{2}}\right) + \frac{5(2\lg^2 L + \lg^2 x)}{8\lg 6 \lg e} + \frac{5(2\lg L + 3\lg x)}{4\lg e} + 5}{\frac{\lg x}{\lg e}};$$

ma si ha $L > x > 0$ e $\lg x < p - 1$, quindi la precedente disuguaglianza sarà verificata se si fa:

$$K = \frac{A\left(\frac{6}{5} L - x\right) + \frac{7}{5} A L^{\frac{1}{2}} + \frac{15 \lg^2 L}{8 \lg 6 \lg e} + \frac{25 \lg L}{4 \lg e} + 5}{\frac{p-1}{\lg e}},$$

dalla quale si ricava

$$x = \frac{6}{5} L + \frac{7}{5} L^{\frac{1}{2}} + \frac{15 \lg^2 L}{8 A \lg 6 \lg e} + \frac{25 \lg L}{4 A \lg e} + \frac{5}{A} - \frac{K(p-1)}{A \lg e}.$$

Da ciò segue che vi saranno meno di β numeri primi tra x e $\frac{3}{2} x - 2$ se si prova che si può, mediante un conveniente valore di L, soddisfare le due disuguaglianze:

$$L > \frac{3}{2} x - 2,$$

$$x > \frac{6}{5} L + \frac{7}{5} L^{\frac{1}{2}} + \frac{15 \lg^2 L}{8 A \lg 6 \lg e} + \frac{25 \lg L}{4 A \lg e} + \frac{5}{A} - \frac{x}{3 A \lg e}.$$

Ora si verifica evidentemente la prima di queste disuguaglianze facendo $L = \frac{3}{2} x - 1$, se $\frac{3}{2} x - 1$ è intero; in caso contrario si farà L uguale al più piccolo numero intero maggiore di $\frac{3}{2} x - 1$; in quanto alla seconda disuguaglianza essa, per $L = \frac{3}{2} x - 1$, diventa:

$$x > \frac{6}{5}\left(\frac{3}{2} x - 1\right) + \frac{7}{5}\sqrt{\frac{3}{2} x - 1} + \frac{15 \lg^2\left(\frac{3}{2} x - 1\right)}{8 A \lg 6 \lg e} + \frac{25 \lg\left(\frac{3}{2} x - 1\right)}{4 A \lg e} + \frac{5}{A} - \frac{x}{3 A \lg e},$$

ovvero

$$x > \frac{6}{5}\left(\frac{3}{2} x - 1\right) + \frac{7}{5}\sqrt{\frac{3}{2} x - 1} + 6{,}0221 \lg^2\left(\frac{2}{3} x - 1\right) + 15{,}621 \lg\left(\frac{3}{2} x - 1\right) + 5{,}427 - 0{,}833\, x,$$

ed infine:

$$0{,}033\,x - \left\{ \frac{7}{5}\sqrt{\frac{3}{2}x-1} + 6{,}0221\,\lg^2\left(\frac{3}{2}x-1\right) + \right.$$
$$\left. + 15{,}621\,\lg\left(\frac{3}{2}x-1\right) + 4{,}227 \right\} > 0\,.$$

Poniamo:

$$\varphi(x) = 0{,}033\,x - \left\{ \frac{7}{5}\sqrt{\frac{3}{2}x-1} + 6{,}0221\,\lg^2\left(\frac{3}{2}x-1\right) + \right.$$
$$\left. + 15{,}621\,\lg\left(\frac{3}{2}x-1\right) + 4{,}227 \right\},$$

e si avrà:

$$\varphi'(x) = 0{,}033 - \left\{ \frac{7}{20} \cdot \frac{3}{\sqrt{\frac{3}{2}x-1}} + 3\,.\,6{,}0221\,\frac{\lg\left(\frac{3}{2}x-1\right)}{\frac{3}{2}x-1}\lg e + \right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}\,.\,15{,}621\,\frac{\lg e}{\frac{3}{2}x-1} \right\}.$$

Per $x=2$ risultano negative tanto $\varphi(x)$ quanto $\varphi'(x)$, e con un ragionamento analogo a quello fatto sopra $f(x)$ ed $f'(x)$, e sopra $F(x)$ ed $F'(x)$, si ricava che $\varphi'(x)$ si mantiene negativa sino a quel valore di x, che indicheremo con ν, pel quale $\varphi'(x)$ si annulla, e da $x=\nu$ in poi $\varphi'(x)$ è sempre positiva. Da ciò si deduce che $\varphi(x)$, che è negativa per $x=2$, decresce fino ad $x=\nu$, pel quale valore è minima, e da questo valore in poi è sempre crescente; ma per $x=13030$ si ha $\varphi(13030)>0$, dunque ne segue che da questo valore di x in poi vi saranno meno di β numeri primi tra x e $\frac{3}{2}x-2$; in quanto ai valori di x minori di 13030 e maggiori di 13, la proposizione si può immediatamente verificare mediante una tavola di numeri primi.

8. I due teoremi precedenti dànno, in un modo semplicissimo, due limiti tra i quali cade il numero m che dinota quanti numeri primi sono maggiori di x e minori di $\frac{3}{2}x-2$. Volendo

i due limiti tra i quali è compreso il numero M che indica quanti numeri primi vi sono tra due numeri qualsivogliano l ed L, si calcolano i due limiti α_1 e β_1 corrispondenti all'intervallo l e $\frac{3}{2} l - 2 = l_1$; i due limiti α_2 e β_2 corrispondenti all'intervallo l_1 e $\frac{3}{2} l_1 - 2 = l_2$; e così via via sino a calcolare i due limiti α_{K+1} e β_{K+1} corrispondenti all'intervallo l_K e $\frac{3}{2} l_K - 2$ nel quale cade L; si ha allora:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_K < M < \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_K .$$

Così per $l = 1000000$ ed $L = 11000000$ si trova:

$$\alpha_1 = 12500, \ \beta_1 = 55555; \quad \alpha_2 = 18750, \ \beta_2 = 83333;$$
$$\alpha_3 = 28125, \ \beta_3 = 124999; \ \alpha_4 = 42188, \ \beta_4 = 187499;$$
$$\alpha_5 = 63282, \ \beta_5 = 281249; \ \alpha_6 = 94922, \ \beta_6 = 421873,$$

e se ne deduce che fra 1000000 ed 11000000 vi sono almeno 259767 e non più di 1154507 numeri primi.

9. Un più accurato esame dell'analisi di Cebiscioff potrebbe condurre forse a qualche modificazione delle sue formole, dalle quali si potrebbe allora ricavare la conseguenza che per $x > 39$ tra i numeri x e $\frac{5}{4} x - 2$ vi sono sempre almeno α e non più di $2\alpha - 1$ numeri primi, conservando ad α lo stesso significato ad esso attribuito nel § 4.

Sui centri di librazione in un problema più generale di quello ristretto dei tre corpi.

Nota di E. DANIELE.

La ricerca dei centri di librazione nel problema ristretto dei tre corpi fu estesa dal prof. Burgatti (*) all'ipotesi in cui il pianetino possa uscire dal piano nel quale si ammette che ruotino intorno al comune centro di massa i corpi S e J. Il prof. Burgatti si limita però a constatare che i cinque centri di librazione già noti (**) pel moto piano, esistono ancora nel caso più generale da lui studiato, mentre dal suo lavoro non risulta in modo esplicito che non ne possano eventualmente esistere degli altri. Ora, se ci proponiamo di trovare tutti questi centri, dobbiamo concludere che nel problema attuale, in cui le masse di S e di J sono entrambe positive, essi si riducono effettivamente ai cinque già noti; altri centri si presentano soltanto a condizione che le masse di S e di J siano di segno opposto.

Una tale condizione è interpretabile anche senza che occorra uscire dal campo della Meccanica celeste: basti ricordare la teoria di Arrhenius sulla formazione del Mondo, nella quale ha una parte importantissima la *pressione* delle radiazioni luminose emanate dalle stelle. È a questa pressione, che agisce come una forza *ripulsiva* sul pulviscolo cosmico, che devono, secondo l'Arrhenius, la loro origine le code delle comete, la corona solare e, in parte, le nebulose (***).

(*) *Sopra una classe particolare di soluzioni assintotiche nel problema ristretto dei tre corpi*; " Rend. Acc. d. Sc. di Bologna ", 1911).

(**) Cfr. Darwin, *Periodic Orbits*; " Acta Math. ", 21 (1897).

(***) Cfr. Poincaré, *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques*, chap. XI (Paris, Hermann, 1911).

Non sembrerà dunque inutile continuare la ricerca del Burgatti.

Dopo d'aver rilevato, nel n. 1, come si possa astrarre da qualsiasi relazione necessaria fra le masse di S e J e la loro velocità angolare di rotazione, quando i due punti si suppongano legati fra loro rigidamente; ho dedotto, nel n. 2, l'equazione del moto relativo del pianetino P nello spazio, valendomi dell'analisi vettoriale, che si presenta molto comoda in questo problema (*). La questione dei centri di librazione è posta nel modo più generale nel n. 3: i punti cercati si trovano parte nel piano individuato da S, da J e dalla posizione iniziale di P, parte nel piano perpendicolare a questo passante per S e J. Lo studio dei primi dipende da relazioni che comprendono come caso particolare quelle incontrate dal Darwin nel problema ristretto (n. 4); studiando i secondi (n.[i] 5, 6) se ne trovano due altri, supponendo, come già si disse, che le masse di S e J abbiano segni opposti.

Veniva spontaneo di domandarsi come si svolga il movimento in prossimità di questi nuovi centri di librazione. La ricerca dipende, in sostanza, dall'esame delle radici di una equazione di 3° grado, i cui coefficienti contengono (nel caso più generale ove S e J sono legati rigidamente) due parametri (n. 7). Si vede facilmente (n. 8) che delle tre radici di quell'equazione una è sempre negativa, il che permette di concludere che sono sempre possibili moti periodici del pianetino, per quanto i centri, intorno ai quali i movimenti si svolgono, non si possano generalmente considerare (come risulta dallo studio di un caso particolare) come posizioni di equilibrio stabile.

1. I punti S e J, colle masse 1 e μ, ruotano intorno al loro baricentro G nel piano ω con velocità angolare costante n. Assunta la distanza fra S e J come unità di misura per le lunghezze, indicheremo con $\boldsymbol{i}$ un vettore unitario parallelo a SJ, onde sarà:

$$\boldsymbol{i} = J - S.$$

(*) Il metodo e le notazioni sono quelle di Burali-Forti e Marcolongo, *Elementi di Calcolo vettoriale* (Bologna, Zanichelli, 1909); ediz. francese con aggiunte: *Calcul vectoriel* (Paris, Hermann, 1910); — *Omografie vettoriali* (Torino, Petrini, 1909).

Chiameremo inoltre $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$ due altri vettori unitarii, che formino con $\boldsymbol{i}$ una terna ortogonale e tali che $\boldsymbol{k}$ sia perpendicolare ad ω: supporremo $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ orientati come il pollice, l'indice ed il medio della mano sinistra. Ammettiamo infine che la rotazione di S e J intorno a G avvenga in ω nel senso orario.

Fra i punti S, J, G si hanno le relazioni:

$$(1) \quad (1+\mu)G = S + \mu J, \quad G - S = \frac{\mu}{1+\mu}\boldsymbol{i}, \quad G - J = -\frac{1}{1+\mu}\boldsymbol{i}.$$

I punti S e J si possono supporre legati fra loro rigidamente, ed allora non esiste alcuna relazione necessaria fra μ e n. Ma il moto rigido di S e J si può pure considerare come un possibile moto libero dei due punti sotto l'azione della mutua attrazione o ripulsione newtoniana, a condizione che sia $n^2 = 1+\mu$.

Difatti le equazioni del movimento di S e J sono in tal caso:

$$(2) \qquad S'' = \mu(J - S), \qquad J'' = S - J,$$

dalle quali segue:

$$S'' + \mu J'' = 0,$$

ed integrando:

$$S' + \mu J' = \boldsymbol{v}_0, \qquad S + \mu J = (1+\mu)G_0 + \boldsymbol{v}_0 t,$$

ove G_0 indica la posizione iniziale di G, e $\boldsymbol{v}_0$ è la sua velocità *costante*. Posto, in particolare, $\boldsymbol{v}_0 = 0$ (col che il sistema ruota intorno a G fisso), si soddisfa alle (2) prendendo:

$$S = G - \frac{1}{1+\mu}e^{int}\boldsymbol{a}, \qquad J = G + \frac{1}{1+\mu}e^{int}\boldsymbol{a},$$

dove con $\boldsymbol{a}$ si indichi un vettore unitario qualunque normale a $\boldsymbol{k}$, con i l'operatore $\boldsymbol{k}\wedge$, e si faccia $n^2 = 1+\mu$.

2. Sia P un punto dello spazio attratto o respinto da S e da J secondo la legge di Newton. I punti S e J si possono supporre legati rigidamente, ed allora la massa di P non ha alcuna influenza sulla rotazione che si fa loro compiere intorno a G,

oppure S e J sono liberi ($n^2 = 1 + \mu$), ed allora noi supporremo la massa di P talmente piccola da non influire sul loro moto.

Se indichiamo con r e ρ le distanze di P da S e da J, cioè poniamo:

$$r = \operatorname{mod}(P - S), \qquad \rho = \operatorname{mod}(P - J),$$

la funzione potenziale dell'azione che si esercita in P è:

$$V = \frac{1}{r} + \frac{\mu}{\rho},$$

ed il moto di P è definito dall'equazione:

$$P'' = \operatorname{grad}_P\left(\frac{1}{r} + \frac{\mu}{\rho}\right). \tag{3}$$

Volendo studiare il moto di P relativamente a quello di S e J rotanti nel piano ω intorno a G, chiameremo P_r' la sua velocità relativa, P_r'' e P_s'' risp. le sue accelerazioni relativa e di trascinamento. Il teorema di Coriolis (*) dà (poichè l'asse di rotazione del sistema è parallelo a $\boldsymbol{k}$ e la velocità angolare è n):

$$P'' = P_r'' + P_s'' + 2n\boldsymbol{k} \wedge P_r',$$

e si ha per note formole (**):

$$P_s'' = \operatorname{grad}_P \frac{n^2}{2} \{ (\boldsymbol{k} \times (P - G))^2 - (P - G)^2 \}.$$

Se adunque poniamo:

$$2w = n^2(P - G)^2 - n^2(\boldsymbol{k} \times (P - G))^2 + 2\left(\frac{1}{r} + \frac{\mu}{\rho}\right), \tag{4}$$

(*) Cfr. Maggi, *Sulle relazioni fondamentali del movimento relativo* (" Giorn. di Mat. ", vol. 49). — Burali-Forti, *Sul moto composto* (" Atti Acc. Sc. Torino ", 1911-12). Per la deduzione del teorema, l'essenziale è già contenuto in *Calcul vectoriel*, pp. 123-128.

(**) Cfr. Burali-Forti, Nota cit., form. (9). — Inoltre: Burali-Forti e Marcolongo, *Calcul vectoriel*, p. 127.

la (3) si trasforma in quest'altra, che è l'equazione del moto relativo di P:

$$P_r'' + 2n\mathbf{k} \wedge P_r' = \mathrm{grad}_P w . \tag{5}$$

Da questa moltiplicando scalarmente per P_r' si ricava senz'altro l'integrale di Jacobi:

$$P_r'^2 = 2w + \mathrm{cost.} \tag{5'}$$

Introducendo le coordinate cartesiane col porre:

$$P = G + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} ,$$

la (5) si spezza nelle equazioni trovate dal Burgatti al n. 3 della sua Nota; in particolare, qualora il punto P debba muoversi nel piano ω, si ottengono le notissime equazioni del problema ristretto dei tre corpi.

3. Vogliamo determinare i punti di equilibrio relativo al sistema $G\mathbf{ijk}$ (*centri di librazione*), cioè i punti P per i quali si ha:

$$\frac{dw}{dP} = 0 , \qquad \text{ossia} \qquad \mathrm{grad}_P w = 0. \tag{6}$$

Tenendo presente l'espressione (4) di w, la condizione (6) diventa:

$$n^2(P-G) - n^2\mathbf{k} \times (P-G) . \mathbf{k} - \frac{1}{r^3}(P-S) - \frac{\mu}{\rho^3}(P-J) = 0. \tag{7}$$

Di qui, moltiplicando i due membri per PSJ, e osservando che, per essere G, S, J allineati, si ha $GSJ = 0$, otteniamo:

$$\mathbf{k} \times (P-G) . PSJ\mathbf{k} = 0.$$

A questa si soddisfa annullando l'uno oppure l'altro dei due fattori $\mathbf{k} \times (P-G)$ e $PSJ\mathbf{k}$: *nel primo caso si ottengono dei punti* P *situati nel piano* ω, *nel secondo i punti* P *debbono stare nel piano* S J $\mathbf{k}$, *cioè nel piano perpendicolare ad* ω *passante per la retta* S J.

4. 1° caso: $k \times (P - G) = 0$.

La (7) diventa allora, quando se ne elimini G colla prima delle (1):

$$(8) \qquad \left(n^2 - \frac{1}{r^3} - \frac{\mu}{\rho^3}\right) P = \left(\frac{n^2}{1+\mu} - \frac{1}{r^3}\right) S + \mu \left(\frac{n^2}{1+\mu} - \frac{1}{\rho^3}\right) J.$$

Questa equazione è verificata col supporre nulli entrambi i coefficienti di S e di J, cioè

$$(9) \qquad r = \rho = \sqrt[3]{\frac{1+\mu}{n^2}},$$

poichè allora risulta nullo anche il coefficiente di P. Le (9) mostrano che si hanno due centri di librazione nel piano ω, vertici di due triangoli isosceli colla stessa base SJ. Se facciamo $n^2 = 1 + \mu$, quei due triangoli diventano equilateri.

I coefficienti di S e J siano invece entrambi diversi da zero (*). Il punto P è allora allineato con S e J, ed attribuendo un segno a r e ρ si può scrivere:

$$P = \rho S + r J, \qquad \text{con} \qquad r + \rho = 1.$$

Sostituendo P in (8), eguagliando separatamente a zero i coefficienti di S e di J nell'equazione che ne risulta, si ottengono due relazioni, che in virtù della $r + \rho = 1$ si riducono all'unica:

$$(10) \qquad \frac{n^2}{1+\mu} r - \frac{1}{r^2} = \mu \left(\frac{n^2}{1+\mu} \rho - \frac{1}{\rho^2}\right).$$

L'eliminazione di ρ condurrebbe ad un'equazione del 5° grado in r; essa ha almeno una radice reale, e quindi sulla retta SJ vi sarà in ogni caso almeno un centro di librazione; l'esistenza di altri centri dipenderà dai valori di n e di μ. Per $n^2 = 1 + \mu$ la (10) si riduce a quell'equazione in ρ che serve al Darwin per dimostrare l'esistenza di *tre* centri di librazione nel problema ristretto (**).

(*) L'ammettere che uno solo s'annulli equivale ad ammettere che P coincida con uno dei punti S e J, cosa che evidentemente va esclusa.

(**) Mem. cit., § 3, pp. 108-111.

5. 2° caso: $PSJ\boldsymbol{k} = 0$.

Chiamando Q i centri di librazione definiti da questa equazione, ed esprimendo Q colle coordinate cartesiane, come s'è già fatto al n. 2, potremo porre (poichè ora Q sta nel piano xz):

$$Q = G + x\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{k}.$$

Sostituendo nella (7) ed eliminando anche S e J colle (1), si trova la seguente equazione:

$$\left\{ n^2x - \frac{1}{r^3}\left(x + \frac{\mu}{1+\mu}\right) - \frac{\mu}{\rho^3}\left(x - \frac{1}{1+\mu}\right) \right\} \boldsymbol{i} - z\left(\frac{1}{r^3} + \frac{\mu}{\rho^3}\right)\boldsymbol{k} = 0;$$

dovendo essere nulli separatamente i coefficienti di $\boldsymbol{i}$ e di $\boldsymbol{k}$, ed escludendo l'ipotesi $z = 0$ che ci riporterebbe al 1° caso, si hanno infine fra le coordinate dei centri di librazione situati nel piano xz le due relazioni:

$$(11) \qquad \frac{1}{r^3} + \frac{\mu}{\rho^3} = 0, \qquad n^2x - \frac{1}{r^3} = 0.$$

La prima delle (11) non può verificarsi se non quando sia $\mu < 0$: *nel problema dei tre corpi studiato dal Burgatti non esistono dunque altri centri di librazione all'infuori di quelli che si presentano nel problema ristretto.*

Supponiamo $\mu < 0$, onde il sistema dei due punti S e J si potrà pensare costituito da due poli elettrici portanti cariche di segno opposto e di diversa grandezza. Vediamo se e quando le (11) definiscono realmente dei centri di librazione.

La prima delle (11), che si può anche scrivere:

$$\frac{\rho}{r} = \sqrt[3]{-\mu},$$

dice intanto che i punti cercati, se esistono, stanno sopra una circonferenza d'Apollonio relativa ai punti S e J (v. fig. 1ª). Essi saranno i punti Q comuni a questa circonferenza ed alla curva (algebrica) rappresentata dalla seconda (11) (*).

(*) È chiaro poi che se Q è un tale punto, se ne avrà un altro nel suo simmetrico Q' rispetto alla retta SJ.

Tenendo presente che le ascisse di S e di J rispetto a G sono:

$$-\frac{\mu}{1+\mu}, \qquad \frac{1}{1+\mu},$$

si avrà:

$$r^2 = \left(x + \frac{\mu}{1+\mu}\right)^2 + z^2, \qquad \rho^2 = \left(x - \frac{1}{1+\mu}\right)^2 + z^2;$$

fra le (11), quando sian ridotte a forma razionale, si elimina facilmente la z, e si giunge ad una equazione molto semplice nella sola x, che è la seguente:

$$x^2(x - \lambda)^3 = k, \tag{12}$$

dove s'è posto per brevità:

$$\lambda = \frac{1}{2}\,\frac{1-\mu}{1+\mu}, \qquad k = \frac{\mu^2(1-\nu^4)}{8\nu^4 n^4}, \qquad \nu^2 = \sqrt[3]{-\mu}. \tag{12'}$$

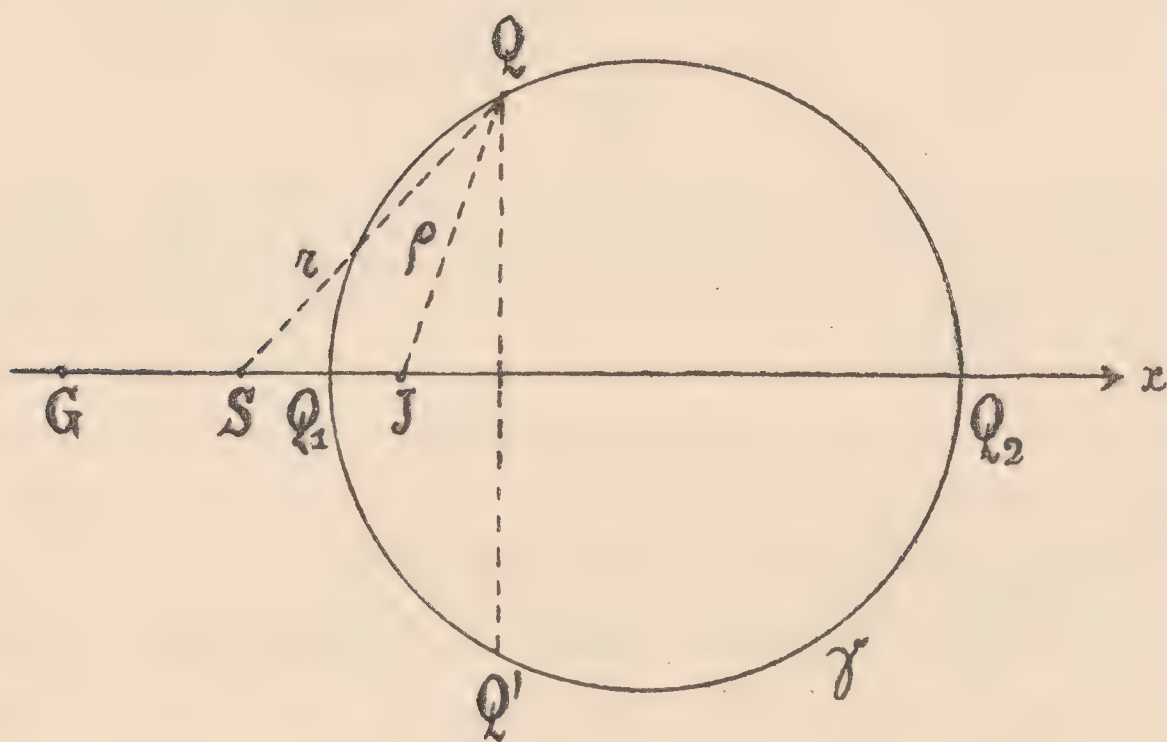



Fig. 1.

Quanto a z, essa si esprime in funzione di x mediante l'equazione:

$$z^2 = -x^2 + \frac{2(1-\nu^{10})}{(1-\nu^6)(1-\nu^4)}\,x - \frac{(1+\nu^8)(1+\nu^4)}{(1-\nu^6)^2}, \tag{13}$$

e per la realità del punto Q occorrerà in primo luogo che questa equazione fornisca per z^2 valori positivi; bisognerà quindi che x sia compreso fra i valori:

$$x_1 = \frac{1+\nu^8}{(1+\nu^2)(1-\nu^6)}, \qquad x_2 = \frac{1-\nu^8}{(1-\nu^2)(1-\nu^6)}, \tag{14}$$

radici dell'equazione di 2° grado in x:

$$z^2(x) = 0,$$

ed ascisse dei punti Q_1 e Q_2 in cui la retta SJ incontra la circonferenza γ.

Le (14) dànno per x_1 e x_2 valori positivi o negativi secondochè $\nu^2 \lesseqgtr 1$; d'altra parte la seconda (11) mostra che x deve essere positiva: *ne segue, per la realità dei punti* Q, *che è necessario supporre* $\nu^2 < 1$ o, che è lo stesso, $|\mu| < 1$. La circonferenza γ comprenderà quindi nel suo interno il punto J, *cioè il punto di massa minore in modulo*, lasciando all'esterno S, *ossia il punto di massa maggiore*: è questo d'altronde il vero significato da attribuirsi alla condizione enunciata, poichè se noi invertiamo il senso positivo sull'asse x, la seconda (11) fornisce per x valori negativi, e quindi bisogna supporre $|\mu| > 1$; ma allora il baricentro G si porta sul prolungamento di SJ dalla parte di J. La fig. 1 è disegnata nell'ipotesi $|\mu| < 1$.

6. Si tratta ora di vedere se la (12) ha delle radici reali comprese fra x_1 e x_2, e quante sono. Consideriamo perciò la curva del 5° ordine:

$$y = x^2(x - \lambda)^3. \tag{15}$$

Essa incontra l'asse x in $x = 0$ e $x = \lambda$, ed in entrambi questi punti ha per tangente l'asse x; nel secondo anzi l'asse x è tangente d'inflessione. Per $x = \pm\infty$ si ha in corrispondenza $y = \pm\infty$. La $\frac{dy}{dx}$ si annulla, oltrechè in $x = 0$ e $x = \lambda$, ancora in $x = \frac{2}{5}\lambda$. La forma della curva è dunque quale mostra la fig. 2ª. Dalle (12') e (14) si ricava poi:

$$x_1 - \lambda = \frac{1-\nu^2}{2(1+\nu^2)} > 0, \qquad x_2 - \lambda = \frac{1+\nu^2}{2(1-\nu^2)} > 0,$$

$$x_2 - x_1 = \frac{2\nu^2}{1-\nu^4} > 0,$$

per cui i punti $0, \lambda, x_1, x_2$ si susseguono sull'asse x nell'ordine ora scritto.

La curva (15) fu disegnata (salvo qualche ritocco nelle dimensioni affinchè ne risultasse una figura più chiara) per $\mu = -0,5$ e prendendo come unità di misura 2 cm.

Le radici reali della (12) si otterranno dalla fig. 2ª tagliando la curva con una retta parallela ad x, di ordinata $y = k$. Si vede così che le radici reali *distinte* sono (a seconda del valore

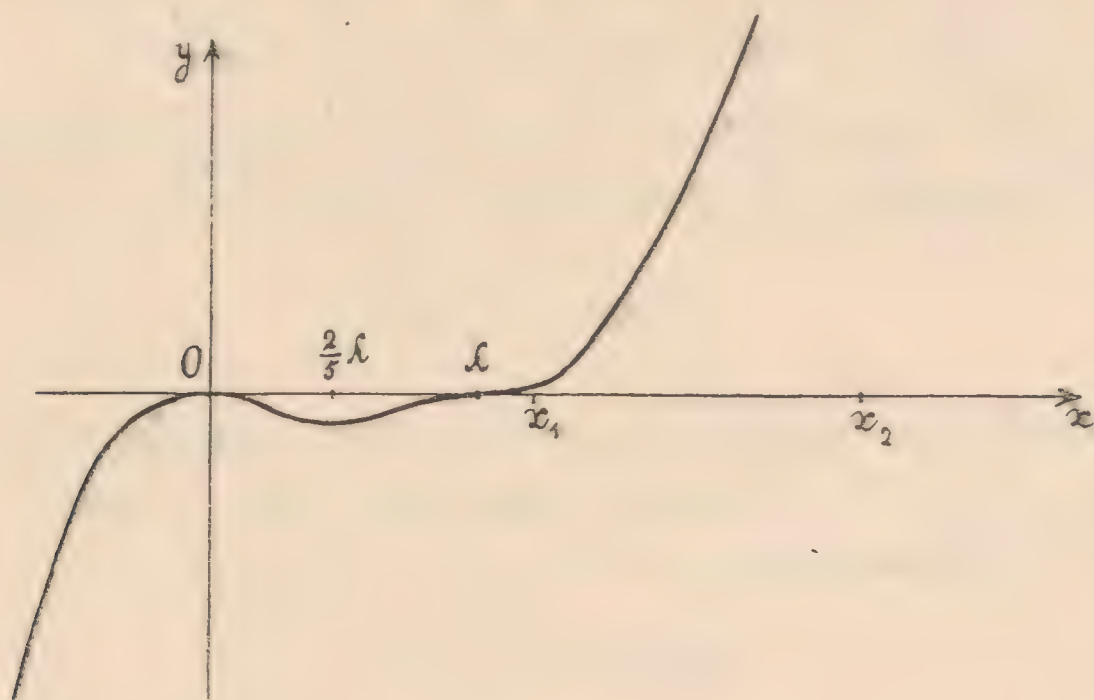



Fig. 2.

di k) una o due o tre. In particolare le radici comprese fra x_1 e x_2 (cioè quelle che a noi interessano) si riducono in ogni caso ad una sola. Osservando dunque che k dipende dalla velocità angolare n [v. la seconda (12′)], possiamo concludere che *i centri di librazione cercati sono due, simmetrici rispetto al piano* ω, *a condizione che la velocità angolare del moto rotatorio di* S *e* J *intorno a* G *sia compresa fra i valori* n_1 *e* n_2 *dati dalle formole:*

$$(16) \qquad n_1^2 = \nu^4 \frac{(1-\nu^6)(1+\nu^2)^3}{(1+\nu^8)(1-\nu^2)}, \qquad n_2^2 = \nu^4 \frac{(1-\nu^6)(1-\nu^2)^3}{(1-\nu^8)(1+\nu^2)};$$

n_1 e n_2 sono i valori di n che corrispondono a x_1 e x_2 in virtù della (12): come si vede, essi dipendono da μ.

Nel moto libero di S e J sotto l'azione della mutua ripulsione newtoniana dev'essere, come sappiamo, $n^2 = 1 - \nu^6$; bisognerà dunque verificare se questo valore di n è compreso fra n_1 e n_2. Ora si vede che $1 - \nu^6$ cade nell' intervallo voluto, purchè ν^2 o, che fa lo stesso, $|\mu|$ sia abbastanza prossimo ad 1; a tali valori di μ corrisponderanno velocità angolari n abbastanza piccole.

7. È noto il modo di comportarsi del movimento nell' intorno dei centri di librazione situati nel piano ω, almeno nell'ipotesi $\mu > 0$ e $n^2 = 1 + \mu$. Senza pretendere di risolvere completamente la questione, possiamo tuttavia cercare di fare qualche cosa di simile pei centri che appartengono al piano $SJ\boldsymbol{k}$ perpendicolare al precedente; possiamo esaminare cioè l'andamento del moto nelle vicinanze dei centri in questione; in particolare, ricercare se vi siano movimenti periodici.

Chiamando Q, come si fece al n. 5, uno qualunque dei due centri di librazione che stanno nel piano $SJ\boldsymbol{k}$, e posto:

$$P = Q + \boldsymbol{u},$$

ove $\boldsymbol{u}$ indichi un vettore di modulo così piccolo che se ne possano trascurare le potenze superiori alla prima, si otterrà dalla (5), coll'osservare che è:

$$(\mathrm{grad}_P w)_{P=Q} = 0,$$

l'equazione seguente:

$$\boldsymbol{u}_r'' + 2n\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{u}_r' = \left(\frac{d\,\mathrm{grad}_P w}{dP}\right)_{P=Q} . \boldsymbol{u} . \tag{17}$$

Questa, col porre (*):

$$\boldsymbol{u} = \xi \boldsymbol{i} + \eta \boldsymbol{j} + \zeta \boldsymbol{k},$$

(*) L'introduzione delle coordinate cartesiane ha unicamente per iscopo di presentare delle formole più famigliari alla generalità dei lettori. Ma il calcolo si può svolgere completamente facendo uso delle omografie vettoriali. Posto difatti:

$$\theta = \left(\frac{d\,\mathrm{grad}_P w}{dP}\right)_{P=Q},$$

si può in primo luogo avere l'omografia θ sotto forma esplicita. Si trova cioè:

$$\mathrm{grad}_P w = -(n\boldsymbol{k} \wedge)^2 (P - G) - \left\{ \frac{1}{r^3}(P - S) + \frac{1}{\rho^3}(P - J) \right\};$$

poi utilizzando la (11) pag. 53 delle già citate *Omografie vettoriali* di Burali-Forti e Marcolongo, ed introducendo l'omografia H ivi definita a pag. 20:

$$\frac{d\,\mathrm{grad}_P w}{dP} = 3\left\{ \frac{1}{r^5} H(P - S, P - S) + \frac{\mu}{\rho^5} H(P - J, P - J) \right\} -$$
$$- \left(\frac{1}{r^3} + \frac{\mu}{\rho^3} \right) - (n\boldsymbol{k} \wedge)^2;$$

si spezza nelle tre *equazioni alle variazioni* (*):

$$(17') \quad \left\{ \begin{aligned} \xi'' - 2n\eta' &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\xi + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\eta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\zeta \\ \eta'' + 2n\xi' &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\xi + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\eta + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\zeta \\ \zeta'' \qquad &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z}\xi + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z}\eta + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\zeta, \end{aligned} \right.$$

nelle quali le derivate seconde di w (calcolate, naturalmente, nel punto Q) hanno, in virtù delle (11), i seguenti valori:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = n^2 - 3z^2\left(\frac{1}{r^5} + \frac{\mu}{\rho^5}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = n^2$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 3z^2\left(\frac{1}{r^5} + \frac{\mu}{\rho^5}\right)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 3z\left\{x\left(\frac{1}{r^5} + \frac{\mu}{\rho^5}\right) + \frac{\mu}{1+\mu}\left(\frac{1}{r^5} - \frac{\mu}{\rho^5}\right)\right\}.$$

(Segue nota pag. prec.).

per cui, tenendo conto delle (11) che definiscono i punti Q:

$$\theta = 3n^2x\left\{H(P-S,\, P-S) - H(P-J,\, P-J)\right\} - (n\boldsymbol{k}\wedge)^2.$$

Posto poi:

$$\boldsymbol{u} = e^{\alpha t}\boldsymbol{v},$$

dove α e $\boldsymbol{v}$ indicano risp. un numero ed un vettore costanti nel moto relativo, la (17) dà:

$$(\alpha^2 + 2n\alpha\boldsymbol{k}\wedge - \theta)\boldsymbol{v} = 0;$$

questa dice che l'omografia $\alpha^2 + 2n\alpha\boldsymbol{k}\wedge - \theta$ è degenere, per cui dovrà verificare la condizione:

$$I_3(\alpha^2 + 2n\alpha\boldsymbol{k}\wedge - \theta) = 0$$

(cfr. i n.[i] 1, 2 di *Omogr. vett.*). Il primo membro si sviluppa coll' aiuto della (4) pag. 104 delle stesse *Omogr. vett.*, e si trova infine per α l'equazione di 6° grado:

$$\alpha^6 - (I_1\theta + 4n^2)\alpha^4 + (I_2\theta + 4n^2\boldsymbol{k}\times\theta\boldsymbol{k})\alpha^2 - I_3\theta = 0,$$

la quale, col successivo calcolo dei coefficienti, si riduce infine alla (18) trovata più innanzi nel testo.

(*) Per lo sviluppo del 2° membro della (17) v. *Omogr. vett.*, pag. 53, form. (12).

Si indichino allora con A, B, C, α quattro costanti, e si ponga:

$$\xi = Ae^{\alpha t}, \qquad \eta = Be^{\alpha t}, \qquad \zeta = Ce^{\alpha t};$$

sostituendo nelle (17′) ed eliminando A, B, C dalle equazioni che ne risultano, si ottiene infine un'equazione del 6° grado in α, nella quale compaiono soltanto le potenze pari di α, e che possiamo scrivere, ponendo $\alpha^2 = \beta$:

$$(18) \qquad \beta^3 + 2a\beta^2 + b\beta + c = 0 \ (^*).$$

Ai coefficienti a, b, c si possono dare, dopo alcune trasformazioni, le espressioni seguenti:

$$(19) \qquad \begin{cases} a = n^2 \\ b = n^4(1 + 6X - XX') \\ c = n^6 X(2 + X'), \end{cases}$$

essendo:

$$(19') \qquad X = H^2 \frac{xz^2}{x-\lambda}, \qquad X' = 4H^2 \frac{x}{x-\lambda} (z^2 + (x-\lambda')^2)$$

$$H^2 = \frac{3}{4} \frac{(1-\nu^4)^2}{\nu^4}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \frac{1+\nu^6}{1-\nu^6}, \quad \lambda' = \frac{1-\nu^{10}}{(1-\nu^6)(1-\nu^4)} = \frac{x_1+x_2}{2}.$$

8. La natura del moto nell'intorno di Q dipenderà dalla natura delle radici della (18), cioè dai coefficienti abc.

(*) I sei valori di α forniti da questa equazione sono gli *esponenti caratteristici* di Poincaré (Cfr. *Les nouvelles méthodes de la Mécanique céleste*; t. I, chap. IV). Dalla teoria generale risulta che nell'equazione in α devono mancare i termini colle potenze dispari (Op. cit., id., n. 69). In sostanza la teoria di Poincaré sui moti prossimi ad un moto periodico si può trasportare al caso dei moti prossimi a posizioni di equilibrio, in quanto che una posizione di equilibrio si può considerare come caso limite di un moto periodico. La presenza dell'integrale (5′) di Jacobi (uniforme e non contenente esplicitamente il tempo) non significa però che la (18) debba avere una radice nulla; perchè se l'equazione (5) del moto relativo di P vien trasformata in un sistema canonico, e diciamo allora $F =$ cost. l'integrale (5′), sono nulle, in corrispondenza alle considerate configurazioni d'equilibrio, le derivate prime di F rispetto a tutte le variabili da cui dipende (Cfr. Poincaré, Op. cit., n. 70).

A noi importa sopratutto di constatare se siano o no possibili, intorno a Q, dei moti periodici. Ora, dalla discussione dei n.[i] 5 e 6 risulta:

$$x > 0, \qquad x - \lambda > 0,$$

e quindi:

$$X > 0, \qquad X' > 0.$$

Ne segue che a e c sono sempre positivi, qualunque sia la posizione di Q sulla circonferenza γ. Ma da $c > 0$ si deduce che il prodotto delle tre radici della (18) è necessariamente negativo, e perciò una radice almeno è negativa. *A questa radice negativa corrispondono moti, prossimi a* Q, *periodici.* Le rimanenti due radici saranno: o entrambe negative, o entrambe positive, o complesse coniugate. Nel primo caso il punto Q ha il carattere di posizione di equilibrio (relativo) stabile. Altrimenti, vi potranno essere, accanto ai moti periodici già segnalati, dei moti assintotici a Q, ed altri che tendono ad allontanare il pianetino P da Q.

Sarà bene accertare, almeno in un caso particolare, la presenza di queste altre soluzioni, affinchè non rimanga il dubbio che ai punti Q competa sempre il carattere della stabilità.

Facciamo $x = \lambda'$. I punti Q e Q' (v. fig. 1ª) saranno situati all'estremità del diametro di γ perpendicolare alla retta x. Dalle (19′) si ha: $X' = 4X$, e quindi:

$$a = n^2, \; b = n^4(1 + 6X - 4X^2), \; c = 2n^6 X(1 + 2X).$$

Dando alla (18) la forma:

$$\epsilon^3 + p\epsilon + q = 0,$$

si trovano per p e q i valori:

$$p = -\frac{n^4}{3}(1 - 18X + 12X^2)$$

$$q = -\frac{2n^6}{27}(1 + 27X - 90X^2),$$

da cui:

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = n^{12}X(4 - 27X + 84X^2 - 148X^3 + 288X^4 - 64X^5). \tag{20}$$

Si ha d'altra parte, per $x = \lambda'$:

$$z^2 = \frac{\nu^4}{(1-\nu^4)^2}, \qquad X = \frac{3}{2}\,\frac{1-\nu^{10}}{(1+\nu^4)(1-\nu^6)},$$

e ν^2 dev'essere compreso fra 0 e 1. A questi valori estremi di ν^2 corrispondono per X i valori $\frac{3}{2}$ e $\frac{5}{4}$. Ora tanto l'uno quanto l'altro di questi due valori, sostituiti nel secondo membro della (20), rendono $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ positivo.

Dunque: *quando il punto* Q *si trova nella posizione che s'è detto (od in posizioni abbastanza prossime), e la massa di* J *è sufficientemente vicina ad uno dei suoi valori estremi (cioè* 0 *opp.* — 1*), la* (18) *ha, oltre alla radice negativa, due radici complesse.*

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 21 Aprile 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. BARONE ANTONIO MANNO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Carle, Renier, Pizzi, Chironi, Ruffini, Stampini, Brondi, Einaudi, Baudi di Vesme, e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza del presidente Boselli.

Leggesi l'atto verbale dell'adunanza precedente, 31 marzo 1912.

Il Socio Chironi prende la parola sul verbale per dichiarare di associarsi a quanto disse il collega Ruffini commemorando il Socio straniero Raimondo Saleilles; e si riserva di presentare egli stesso un cenno commemorativo circa il Saleilles da inserirsi negli *Atti*. Il Presidente lo ringrazia del proposito da lui espresso. Dopo di che il verbale precedente è approvato.

Il Socio Brondi offre con parole di encomio lo scritto dell'avv. Francesco Gautero, *Giustizia e proprietà fondiaria in Tunisia ed Algeria*. Relazione a S. E. il Ministro di Grazia e Giustizia (Tip. delle Mantellate, Roma, 1912), rilevando la importanza che il lavoro ha sia nel rispetto teorico per la conoscenza del diritto mussulmano, sia nel rispetto pratico per l'ordinamento avvenire della nostra nuova colonia. Le parole del Brondi sono inserite negli *Atti*.

Il Socio Ruffini presenta in omaggio all'Accademia il suo libro su *La giovinezza del Conte di Cavour* (2 vol., Torino, Bocca, 1912) accennando brevemente ai nuovi documenti da lui messi alla luce. Le parole del Ruffini porgono occasione ai soci Carle

e Baudi di Vesme di soffermarsi sopra alcuni punti della storia della giovinezza del Cavour.

Per l'inserzione negli *Atti* vengono presentate le seguenti note:

dal Socio Renier, *Piemontese " burenfi " e famiglia* del Prof. Attilio Levi;

dal Socio Chironi, *L'estetica degli Alessandrini* del Dr. Cesare Travaglio;

dal Socio Einaudi, *Di una proprietà generale della ofelimità* del Dr. Gino Borgatta;

dal Socio De Sanctis, *Epicvrea* del Dr. Ettore Bignone.

Poi il Socio Einaudi legge la Relazione sulla monografia del Prof. Giuseppe Prato, *Il problema del combustibile nel periodo pre-rivoluzionario come fattore della distribuzione topografica delle industrie*, intorno a cui fu incaricato insieme col Socio Ruffini di riferire alla Classe.

La Classe approva la Relazione con voto unanime e poi, presa cognizione della Monografia del Prato, ne delibera con pienezza di voti segreti la inserzione nelle *Memorie* accademiche.

LETTURE

Cenno sull'opera dell'avv. Francesco Gautero, *Giustizia e Proprietà fondiaria in Tunisia ed Algeria* (*).

Nota del Socio VITTORIO BRONDI.

L'opera dell'avvocato Francesco Gautero è una relazione al nostro Ministro di Grazia, Giustizia e Culti circa il funzionamento della giustizia e l'ordinamento della proprietà fondiaria nelle due terre africane, su cui si estende l'impero della Francia nella duplice forma del protettorato e della sovranità assoluta. Essa, come tale, non ha pretese dottrinali e scientifiche, ma, sulle basi del diritto vigente nei due paesi, tende ad esporre il funzionamento pratico dei varii istituti, ai quali l'indagine è rivolta; e sotto questo aspetto i risultati che l'autore ha ottenuto, mentre ci presentano il quadro fedele di una interessante vita giuridica, ricca di elementi svariati e complessi, possono fornire preziosi materiali ed utili ammaestramenti per il futuro ordinamento della nostra Libia, che in alcune parti ha comuni con la confinante Tunisia tratti e problemi.

Uno di questi, per rifarci a qualche esempio dei più notevoli, è fornito dall'istituto così caratteristico della legislazione musulmana del *vakf* o *habous*; il quale, prescindendo dai dubbi e dalle dispute che intorno al medesimo si addensano (1), nella sua nozione più semplice ed essenziale consiste nella destinazione di un bene a scopo sacro per atto del proprietario disponente, in modo che, mentre la proprietà rimane subito vincolata a detto

(*) Roma, Tipografia delle Mantellate, 1912.

(1) Cfr. l'ampia trattazione del Clavel, *Le vakf ou habous, d'après la doctrine et la jurisprudence*, 2 voll., Le Caire, 1896.

scopo mediante la sua attribuzione ad un ente morale religioso, vi giunga anche in perpetuo l'usufrutto, sia immediatamente, sia anche mediatamente, attraverso ad una serie di persone successive designate dal disponente; le quali persone intanto godranno l'usufrutto secondo l'ordine stabilito, finchè esso venga, in tempo più o meno lontano, devoluto per lo scopo sacro all'ente pio, ultimo destinatario.

La diffusione di questo istituto, sorto per motivi essenzialmente religiosi e favorito da speciali cause politiche, sociali e famigliari, fu larghissima in tutto il mondo musulmano; ed essa, mentre dal lato giuridico rende inalienabili, imprescrittibili e sottratti alla comune legge successoria una quantità grandissima di beni immobili, influisce sinistramente dal lato economico sulla messa in valore di questi beni posti fuori di commercio e sulla rendita, di cui essi sono virtualmente suscettibili.

L'avere in Algeria per fini di sana economia sociale tolto bruscamente il carattere di inalienabilità ai medesimi fu annoverato fra le cause, e non fra le minori, delle grandi e lunghe ostilità, che la Francia vi incontrò e vi dovette superare; onde questa, trovatasi di fronte allo stesso problema in Tunisia, agì con prudente avvedutezza e seppe ottenere lo scopo di fare entrare quei beni nel circolo fecondo della vita commerciale e della intensa coltivazione agricola, senza offendere il sentire indigeno avente larghe e profonde radici.

A tale intento venne promossa e favorita l'applicazione di speciali contratti permessi dalla stessa legislazione coranica, per cui in via indiretta si possono eliminare i dannosi effetti della incommerciabilità; tali sarebbero il cambio del bene in natura e in denaro, la sua concessione ad una specie di affitto perpetuo (*enzel*) e il particolare contratto avente per contenuto il dissodamento e la piantagione ad alberi di un terreno improduttivo, col conseguente effetto del ritorno in commercio di una parte di esso (contratto di *megharsa*).

Fu con questi mezzi che si giunse ad un felice sfruttamento di terreni, come ad esempio e in particolar modo, nella provincia di Sfax, attualmente trasformata da plaga incolta in una delle più floride della Tunisia. Ora, all'autore venne asserito che i beni in eguale condizione giuridica, dipendente dalla destinazione a scopo sacro, costituiscono una parte assai ragguardevole

del suolo della Tripolitania e che in questa moltissimi terreni sono del tutto simili a quelli di Sfax; dato ciò, non è chi non veda come possa per noi essere utile il tener conto dell'esperienza francese, quando verrà l'ora della nostra effettiva colonizzazione. E così, altri punti di utilità pratica si potrebbero richiamare.

Ma indipendentemente da ciò il libro può anche considerarsi come contributo alla costituzione di un giovane ramo della nostra scienza del diritto, che viene affermando ogni giorno sempre più la sua individualità e importanza, il diritto coloniale. Per questo si è manifestato da ultimo pur fra di noi, e quasi eco della vigorosa e gloriosa affermazione della coscienza nazionale, un largo interesse e un vivo fervore di studi, con istituti, collegi scientifici, pubblicazioni, riviste periodiche. Si tratta soltanto dell'inizio di una elaborazione scientifica, pur tuttavia promettente, e nello stadio iniziale in cui ci troviamo anche una semplice raccolta di materiali trova il suo posto e il suo ufficio: quello di preparare gli elementi indispensabili e di apprestare i mezzi necessari per giungere a quella mèta ideale, in cui si fondono il preciso rigore della teoria e la pienezza di contenuto del sistema.

Piem. “ burenfi ” e famiglia.

Nota di ATTILIO LEVI.

Avvertenze.

Dizionarî: siciliano (Traina), veneziano (Boerio), genovese (Casaccia), bresciano (Melchiori, Rosa), comasco (Monti), milanese (Cherubini), piemontese (Gavuzzi) — francese (Godefroy, *Dict. général*), fr. centrale (Jaubert), Poitou (Levrier), Fiandra fr. (Vermesse), Saintonge (Jonain), Savoia (Constantin-Desormaux), Svizzera romanza (Bridel), Provenza (Levy, Mistral) — spagnuolo (Accademia), portoghese (Figueiredo), catalano (Labernia) — rumeno (Tiktin, Damé, Pușcariu) — ladino (Pallioppi).

Abbreviazioni: A = Archivio glottologico italiano — C = Caix, Studî — D = Diez, Etym. Wörterbuch, 5ª ed. — K = Körting, Lat.-rom. Wörterb., 3ª ed. — M = Mussafia, Denkschriften Akad. Wien, vol. XXII. — ML = Meyer-Lübke, Rom. etym. Wörterb. — N = Nyrop, Grammaire française — RG = Meyer-Lübke, Gramm. d. rom. Sprachen — R = Romania. — Z = Zeitschrift f. rom. Philologie. De' quali C. K. e ML son citati per numero, gli altri tutti per pagina. E sono seguite da una di codeste sigle le voci, che non potei riscontrare altrove.

Trascrizione. Seguo di regola quella delle mie fonti: però all'*u* (aperto) e all'*ü* (chiuso) delle voci piemontesi qui addotte corrispondono rispettivamente *o* ed *u* ne' dizionari del dialetto.

I. Accompagnato da una variante *butenfi* a me ed a quanti interrogai ignota, piem. *burenfi* “ gonfio „ ha stretta affinità col lomb. *besenfi* “ id. „, il prov. *boudenflá* “ gonfiare „, il franc. *boursoufler* “ id. „: appartiene cioè a quella grande famiglia lessicale, che con forme varie e varie sfumature di senso esprime essenzialmente il concetto della gonfiezza, e che manda bensì qualche propaggine isolata ad ovest fin nelle Spagne e ad est fino in Rumenia, ma ha il suo nucleo principale nell'Italia superiore e nelle Gallie.

Ora, appunto codesta famiglia mi propongo d'illustrare, tenendo (beninteso) nel debito conto le indagini precedenti: cfr. D. 529. 785. M. 135 nota. A. II. 326 sg. C. 241. K. 1484. Z. XXVIII. 8. Miscellanea Ascoli, 549 sg.

II. A parer mio, in sostanza qui si hanno semplicemente ed esclusivamente due verbi latini: **bis-inflare* e **bis-sufflare.*

Di essi però nella veste originaria si riscontra una sola forma, e cioè **bis-influ*, participio " accorciato ", che (come it. *gonfio, tronfio*) divenne ben presto aggettivo, e si ha in com. *besenfi* — mil. cremon. *besinfi*, crem. *bezenfe* (M.) — bresc. bergam. *bezenf* — padov. *besenfio* (M.) — gen. *bezinscio* " gonfio ". [E qui sembrerebbe da recapitarsi il *Bisenzio*, affluente di destra dell'Arno, se non facesse difficoltà *-zi-* = *-fl-* in Toscana].

Ma all'infuori di questa forma tutte l'altre qui pertinenti presentano alterazioni più o meno profonde, di cui queste a me paiono le cause e le fasi.

III. Anzitutto, numerose voci fanno supporre che accanto a **bis-inflare* e **bis-sufflare* siano sorti **bis-unflare* e **bis-sifflare.*

Ma pel primo sembra che l'alterazione sia avvenuta indipendentemente dal prefisso *bis*, e che già *inflare* di per sè stesso sia stato per analogia di *conflare* rifatto in un volgare **onflare*, di cui si ha chiara traccia in fr. *ronfler* e tosc. *tronfiare*: cfr. C. 51, K. 3842. 7920, ML. 4405.

Invece per **bis-sīfflare* (il quale dovette sorgere per l'azione, che sopra *sufflare* esercitò l'analogia fonetica e logica con **sīflare*, forma sincopata di *sifilare* = *sibilare*) non v'ha alcun indizio di formazione indipendente dal prefisso *bis.* Al contrario pare che prefisso e verbo si siano strettamente congiunti e che, naturalmente non potendo i parlanti in un **bissīflare* distinguere l'*s* proprio del prefisso da quello pertinente al verbo, ne sia sorta l'illusione d'un verbo **īfflare* per sè stante.

Siccome poi forse già in latino, e certamente in alcuni idiomi romanzi un nesso *-nf-* perde la nasale (cfr. RG. I. 408 sg.), pe' volgari **enflare*, **onflare* ne conseguì che accanto alle forme semidotte, che conservarono l'*n*, ne sorsero delle popolari, che n'eran prive, e cioè **efflare*, **offlare.*

E poichè nelle parlate galliche e gallo-italiche è largamente diffuso il verbo onomatopeico **buffare* vuoi nel senso di " soffiare, gonfiare " vuoi in quello di " mangiare avidamente " (cfr. ML. 1373), grazie alle affinità fonetiche e logiche di esso *buffare* con codesti verbi ne conseguì un ulteriore lor rifacimento, e cioè la terminazione *-flare* venne mutata in *-fare.*

Dunque accanto a *bis-inflare* e *bissuflare* crediamo di poter postulare le seguenti neoformazioni: 1. *onflare*, *īflare*; 2. *offlare*, *efflare*; 3. *offare*, *effare*, *īffare*. Di cui le prime due son generali, l'altre particolari.

IV. Quando in Italia e nelle Gallie il prefisso *bis* si mutò in *ber-*, *bar-*, *ba-*, necessariamente sorsero varianti de' verbi succitati: anzi teoricamente si può ritenere che le varianti fossero tante, quante erano le forme nuove del prefisso e le forme antiche e nuove de' due verbi: e cioè **ber-*, *bar-*, *ba-* + *enflare*, *sufflare*, *onflare*, *īflare*, *efflare*, *offlare*, *effare*, *offare*, *īffare*.

Ma anche di queste voci nuove ne rimasero immutate ben poche, e più precisamente:

1. **ba-sufflare*, che assunse il significato di " mangiare " (perchè mangiando da taluno si soffia oltremodo e si gonfian le gote) e si ha nel gen. *basoffiá* " mangiare " (M): donde il posverbale mil. com. bologn. it. spagn. port. *bazofia* " minestra " e i derivati mil. *sbasoffión*, *sbasoffiótt* " mangione " (M.), it. *sbasoffiata* " mangiata " (M.), nonchè it. *basoffione*, mil. com. *bazofi*, friul. *bazofio* " uom grasso e panciuto ", prov. *basofi* " stolido ".

2. **ba-inflare*, che a parer mio si ha in piem. *banfé* " ansare, fiatare ". In cui *a* corrisponde ad *ĭ*, perchè nel ns. dialetto lat. *ĭ* atono davanti ad *n* complicato si risolve in *a*: cfr. piem. *tranfié* " ansare " da **tr*(*a*)-*inflare* (donde tosc. *trenfiare*: vedi C. 51. A. xv. 219 sg. K. 3842). Che se all'uscita presenta *-fé* anzichè *-fié*, come dovrebbe, l'irregolar terminazione deriverà da influsso di piem. *büfé* " ansare " (= *buffare*, di cui sopra), come su *banfé* medesimo sarà stato rifatto piem. *runfé* " russare " (cfr. tosc. *ronfiare*, fr. *ronfler* e v. C. 51, K. 7920).

E codesto verbo lo si ha poi ancora in mil. com. *banfá*: ma, se m'appongo al vero, a causa dell'*a* (= lat. *i*) in Lombardia dovrà dirsi un piemontesismo (Altrimenti ML. 932).

V. Dipoi fra le varianti romanze di detti verbi avvennero incrocî, e furono di due maniere:

1. S'incrociarono i prefissi: es. pad. *basenfio* (M.), in cui *bas* = *bis* + *ba*.

2. S'incrociarono le forme intiere: es. com. *bazonfi* = *besenfi* + *bazofi*.

VI. Il prefisso *bis* (romanzo *bes*, *ber*, *bar*, *ba*) si modificò ulteriormente per quella tendenza a diventar labiale, che ha

vocale d'altro timbro, ove sia preceduta o seguita da cons. labiale. Tendenza, che si manifesta particolarmente nelle vocali palatali: onde si spiega che delle neoformazioni, di cui qui si tratta, siano rimaste intatte soltanto alcune, in cui il prefisso assunse la forma *ba*, e cioè i sullodati **basufflare* e **bainflare.*

Ma codesta labializzazione di rado s'effettua di per sè sola: altrimenti si avvererebbe con maggiore frequenza e costanza. Bisogna invece che l'agevoli e l'assecondi una spinta fonetica od una spinta analogica, ovvero che concorrano entrambe (cfr. N. I². 234).

Orbene qui non mancarono nè l'una nè l'altra.

VII. La spinta fonetica. Nel corpo della parola una vocale inclina ad assimilarsi alla vocal seguente, sopratutto se essa sia atona e l'altra sia (sempre o spesso) tonica. Così qui s'aveva l'impulso alla labializzazione della vocale di *bes* (*ber*), quando questo era prefisso a *sufflare*, **onflare*, **offlare*, **offare.*

VIII. La spinta analogica. Raramente altrove l'analogia esercitò la sua azione con tanta intensità e larghezza.

Codesti verbi significano tutti a un dipresso " gonfiare „: orbene furono innestate sul lor prefisso quante voci ad un tempo ed hanno con esso qualche somiglianza di suono e designano cose gonfie e rotonde o sostanze atte a produrre rotondità e gonfiezza. E ne risultò una schiera quasi innumerevole di vocaboli nuovi, che si possono dividere in due categorie.

IX. L'una (che secondo ogni verosimiglianza anche cronologicamente è la prima) comprende le formazioni, in cui l'analogia altro non fece che favorire la labializzazione della vocal del prefisso. E qui abbiamo:

1. grazie a rum. *buza* " labbro „ (in quanto che facendo il broncio si protendon le labbra, e quindi la bocca presenta certa rotondità e gonfiezza) il rum. *buzumflá* " fare il broncio „ (colle varianti *boz-*, *bos-*, *bors-*, *burs-*: cfr. Tiktin. 215. Pușcariu. I. 21). Da **bisunflare.*

2. grazie a lat. *burra* " borra „ (la materia, con cui s'imbottiscono mobili ed oggetti varî) piem. *burenfi* " gonfio „ (da cui deriva piem. *burenfié* " gonfiare „, poichè, se fosse primitivo, avrebbe *a*, non *e*, dinanzi ad *n*: v. sopra IV. 2) — valdost. *borenflo* e *borenflé*, gin. *bourenfle*, borg. *boranfle* (Z. XXVIII. 8) —

svizz. rom. *boreinflo* " id. „. [Nelle quali forme il divario *bou-*: *bo-* forse è soltanto grafico]. Da **berinflare.*

3. grazie al volg. *bursa* " tasca di cuoio o stoffa „ (che suggerisce l'idea della gonfiezza, allorchè è piena) il fr. *boursoufler* " gonfiare „. Da **bersufflare.*

4. grazie al sinonimo pur bologn. *budeinfi* (su cui vedi sotto XIX, 1) il bol. *buzeinfi* " gonfio „ col derivato *buzinfión* (var. *sbuzinfión*). Da **bisinflu.*

X. L'altra categoria comprende voci, in cui il prefisso presenta un'alterazione assai più profonda e tale che meno facilmente si sarebbe compiuta, se la serie precedente non le avesse spianata la via. Naturalmente, esiste anche qui fra le voci, che s'incrociano, quella iniziale affinità fonetica, che suggerisce e facilita l'incrocio; nondimeno quella, che si ha, è un'associazione d'idee, e il pensiero ha qui sulla forma tale un sopravvento che il vocabolo designante un concetto affine riesce a sfigurare, direi, violentemente la voce, con cui si mescola.

Ora, i concetti, che avendo in comune gli attributi della rotondità e della gonfiezza abituale o costante qui operarono, sono i seguenti.

XI. Il primo e più importante, poichè quasi abbraccia e pervade tutti gli altri, è il concetto di " ventre „.

Questa parte del corpo (de' cui nomi romanzi troppo piccola parte è elencata in Rom. Forsch. XIV. 495 sg. A. XVI. 377) nella Romanità è con particolar predilezione paragonata e quindi identificata con vasi vinarî e recipienti simili. Onde si hanno quattro gruppi (di cui però i due primi esorbitano dall'indagine nostra):

1. *baga* " otre „ (ML. 880), che significa " ventre „ a Como e Brescia, " uomo grasso „ a Venezia.

2. *bulga* " sacca di pelle „ (ML. 1382), che suona *bogia* col senso di " uom panciuto „ in Engadina e di " pancione „ a Brescia: donde il derivato parm. *bogigiott* " grassotto „. [E qui forse prov. *bogo* " ventre „].

3. fr. *boîte* o meglio prov. (marsigliese) *boueito* " scatola „ (K. 1674), che mutuata, direi, dal comasco suona *boeuita* (con *o* turbato per analogia fonetica con com. *voeuita* " vuota „: altrimenti R. XXVII. 229) e significa " ventre „ a quel modo che

piem. *boita* (parimenti mutuata) s'usa scherzosamente (a detta del Sant'Albino) per " gobba „.

4. gr. *buttis* " botte „ (K. 1671. ML. 1427), che si riscontra in com. *botásc* " fiasco-ventre „ (altrimenti A. XVI. 376 sg.), e da cui derivano bologn. *butazôn* " grassone „ (da bol. *butaz* " recipiente dell'olio „), piem. *butalũ* " tozzo „ (da piem. *butál* " botte „) e questi altri che aggiungo con ogni riserva: prov. *boutis* " gonfio „ (su cui v. sotto XIII. 2), sav. *boterô* " uom piccolo e panciuto „, svizz. rom. *botthollion* " id. „, fr. fiammingo *boutrouille* " ventre „ (cfr. per la somiglianza degli elementi costitutivi fr. centr. *bouteriau*, su cui v. N. III. 119, *bouterolle*, *bouteron* " cestone „ — comasco *buturú* " fiasco „).

XII. Il ventre trae poi più altri nomi da due opposti processi di sineddoche.

Il primo (il contenuto per il contenente) fu suggerito da lat. *botellum* " salsiccia-budello „ (cfr. ML. 1230) e da un sinonimo germanico, cioè dal cosidetto cimbrico *buz*, variante *boutze* " budello „ (cfr. A. VIII. 176).

La base latina con questa accezione appare immutata soltanto in savoiardo *boela* " ventre „.

La base " cimbrica „ si riscontra, direi, in com. *buzz* " buzzo „, appunto in toscano *buzzo* " ventre degli animali - ventre umano (scherz.) - broncio - cuscinetto per aghi „, con genere mutato in prov. *bouso* " ventre de' ruminanti „ (ove la specificazione deriverà dall'analogia con prov. *buou* " bove „), ampliato con vario suffisso in com. *busechia* " ventre „, tosc. *busecchi-o, -a* " budellame e ventre d'animali - intestino - salsiccia „, lomb. piem. *büseca* " budellame „ (altrimenti ML. 1240): a' quali con ogni riserva aggiungerei il *bouzail* " ventre „ del Poitou.

[Per un diverso trapasso del concetto di " budello „ e verosimilmente per una cotal somiglianza dell'aspetto prov. *bouso* significa pure " sterco d'animali, in ispecie bovini „, e le s'accompagnano fr. *bouse*, piem. *büsa* " id. „: ed anche qui la specificazione deriverà dall'analogia con *buou*, *boeuf*, *beu*. Altrimenti K. 1528].

XIII. Ma all'infuori dell'esempio succitato *botellus* presenta ovunque più o men gravi alterazioni.

Una leggera ma assai diffusa è l'*u* (in luogo di *o*) che appare in it. *budello*, prov. *budel*, a. fr. *boudelier* " viscere „, svizz.

rom. *boué* (da cui forse svizz. *boualla* " panciuto „ e *boulhé* " ventre affamato „, fr. centr. *boulliaud* " musone „), piemon. *büele*: e questa la crederei dovuta a influsso della base germanica sulla latina (cioè *botellu* + *buz* = *budello*).

Però la forma contaminata non scacciò del tutto l'originaria: onde or l'una, or l'altra, ora entrambe appaiono nelle altre modificazioni del vocabolo, che quasi tutte derivano da scambio del suffisso. Così si hanno

1. con *-ino*, *-ano*, *-one*:

com. (M.), ven., sav., fr. centr. *bodin*, piem. *budín*, fr. comune, prov. *boudin* (varianti *budin, boudic, boudi*) " sanguinaccio „ (altrimenti ML. 1192): ove pel piem. e fr. com. il *d* conservato attesta che la voce non è indigena.

Di qui in Francia il centrale *boudi* (var. *bodi*) " vitello „ (direi, dal senso originario di " salsicciotto „: trapasso festevole, che s'è compiuto spesso in questa famiglia) — con genere mutato l'ant. *boudine* (varianti *bouline*, in cui l'*l* può esser desunto dall' ant. *boel* " budello „, *boutine*, ove s'avrà il sopraccennato influsso di *buttis*: v. sopra XI. 4) " ventre-ombellico „ — il diminutivo dialett. *boudinette* " ombellico „ — con scambio di suffisso il prov. *boudeno*, i dialettali *boudeine*, *boudaine* (var.: *boutaine*, che sta al precedente, come *boutine* a *boudine*) pure " ombellico „ (cfr. Vermesse 86) — e da *boudaine* per influsso di *bedon* " ventre-tamburo „ il comune *bedaine* " ventre „ (D. 518). Ma *bedon* è per sè stesso enigmatico: però in considerazione di prov. *badoun*, var. *badon*, *-ondo* " panciuto, -a „ (estratto, direi, da prov. *boudoundeno* = fr. *bedondaine*, contaminazione di *bedon* + *bedaine*, cfr. Dict. gén. s. v.), *boudoun* " campanaccio „, *boudounet* " panciuto „, fr. centr. *boudoune* (var. *bodoune*) " giovenca „ (senso derivato, parmi, da un originario " panciuta „) io crederei che debba recapitarsi qui, e che il mutamento di *bou* (*bo*)- in *be-*, non ammissibile in via fonetica, possa essere così spiegato: in **bodon* (variante morfologica di *bodin*), quando assunse il significato di " strumento musicale „, l'elemento, che per il suo valore onomatopeico doveva a' parlanti parere essenziale, era la sillaba *-don* (cfr. fr. *dondon* e simili), e il *bo*(*bou*)- doveva da loro esser sentito come un prefisso: perciò lo mutarono in *be-*, *ba-*, riflessi francesi (l' uno apparente, cfr. *besace*, l'altro reale) di lat. *bis*. E *bedon* " tamburo „ venne dipoi usato

pure nel senso di “ ventre „, com'era naturale, data l'identità originaria.

2. con *-iclo*, *-icio*, *-icco*:

parm. *bodicc*, *bodicett*, *bodiciott* “ grossotto „, genov. *bödissōn* “ uomo grassoccio, ma buono a nulla „, *bûddego* “ colui, che ha gran ventre „ — prov. *boudis* (var. *boutis*: v. sopra XI. 4) “ gonfio „, diminutivo *boudissoun* (varianti *boudouissoun*, incrocio con *boudouire* registrato qui sotto, *boudouchoun*, incrocio con *bouchoun* = fr. *bouchon*) “ uom piccolo e grosso - stronzolo - turacciolo „, *boudic* “ verme - salsiccia „, *boudiqueiro*, sing. collettivo “ pustoline del viso „, *boudego* “ cornamusa - persona panciuta „ — fr. centr. *bodiche* (varr. *boudiche*, *bodoche*) “ giovenca „ (pel senso v. sopra *bodoune*) — portogh. *bodigo*, *bodelgo* “ paffuto „ [E qui si noti che gen. *bödissōn* e *bûddego* devon essere provenzalismi: l'attestano pel primo il valor diminutivo del suff. *-one*, ben nota peculiarità del territorio gallico, pel secondo il genere mutato].

3. con *-itto*: prov. *boudet* “ vitello „, fr. fiamm. *boudette* “ ombellico „.

4. con *-orio*, *-ario*:

prov. *boudouire* (varianti *boudourle*, *boudoul*, *bedourlo*) “ uom piccolo e panciuto „ — ferrar. *budúri*, *buduriόn* “ pancione „ — mil. *bodée* “ buzzone „ — piem. *budéru* “ uom piccolo e grosso „, in cui la terminazione *-eru* = lat. *-ariulu* è indigena, ma il *d* conservato attesta l'origine straniera — bresc. *bódero* “ id. „ (M.), in cui *-ero* è quel pseudo-suffisso, che s'è staccato dalle voci del tipo *albero*, *genero*, *povero* ecc. A quest'ultimo si connette, a parer mio, parm. *bódriga* “ ventre „ (da **bod-er-ica*) che avrà in origine significato “ budellame „, poichè il senso di “ branco, combriccola „, che ha *manica* in gran parte d'Italia, pare aver dato talora ad *-ĭca* valor collettivo: e detta voce a Bologna suona *butriga* per influsso di *buttis* (v. sopra XI. 4), come sembra dimostrare l'a. prov. *botriga* “ piccola bottiglia „, in cui si ha, direi, il processo ideologico inverso, cioè il trapasso dal concetto di “ ventre „ a quello di “ vaso vinario „.

5. con *-ald*, *-ale*, *-olo*:

fr. centr. *bodaut* (var. *boudaut*) “ vitello „ — venez. *bodái* “ trippone - colui, che ha gran pancia „, che mi sembra un plurale usato con valor di singolare, e *bódolo*, *bodoleto*, *bodoloto*

“ grassoccio „, nel quale par più prudente scorgere il tema *bod* + un *-ŏlo* seriore, anzichè ravvisarvi lat. *botulus* “ budello - salsiccia „ (ML. 1241) rimasto miracolosamente intatto.

6. con *-oso*: prov. *boudos* (var. *budous*), aggettivo sostantivato “ pacco - turacciolo „.

7. con *-ia*: ant. fr. *boudie* “ ventre „ — ferrar. *budjón* “ uom grasso e grosso „.

XIV. Alla famiglia di *boud-in, -ic, -is* ecc. si collega ancora un gruppo di vocaboli, che paiono primitivi, e de' quali invece direi che siano estratti da quelli. Tali sono: fr. centr. *bode* “ vacca „ (da *boudoune* “ giovenca „: v. sopra XIII. 1), saintong. *beude*, prov. *bodo* “ giovenca „ (da *boudet* “ vitello „: v. sopra XIII. 3), sav. *boda* “ ventre „, a. fr. *boude* “ ombellico „ (da *boudaine* “ id. „; v. sopra XIII. 1) e col trapasso ideologico, di cui sopra a IX. 1, fr. centr. *boude* nella locuzione *faire la b.* “ fare il broncio „, prov. *boudo* “ broncio - pacco rigonfio „ e poi, per contaminazione semasiologica con *bouto* “ otre „, anche “ otre - capra „ [Da questi ultimi deriverà fr. *bouder*: e in piem. *fe-l-budu* “ fare il broncio „ (che non ho mai udito) si dovrà a causa del genere mutato vedere un provenzalismo: altrimenti D. 529].

Dunque riassumendo, tutte formazioni regressive. Ma come si spiegherà il divario della vocal radicale in prov. *bodo*: *boudet*? Scorgendovi una pseudo-apofonia: vale a dire, quando da un *boudet* venne estratto un *boudo*, questo parve un primitivo, quello un derivato: quindi *boudo* venne rifatto in *bodo* per stabilire fra esso e *boudet* quel rapporto apofonico *o* : *ou*, che è ad es. in prov. *bosso* “ tumore „: *boussá* “ tumefare „.

[Da un siffatto procedimento. cioè da una falsa apofonia, direi che derivino e l'a. prov. *boza* (var. *buza* = mod. *bouso*: v. sopra XII) posto a fronte di derivati, quali i mod. *bouseto* “ pancetta „, *bouseti* “ omino panciuto „, e il mod. *boto* (var. *bouto*, *boudo* testè citati) “ otre „ estratto da derivati, quale *boutis*: v. sopra XI. 4].

XV. L'opposta sineddoche (cioè il contenente per il contenuto: v. sopra XII), dalla quale il ventre desume ancor altri nomi, fu suggerita dal cinturone della spada. In latino era detto *balteus*, voce, che in quest'accezione si diffuse largamente, poichè in età ben antica penetrò anche presso i popoli nordici (cfr.

ad es. anglosass. *belt*: D. 518). Ma nella Romanità *balteus* subì modificazioni molteplici, che sembrano essere state foggiate in Francia, la quale (com'è noto: N. I². 31 sgg.) una prima volta nell'alto medio evo comunicò a tutta Europa la sua lingua. Ora, le forme più antiche del vocabolo, che colà si riscontrino, sono *baldringus* e *baldrellus*. Benchè attestati in documenti della stessa età, e cioè del sec. X (cfr. Ducange s. vv.), crederei anteriore *baldringus*, perchè non si presenta in veste romanza (mentre all'incontro sembrano derivarne medio alto ted. *balderich* ed ant. ingl. *baldrick*). In esso *baldringus* io vedrei poi una contaminazione di lat. *balteus* e di germ. *ring* (che, se non significa propriamente lo stesso, ha nondimeno qualche affinità di senso), e cioè una formazione del tipo di fr. *chanfrein* " frontale del cavallo „ e simili (cfr. RG. II. 585). Ma in età pure antica era nelle lingue romanze penetrato il suff. germ. *-ing* (cfr. RG. II. 552. N. III. 170). Orbene, a me sembra che questo suffisso abbiano i parlanti scorto in *baldringus*, e perciò abbiano foggiato parecchie varianti morfologiche della voce stessa sostituendo ad *-ing* altri suffissi. Di qui s'ebbero

1. con *-ellu*: medievale *baldrellus*, a. fr. *baldrel*, var. *baudrel*.

2. con *-etu*: a. prov. *baldrei*, a. fr. *baldrei*, varr. *baldroi*, *baudroi* [Quanto all'insolito impiego del suffisso cfr. fr. *écofroi* " banco „, *gravois* " calcinaccio „: N. III. 87].

3. con *-atu*: a. fr. *baldré*, var. *baudré*, a. prov. *baudrat* [Qui pure a. fr. *baldred*? Ovvero spetta al num. precedente?].

4. con *-ariu*: fr. *baudrier*, prov. *baudrié*, da' quali son desunti it. *budriere* (che ha *bu-*, direi, per influsso di *buzzo*), sp. *baldier*, port. *boldrié* (cfr. ML. 901, donde traggo i due ultimi).

Svariate formazioni, le quali dimostrano che nella coscienza de' parlanti era sorta l'illusione d'un tema *baldr-*. Ma accanto a questo sorse pure un altro pseudotema *bald-*, che fu suggerito, direi, da *baldrellus*, poichè *-rellus* in esso potè parere il suffisso, e cioè quell'ampliamento, a cui in Italia e in Francia andò soggetto lat. *-ellu*: cfr. RG. II. 545. N. III. 182.

[A questo punto è forse necessaria una dichiarazion di principio. Non credo che gli uomini abbiano mai parlato per temi: quindi ne' temi non vedo entità lessicali, che siano vissute o vivano di vita propria. Credo però che gli uomini sentano nelle

parole una parte fondamentale e permanente (cioè il tema) ed una accessoria e mutevole (cioè il suffisso): e di ciò mi par prova il fatto indiscutibile della sostituzion del suffisso. Credo insomma (come ebbi a dire già altravolta) che i parlanti a modo loro, cioè colla rapidità e inconsapevolezza degli atti istintivi, bene o male (come del resto i glottologi) analizzino le parole. E credo ancora che i parlanti, quando (inconsapevolmente, s'intende) addivengono alle formazioni analogiche, abbiano sopratutto presente al pensiero quello, che a loro pare il tema, e trascurino e quasi scordino quello, che a loro pare il suffisso].

XVI. Ora, come s'è detto, queste nuove denominazioni del cingolo militare passarono a significare il ventre (trapasso, che apparirà tanto più naturale, se si pensa ad it. *panciera*, ted. *Panzer* " corazza „).

Ma tale trapasso ideologico non si compì senza nuove alterazioni o del tema o del suffisso. Così

1. *baldr-* assunta desinenza participiale divenne fr. centr. *baudru* " panciuto „ (var. *boudru*, che significa pure " ombellico „: evidente influsso di *boudaine* e simili: v. sopra XIII. 1).

2. *bald-* contaminatosi con *bodin* ha dato il bellun. *baldin* " trippa, ventraia „ e con sostituzione dell'accrescitivo al diminutivo *baldon* " sanguinaccio „ (M.), che è pur veneziano, e da cui deriva tirol. *baldonazz* " salsiccia „. Ma codeste parlate appartengono a quella larga zona dell' Italia superiore, in cui *a* dinanzi a *-ld-* si muta in *o* (A. I. 247. 299. 473. Salvioni, Fon. mil. 92): cfr. ad es. mil. *gariboldín* " grimaldello „. Di qui sorsero la var. venez. *boldon* e il com. *boldon* " donna piccola e grassa „, ven. *boldoni* " cuscini di lana „, ven. *boldona*, che s'usa nella locuzione *dar la b.* = it. *dar la soia* e mi par che in origine debba esser stato un sinonimo di " sugna „. Delle quali voci l'ultima riappare in prov. *boldono* (varr. *boudano, baldano, baudano*) " trippa „.

Inoltre codesto *boldon* per un'assimilazione analoga a quella avvenuta in it. *montone* = fr. *mouton* si mutò in *bond-*, che si ha in com. *bondon*, var. del succitato *boldon*, ven. *bóndolo* " grassotto „, in cui mi sembra evidente l'influsso di *bodolo* (v. sopra XIII. 5), ven. *bondóla* " salciccione „, che ha una var. *bondióla* diffusa in tutta l'Italia superiore (Altrimenti ML. 1192).

3. Il rifacimento di *bald-* in *bold-* s'è poi esteso anche a *baldr-*. Si ha quindi:

friulano *bultriè* " ventre „, che è l'esempio più manifesto della nuova accezione assunta dal nome romanzo del cingolo militare, e in cui *-u-* sarà dovuto ad influsso di *buzzo* e *budriere*, e *-t-* sarà come un'eco della base *buttis* (v. sopra XI. 4): e da esso friul. *sbultricá* " riempire il ventre „ (M.);

bergamasco *boldrass* " trippa, ventraia „ col derivato *boldrassú* " uomo panciuto „ (M.), dal quale non mi par da disgiungersi piem. *bëdrassú* " id. „, che mi sembra debba anzi giudicarsi importazione lombarda a causa del nesso *-dr-*, da cui il nostro dialetto ripugna (cfr. piem. *sirá* " storpio „ da *assiderato*: M. 728). Da essa venne poscia fra noi estratto *bëdra* " ventre „: e crederei che in origine anche l'elemento radicale di questi vocaboli nostri sia stato identico o quasi a quello delle anzidette voci bergamasche, ma si sia posteriormente modificato per influsso di fr. *bedon*, *bedaine*.

XVII. Riassumendo: ne' paragrafi precedenti, prese le mosse da due vb. lat. **bissufflare* e **bisinflare*,

1. ho postulato da una parte il mutarsi di *bis* in **bos* nella Romanità orientale, di *bis* attraverso *ber* in **bor* nella Romanità occidentale, dall'altra il sorgere di verbi variamente contaminati, quali **onflare*, **offlare*, **offare*, **ifflare*, **iffare*;

2. ho messo in luce un gruppo di vocaboli, che per diversa via assunsero il senso di " ventre „, e cioè (per citarne il cosidetto tema) *bot-* " botte „, *bod-* " budello „, *bald-* " budriere „.

Rimane ora a vedersi come i vocaboli del num. 2 abbiano influito su quelli del num. 1.

XVIII. Su **bisinflare* e le varianti sue molteplici venne innestato *bot-* grazie ad un'iperbole popolare, cioè " essere grosso e tondo come una botte „. Di qui:

ant. prov. *botenflat* " gonfio „ — catal. *botinflat* " id. „, *botifler* " paffuto „ — mod. prov. *boutefle* " gonfio „, il posverbale *boutiflo* " vescica - bolla d'acqua - trottola (per trapasso ideologico suggerito dalla rotondità dell'oggetto) „, i derivati *boutiflau*, *boutifiau*, *boutifarro* " panciuto „: de' quali i primi due escono in *-au* = *-ale*, il terzo di men chiara terminazione si trova pure in catal. *botifarra* " salsiccia „, sp. *butifarra* " id. „, sicil. *buttafarri* " testicoli „ (nell'ultimo de' quali il mutamento del ge-

nere e del senso è prova manifesta del mutuo); e di esso direi che derivi da un prov. **boutifard* (analogo a *boudiflard*, v. sotto xix. 1.) passato in Ispagna: ivi nel femm. **boutifarda* al suff. germ. *-arda* sarà stato sostituito l'iberico *-arra* (cfr. RG. ii. 546 sg.): e così travestita la voce sarà ritornata in Provenza. Sarà dunque un originario aggettivo, che si sostantivò in terra straniera, e tornato in patria ridiventò aggettivo, perchè usato metaforicamente — fr. centr. *boutiffé* " gonfio „, *boutenfle* (var. *boutenfe*) " vescica „, *boutiffle* (var. *boutiffe*) " bolla „ — svizz. rom. *boutefa* " salciccione „;

piem. *butenfi* " gonfio „ (v. sopra i), piacent. *botaffion* " uom grosso, paffuto „, senese *butifione* " id. „: inoltre ant. sen. *butenfiare* " fare il broncio „ col posverbale *butenfio* " broncio „ (v. sopra ix. 1, xiv).

XIX. Innestandosi su **bisinflare* e le sue varianti molteplici, *bod- bald- bed-* foggiarono de' composti di dipendenza, che significano a un dipresso " mangiando riempirsi il ventre a segno da esser gonfio „. Di qui:

1. Tema *bod-*:

prov. *boud- enflá, -eflá, -iflá, -uflá* " gonfiare „ — *boud- enfle, -efle, -unfle, -ounfle, -oufle* " gonfio „ — *boud- enflas, -eflas, -ouflas* " grassone „ — *boud- iflard* " gonfio „ — *boud- ofi* " grassone „ (in cui è manifesto l'influsso di *basofi*: v. sopra iv. 1.) — *boudenflejá* " prendere a gonfiare „ (ove *-eja* = *-idiare*: cfr. RG. ii. 610) — *boud- enflige, -enflugi, -eflugi, -ouflige* " gonfiezza „ (in cui *-ige, ugi* = lat. *-igine, -ugine*: cfr. RG. ii. 471) — *boud- ifo, -ufo, -uflo, -ufro* (var. *bourdufo* rifatto forse sul *bourdufalho* di cui v. sotto xx) " trottola „ — *boud- iflo, -ouflo* " vescica „ — *boud-iflasso* " vescicaccia „ — *boud- ifleto, -oufleto* " vescichetta „;

fr. centr. (ovest) *boudenfle* " vescica „, *boudiffe* " bolla „;

svizz. rom. *boudifflo* " paffuto „;

ferrar. *budenfi* " gonfio „, *budanfión* " gonfione „ — parm. *bodenfi* " gonfio „, *badoffia* " minestra „ (evidente contaminazione di questa base con *basoffia*) — bologn. *budeinfi* " gonfio „ — tosc. *budenfione* " grassone „ (C).

2. Tema *bald-*:

prov. *baud- uflá, -ufá* " gonfiare „ — *baudufo* (var. *gaudufo*) " trottola „ — *baud- ufejá* (var. *-ufiá*, direi, da *-icare*) " girare come una trottola „ — *bauduf- ejaire, -iaire* " beffardo „ (in cui *-aire* = lat. *-ator*).

3. Tema *bed-*:

prov. *bed-enfle* " gonfio " — *bed-ouflo, -oufo* " ozioso ", che probabilmente è un originario sostantivo femminile, che usato metaforicamente diventò aggettivo e s'estese al maschile.

E da questo paragrafo come dal precedente, ne' quali cercai di separare e distinguere elementi, che i parlanti congiunsero e confusero (come dimostra *boutiflo*, *boudifo*, *baudufo*, *bedoufo*, posverbale, in cui confluirono tutti e quattro i temi), appare che la sede propria di questa voce è la Provenza.

XX. Ivi infatti **bisinflare* o meglio *boudiflá* subì un'ulteriore alterazione, da cui derivò un vocabolo, che a sua volta venne variamente modificato e nelle nuove foggie si diffuse largamente dalla Provenza alle regioni vicine.

Sotto il duplice influsso di *boucho* " bocca " da una parte e di *boufá* " mangiare avidamente " dall'altra *boudiflá* venne mutato in *bouchifá*, che in origine avrà significato " mangiar così copiosamente da gonfiar le gote " ed ora significa semplicemente " mangiare ". E da questo col suff. *-alia* venne foggiato *bouchifaio* " cibarie " affine di senso e di forma con it. *vettovaglia* e fr. *mangeaille* (cfr. RG. II. 482).

Siccome poi il concetto di " bocca " si scambia spesso con quello di " scatola, cassetta " e simili, onde in Guascogna si dice *boucho* per prov. *boustio* (var. *bousti*) = fr. *boîte*. così *bouchifaio* venne rifatto in *boustifalho*, di cui v'è una variante *bouschifalho*, che sembra contaminazione di *bouchifaio* con *boustifalho*, ma potrebbe anche essere incrocio di *boucho* con prov. *bousso* " borsa ", *bouosso* " bernoccolo " (Quanto al lieve divario della terminazione, è da ricordare che in buona parte della Provenza *-alho* si riduce ad *-aio*: cfr. Chabaneau, Gramm. limous. 99).

Pure in Provenza si riscontra *bourdifaio* (colle varianti *bourdufalho*, *burdufaio*, *bordifalho*), che oltre a " cibarie " significa " bagatelle, cianfrusaglie " e metaforicamente " crapulone ". In esso l'elemento verbale *-ifaio* (*-ufaio*) è indubbiamente lo stesso di *bouchifaio*, mentre la base è prov. *bordo* (varianti *bouordo*, *bouerdo*, *bouardo*) " immondizia, sozzura, feccia ", la quale mi pare che altro non sia se non prov. *broudo* = it. *broda* (cfr. ML. 1321), che attraverso la forma metatetica *boudro* [rappresentata in Provenza da quella lunga schiera di vocaboli, che da *boudracá* " infangare " va a *boudrous* " fangoso " (v. Mistral),

in Poitou e Saintonge da *boudrer* " insudiciare „, nella Fiandra da *boudré* " sudicio in volto „, e passata in Piemonte, ove si ha *budré, budrighé, budrigné* " mescolare „ co' participî sostantivati *budrá, budrigá, budrigná* " mescolanza „, il derivato *budrüra* " id. „ e il posverbale *budra* " id. „ (che mi è ignoto) : e dico passata a causa del nesso *-dr-*: v. sopra XVI. 3] si metatizzò ulteriormente in *bouordo, bordo.* Cosicchè *bourdifaio* almeno in origine avrà significato " gran quantità di cibi ripugnanti, di avanzi e simili „.

XXI. Codesto vocabolo ha, dicevo, larga diffusione. Si trova infatti, sempre col significato di " profusion di cibi „ (salvo contraria indicazione), in:

1. Fr. centr. *boustifaille* colle varianti *boutifaille* (dovuta a influsso di *boutiffé*: v. sopra XVIII), *bouffetifaille* (incrocio di *bouffer* " mangiare „ con *boutifaille*), *boussetifaille* (contaminazione di *bouffetifaille* con *boustifaille*).

2. Saintonge *boutifaille* colla variante *boufaille* identica per senso e forma al *mangeaille* del fr. comune.

3. Savoi. *boustifaille* (ove per certo i parlanti sentirono sav. *boste* " bocca „ anzichè prov. *bousti*) colle varianti *boustifalie, boutifalie, bortifalie,* di cui l'ultima riproduce prov. *bordifalho* con *-t-* dovuta a influsso delle altre forme.

4. Svizz. rom. *bourdifailla* " canaglia „, ove quanto al senso è da notare che mentre in Savoia *bortifalie* fu attratto nell'orbita di *boustifaille*, qui si ha il vocabolo significante " sozzura „ usato metaforicamente.

5. Aragona, *borrufalla* " ciarpame „: forma, che non mi so spiegare se non risalendo a un metatetico **bodrufalho* e supponendo che la voce nella sua lenta migrazione dalla Provenza si sia in Catalogna, ove *-dr-* passa in *-rr-* (cfr. RG. I. 415), mutata in *borrufalla.*

XXII. Ed ora per ultimo non rimane che a far menzione di alcuni vocaboli, che sembrano aver pure una qualche relazione co' precedenti.

1. Da un originario **bis-flare*, in cui il prefisso fu variamente mutato, possono derivare engadino *burflü* " gonfio „ — parm. *brufla* " pustola „, che sarebbe un posverbale — e (lo aggiungo però con ogni riserva) rumeno *bolfá* " gonfiare „.

2. Anche qui paiono doversi recapitare catal. *butllofar* " far vesciche „ col suo posverbale *butllofa* " vescica „ ed ant. sp. *gallofar* " chieder l'elemosina „ co' suoi posverbali *gallofo* " mendicante „ e *gallofa* " cibo dato in elemosina „ : i quali si hanno pure in it. *gaglioffo* " stolido „ (con senso mutato per influsso di *goffo*), lomb. emil. *gajoffa* " tasca, bisaccia - ventre „ (M. 161, K. 4141), piem. *gajofa* " boccaccia „ (e son probabile residuo del dominio spagnuolo).

Ora, in cat. *butllofar* vedrei un prov. **boudofar* (v. sopra XIX. 1-2) contaminato con cat. *butlla* = lat. *bulla* " bolla „ (ML. 1385). Nello sp. *gallofar* direi poi che si abbia cat. *butllofar* mutato prima in un **gollofar* (significante " riempir la gola „) per incrocio con lat. *gula* " gola „. Dato che io m'apponga al vero, anche i posverbali devono in origine aver sonato **gollofo* e **gollofa*: ma poi **gollofo* si sarà mutato in *gallofo* per influsso di *gallardo* (ML. 3657) ed avrà poi reagito così pel senso come per la forma sui vocaboli affini mutandoli in *gallofar* e *gallofa*, a quel modo che, forse pel medesimo influsso, *gulard* " ghiotto „, che si ha nel ladino, si cambiò in *guliard* " id. „, che si ha nel canavesano (cfr. K. 4118. A. III. 24. VII. 508 sg. XII. 406).

3. Finalmente in considerazione dell'a. prov. *botriga* " piccola bottiglia „ (v. sopra XIII. 4) sia lecito avanzare il sospetto che anche prov. sp. *barríca* " botte „ e sp. *barríga* " ventre „ spettino qui, in quanto *barr-* (come sopra l'arag. *borr-*) derivi da un **badr-*, che sarà stato il frutto dell'incrocio de' temi *baldr-* e *bodr-* sopra citati (Altrimenti K. 1245. ML. 963).

L'Estetica degli Alessandrini.

Nota del Dr. CESARE TRAVAGLIO.

" In der Kunst.... gilt, wie schon das Wort andeutet, allein das Können ".
SCHOPENHAUER, *Sammtl. Werke* (Leipzig, 1891), III, 439.

Un vero e proprio sistema di cognizioni intorno all'Estetica in Plotino non si riscontra. Perciò si ritiene comunemente che la sua teorica si riduca ad una amplificazione (1) ovvero ad un rimaneggiamento sintetico delle dottrine di Platone (2) e di Aristotile (3), oppure la si considera solamente in relazione colla ontologia della Scuola Alessandrina (4). Noi crediamo invece di poter affermare che l'estetica plotiniana ci porga dell'Arte una teoria affatto speciale (5).

È risaputo che la teoria estetica (*καλλολογία αἰσθητική*) fu intesa e svolta da Platone (6) come suprema rivelazione oggettiva dell'Idea Sovrana, da Aristotele (7) invece come semplice espressione imitatrice della natura (*μίμησις φύσεως*). La manchevolezza però dell'una e l'unilateralità dell'altra dottrina indussero il principe dei Neoplatonici ad una soluzione probabile

(1) Cf. WALTHER, *Geschichte der Aesthetik im Altertum*, pag. 737.

(2) V. PICAVET, *Esquisse d'une histoire des philosophies médiévales*, pag. 29. Dello stesso parere è il BÉNARD (*L'Esthétique d'Aristote*, pag. 128) ed il GÉRARD-VARET (" Rev. d. philos. ", 1891, II, 91), che afferma la mancanza di soggettivismo in Aristotele.

(3) Cf. VACHEROT, *Histoire de la philosophie d'Alexandrie*, I, pag. 76 e J. SIMON, *Histoire de l'École d'Alexandrie*, I, pag. 131.

(4) V. GOMPERZ, *Die Griechischen Denker*, II, pag. 171.

(5) Non siamo peraltro dell'opinione sostenuta dallo CHAIGNET, *La psychologie des Grecs*, IV, pag. 348, nè accettiamo le conclusioni dello ZELLER, *Philosophie der Griechen*, III[4], pag. 751.

(6) Cf. GOMPERZ, op. cit, III, pag. 342.

(7) V. ZELLER, op. cit., III[4], 371; GOMPERZ, op. cit., III, 342.

del problema, conservando l'oggettivismo dell'Accademia, senza ridurre o confondere il Bello coll'utile o col piacevole.

Plotino ravvisa una doppia manifestazione di fenomeni estetici: sensibili ed intelligibili. Quanto alla prima egli osserva il prodotto artistico nella sua rivelazione plastica o rappresentativa, e vi scorge la bellezza come rivelazione della natura irradiata da una luce superiore, che illumina ogni forma elementare, e — come già avvertiva Platone (*Tim.* 31 *A*) — sebbene semplice per la sua forma, sovrasta alle tenebre della materia essendole presente come un lume che è ragione e forma al tempo stesso (*Enn.* I. 6. 3).

Non si tratta quindi di una valutazione oggettiva, perchè non è la soddisfazione nostra quella che compie ed avvera in noi il giudizio estetico, ma l'elemento intrinseco d'ogni naturale bellezza, la forma. Così, servendosi della metafora della luce, del fuoco, Plotino si riporta alla vampa luminosa notando che “ è superiore in bellezza a tutti gli altri oggetti, perchè fruisce della forma e ne occupa le regioni più elevate..... Essa è la sola che, impenetrabile, penetra tutti gli altri corpi e comunica loro il calore, senza raffreddarsi, perchè lo possiede essenzialmente... Brilla e risplende perchè è una forma. L'oggetto, dove essa non si trova, ha una tinta scolorata, non è bello perchè non partecipa a tutta la forma del colore. Così le armonie recondite dei suoni producono le armonie sensibili e dànno all'anima l'idea della bellezza mostrandogliela in un altro ordine di cose. Le armonie sensibili si possono valutare in numeri, non in ogni specie di numero, ma solo in quelli che possono produrre la forma e le sovrastano. Questo noi osserviamo riguardo alle bellezze sensibili che, discendendo sulla materia come immagini ed ombre, l'abbelliscono e destano così la nostra ammirazione „ (I. 6. 3).

Quali sono gli organi coi quali appercepiamo le bellezze esteriori? “ Il bello è principalmente nella vista, tuttavia si ha pure nelle audizioni, sia nell'armonia delle parole, sia nei vari generi della musica: canti e ritmi sono parimente belli (I. 6. 1) (1)„. È ovvia l'opinione comune. Senonchè, trattandosi di bellezze

(1) Cf. Platone, *Phaedr.*, 250; *Hipp.*, I, 295; *Phileb.*, 17.

sensibili, perchè diciamo che gli oggetti sono belli? “ Esaminiamo in che consista la bellezza nei corpi. Il bello è qualcosa di sensibile che l'anima riconosce come intimo e simpatetico alla sua essenza, che accoglie ed a sè assimila. Tant'è vero che incontrando un oggetto deforme, essa recede, lo ripudia, respingendolo come estraneo ed incompatibile colla propria natura (I. 6. 2) „.

Orbene, se alla vista della bruttezza l'anima si contrae ed in sè si ritira per un certo natural orrore ed in presenza della bellezza quasi vien meno, ad essa tende e cerca di accostarla, ciò avviene perchè, anche nei corpi, la bellezza ha qualcosa di spirituale e proviene dall'alto. L'anima si allieta naturalmente alla vista di ciò che le è *analogo* (*ὅ τι ἂν ἴδῃ συγγενὲς ἢ ἴχνος τοῦ συγγενοῦς, χαίρει τε καὶ ἀναμιμνήσκεται ἑαυτῆς καὶ τῶν ἑαυτῆς* (I. 6. 2)) (1). — Ancora: “ come non siam soliti a vedere l'interno delle cose, ma ad ignorarlo, se ci attacchiamo al loro esteriore, siam simili a chi vedendo la sua immagine e non sapendo donde provenga, voglia nondimeno afferrarla..... Se nell'emozione provata da un bello spettacolo tu non proclami che esso è bello, e se spingendo il tuo sguardo in te stesso non provi l'attrattiva della bellezza, invano tu ricercherai la bellezza ideale, perchè tu non la ricercherai se non con quello che è impuro e brutto (I. 6. 4) „. Queste parole non si indirizzano a tutti, “ ma se tu ti sei riconosciuto bello, ricordatene (V. 8. 2) „.

Così avendo parlato riguardo alla bellezza corporea, Plotino viene a delineare il motivo estetico della rappresentazione ideale (2): “ Innanzi a ciò che è bello noi sentiamo l'ammirazione, un dolce rapimento, il desiderio, l'amore, un trasporto congiunto al piacere (3). Questi sono i sentimenti che debbono provare e provano veramente per le bellezze invisibili quasi tutte

---

(1) V. il mio lavoro: *La vera conoscenza secondo Plotino* (“ Mem. della R. Acc. delle Sc. di Torino „, 1911), pag. 18. È forse la prima volta che l'analogia sia stata applicata alla metafisica in quistione di tanta importanza.

(2) Cf. E. Gradmann, *Subjekt und Objekt des aesthetischen Aktens*, pag. 13.

(3) È in fondo il pensiero rinnovato ai giorni nostri dal Flaubert, per cui si vuole abbandonato lo studio dei fattori periferici di un'opera d'arte, occupandosi invece dell'opera latente, sorprendendone, attraverso il magistero, il mistero della sua reale bellezza.

le anime, ma specialmente quelle che sono più amanti, a quel modo che, in presenza di oggetti belli, tutti li vedono, senza provarne però ugual commozione (cf. *Enn.* I. 3. 3), laddove sono più vivamente commossi quelli che si chiamano amanti (I. 6. 4) „.

Un tale apprezzamento ha per noi un grande valore. Mentre ancora ferve la tanto dibattuta quistione se sia possibile l'arte per l'arte, è facile scorgere come Plotino l'abbia categoricamente risolta: l'arte è per lui, di sua natura, benefica, moralizzatrice. Il mito antichissimo di Orfeo che colla cetra incivilisce i barbari, nella sua stessa espressione fantastica, è stato troppo ben compreso dal filosofo neoplatonico, perchè egli non se ne sia servito nelle sue deduzioni. Plotino anzi, prescindendo opportunamente dalle comuni illazioni, si fondò sopra un concetto universale della Bellezza e del Simpatismo umano attraverso le sinergie cosmiche, escludendo che l'arte abbia in sè qualcosa di nocivo.

“ Lasciando il bello sensibile veniamo alla contemplazione delle bellezze superiori, che i sensi non percepiscono, ma che solo l'anima vede e riconosce senza aiuto d'organi. Come sarebbe impossibile parlare delle bellezze sensibili a chi non le avesse mai viste nè riconosciute tali (p. es. i ciechi nati), così non si saprebbe dir nulla della bellezza delle arti, delle scienze, se non avessimo già prima posseduto una tale bellezza; (non si saprebbe parlare) dello splendore della virtù, se prima non avessimo contemplato l'aspetto della giustizia e della temperanza (1), dinanzi al cui splendore impallidiscono la stella della sera e quella del mattino (I. 6. 4) „.

Per cogliere dunque tale rivelazione estetica è necessario che l'anima nostra abbia una speciale attitudine a considerare l'arte come strumento di perfezione. Così infatti dice il nostro: “ Bisogna contemplare le bellezze per mezzo delle facoltà che l'anima nostra ha ricevuto per vederle: allora, noi proveremo mirandole ben più di piacere, di stupore, di ammirazione, che non ne proviamo in presenza delle bellezze sensibili, perchè allora avremo intuito le vere bellezze (I. 6. 4) „. Quale sia poi

---

(1) Allusione ad un passo di Euripide (framm. 486 N) citato da Ateneo (*Deipn.*, XII, 546): *δικαιοσύνας τὸ χρύσεον πρόσωπον.*

questa attività psichica, Plotino non designa esplicitamente, tuttavia a me pare ch'essa faccia tutt'uno col φανταστικόν, di cui ho parlato diffusamente altrove (1). — Ma se l'anima conosce il bello per mezzo di una potenza speciale e giudica paragonando gli oggetti colla idea che ha in sè, quale norma de' suoi giudizi, come può mai essa, che è essenza puramente spirituale, cogliere la produzione artistica e valutarla se questa si svolge nell'ordine materiale? Inoltre, come si può stabilire un paragone tra un oggetto sensibile e l'idea che ne abbiamo? " Eppure un architetto può giudicare bello un edificio posto a lui innanzi paragonandolo coll'idea che in sè contiene. Forse che l'oggetto esterno, astrazione fatta dai materiali, non è che la forma anteriore suddivisa nell'estensione della materia, ma pur sempre una, manifestandosi nel multiplo (I. 6. 5) (2) „.

Nella forma pertanto consiste la ragione e la manifestazione di ogni bellezza sensibile. È quello il legame misterioso, che tra lo spirito ed il corpo, psicologicamente porge l'attualità del fatto, onde nel monismo psichico consta e si svolge il fenomeno estetico. Invero " quando per mezzo della sensazione appercepiamo in un oggetto la forma che concatena e domina una sostanza amorfa (contraria alla essenza psichica), quando cogliamo una figura che spicca per l'eleganza, l'anima riunendo questi elementi multipli, li riaccosta tra loro e li paragona colla forma indivisibile, che ha in sè, affermandone l'accordo, l'affinità, la simpatia [*idea specifica*] (I. 6. 5) „. Ora, essendo l'anima una essenza superiore a tutte le altre, quando appercepisce un oggetto, che non le sia affine, ma porti qualche traccia della sua natura, ne è come rapita: avvicinando quest'oggetto alla sua essenza, pensa se stessa (I. 6. 2) „.

In tal modo per mezzo del φανταστικόν noi apprendiamo il bello sensibile, la cui realtà oggettiva è da Plotino vivacemente sostenuta. Se chi percepisce e giudica, è di sua natura tale da

---

(1) Vedi la mia Memoria s. c., pagg. 17-19.

(2) Intendo per forma una certa qual entità intermedia tra l'idea specifica e l'oggetto reale, quale ci vien dato dalla percezione, ed è opera della φαντασία, a quel modo che lo εἶδος appartiene al νοῦς. E siccome l'idea specifica è il tipo intellettivo degli oggetti, così il fantasma prodotto dalla facoltà estetica ne è il tipo immaginativo.

attribuire all'oggetto tutto lo splendore, di cui l'anima sua è capace (cf. I. 6. 8), in quanto l'anima attribuisce ad altro oggetto parte delle sue attitudini, qual meraviglia se tutto un ordine di bellezze intrinseche al soggetto conoscente (*νοῦς*) si riveli ancora superiore a quello psichico? E poi, in quanto si comunica ai corpi, non è forse la bellezza psichica imperfetta? Il bello perfetto quindi è quello che illumina i corpi senza loro comunicarsi, per tema quasi di esserne profanato (I. 6. 8). Ma di ciò dirò in seguito: riteniamo intanto che dall'indagine dell'estetica specifica, il nostro filosofo è condotto a siffatto concetto generico.

Qual rapporto intercede tra le bellezze sensibili e quelle intelligibili? " Quello che v'ha tra gli enti, quando diciamo che gli oggetti sensibili sono partecipi di una forma (*μετοχῇ εἴδους*) I. 6. 2. „. Plotino però non dice in qual modo avvenga questa partecipazione. " Osserviamo gli oggetti che le arti riproducono, bellezze naturali, esseri ragionevoli e irragionevoli, sopratutto i più perfetti, in cui il Creatore ha potuto padroneggiare la materia e darle la forma dovuta. Che cos'è che costituisce la bellezza in questi oggetti? Non il sangue, non i menstrui (*καταμήνια*), ma colore e figura diversi. Donde proviene la bellezza di Elena tanto contrastata? Donde la bellezza di tante donne paragonabili ad Afrodite? Donde la bellezza di questa dea; e, se vi ha qualcuno perfettamente bello, o uomo, o dio tra quanti ci si presentano o che, senza mostrarsi, hanno pure una bellezza visibile? Non è forse dovunque questa forma che dal Creatore passa nella creatura, come nell'arte la bellezza passa dall'artista nell'opera sua? (V. 8. 2) „. La bellezza dunque è data alla materia per mezzo della sua partecipazione all'ideale (1).

" Noi diciamo che chi si eleva alla contemplazione del mondo intelligibile e concepisce la bellezza del vero intelletto, può cogliere per intuizione (*εἰς ἔννοιαν βαλέσθαι*) il Padre superiore

(1) La bellezza fisica è la forma che il corpo riceve dall'anima per mezzo della ragione seminale (*λόγος σπερματικός*). Cf. *Enn.* VI, 7, 33 ed il mio s. c. lavoro, pag. 40. Il Müller, che ha tradotto e commentato l'Enn. V, osserva in proposito un curioso riavvicinamento dell'estetica alessandrina con quella dello Schiller. Secondo me il collegamento è dovuto al fatto che i due pensatori spiegano del pari il cosmo per mezzo dell'idea. Cf. " Philos. Monatshefte „, XII (1876), 9.

dell'intelletto, e cerchiamo perciò di comprendere e di spiegarci in qual modo si possa contemplare la bellezza dell'intelletto e del mondo intelligibile. Posti invero due marmi vicino l'uno all'altro, sia l'uno p. es. brutto ed informe, l'altro lavorato da uno scultore che ne ha ritratto la statua di una Dea, di una Grazia, di una Musa, od anche quella di un uomo, ma non individuale, statua cioè in cui l'arte abbia riunito tutti i caratteri estetici dei diversi individui. Presa così dall'arte la bellezza della forma (*εἴδους κάλλος*), il secondo marmo parrà bello, non per la sua essenza, che è solo pietra (altrimenti l'altro marmo sarebbe bello al pari di esso), ma per la forma che ha ricevuto dall'arte. Ora questa non aveva la materia, ma era nel pensiero dell'artista prima di passare nel marmo: era in lui non perchè avesse occhi o mani, ma perchè egli partecipava dell'arte (V. 8. 1) „.

Questo passo ci sembra di particolare importanza. Dice il Simon: Una cosa è bella in proporzione che la materia vi è superata e che l'idea vi domina. Un tempio non è bello che per il riflesso dell'idea. Se invece il tempio è dimenticato ed io sento in me un santo rispetto, una letizia tutta divina, come alla presenza di un Dio, si è che l'idea s'irradia su questo tempio, vi domina e l'anima mia la riconosce. Noi portiamo in noi stessi tutta la bellezza che diamo ai corpi (1). — È questa un'esplicita affermazione di soggettivismo. Senonchè Plotino non rinnega l'oggettività dell'arte: pur accogliendo i dettami del platonismo, non si rifiuta di annuire al razionalismo del tempo suo e considerare l'uomo come centro e misura del cosmo. In arte egli non propugna però il razionalismo, nè il soggettivismo, nè l'oggettivismo puro ed incondizionato, ma un vero e proprio psicologismo.

“ Nell'arte — continua Plotino — esisteva già la bellezza, e non la si potrebbe confondere col marmo: rimanendo in sè ha prodotto una forma inferiore, che, passando nella materia, non ha potuto conservare la sua purezza nè soddisfare interamente l'artista: non ha altra perfezione oltre quella materiale (2).

(1) V. *Histoire de l'École d'Alexandrie*, vol. I, pag. 580-81.

(2) L'importanza di questo ragionamento è incalcolabile. Il Creuzer ritiene che il Goethe, il quale ha tradotto e commentato il predetto brano, abbia aderito alla dottrina plotiniana.

Se l'arte riproducesse opere conformi alla realtà per il possesso della bellezza che le è essenziale, vi sarebbe una bellezza più grande e più verace di quella che passa negli oggetti esterni. Invero, come ogni forma si estende passando nella materia, essa è più debole di quella che rimane una. Tutto ciò che si estende, si allontana da sè, come la forza, il calore, ecc.; così pure è della bellezza (V. 8. 1) „.

Vi ha dunque un motivo razionale da parte dell'artista, la cui opera — se ben abbiamo colto il pensiero plotiniano — non riflette solo colle stesse linee e gli stessi colori la natura, ma — per così dire — la completa. È il vero e proprio psicologismo dell'arte. Anzi, se non temessimo di venir fraintesi, ripeteremmo col Royce che " l'arte, colla sua adesione alla realtà sensibile, ha il suo centro di gravità nella vita interiore, poichè la nostra coscienza (l'anima dei neoplatonici) trova precisamente la sua realtà interna disperdendosi nel mondo delle relazioni esterne (1) „. Non diremo dunque con Plotino che l'arte è l'illustrazione dello psicologismo prammatista?

Storicamente considerata qual'è la posizione dell'estetica alessandrina? Riportandosi alle teorie antecedenti Plotino osserva: " Il bello è forse — come tutti dicono — la *proporzione* di tutte le parti tra loro ed in complesso congiunta alla grazia dei colori? (2). Ma, se la bellezza dei corpi è nella simmetria e nella giusta proporzione delle parti (*stoicismo*), non può trovarsi in un oggetto semplice. L'insieme sarà bello, ma le parti non saranno belle se non in relazione coll'insieme dell'oggetto. Tuttavia, se il complesso è bello, pare che anche le parti lo debbano essere: il bello non risulta dall'insieme di parti brutte, ma in tutte le parti deve essere diffuso. E poi, nello stesso composito i colori semplici, che come la luce del sole son belli, non devono la lor bellezza alla proporzione. In qual modo l'oro sarà bello? Come di notte il lampo sarà risplendente e gli astri belli a contemplarsi? Nei suoni poi bisogna ammettere che ciò, che è semplice, non sia bello. E poichè in una bella armonia, pur conservando le stesse proporzioni, la stessa immagine sembra ora bella, ora

(1) Cf. J. Pérès, *Pragmatisme et esthétique* (" Rev. philos. „, 1911, sett.). V. pure un lieve accenno in Guthrie, *The philosophy of Plotinos*, 1892.

(2) Cf. Zeller, op. cit., III[4], pag. 613.

brutta, perchè non convenire che la proporzione non è la bellezza, ma che la deve ad un altro principio? (I. 6. 2) „. Tali considerazioni servono non solo alla rappresentazione plastica. ma a tutte le manifestazioni dello spirito. Così anche " nelle occupazioni, nei discorsi, se si vuole che la bellezza dipenda dalla proporzione, come si potrebbe ciò ritenere per le leggi, gli studi, le scienze, ecc.? (ibid.) „.

" Se si dirà poi che i rapporti di proporzione consistono nell'accordo (pitagorismo) anche le cose cattive possono aver tra loro un certo accordo ed una certa armonia. E poi, siccome la sapienza è semplicità di spirito, la giustizia una sciocchezza generosa, dovremo dire che queste due asserzioni sono tra loro in armonia, in reciproco rapporto. Del resto, se ogni virtù è una bellezza psichica, molto più vivace di quelle ora ricordate, come si può dare proporzione nella virtù? Non vi ha grandezza nè numero; e poichè l'anima comprende parecchie attività, quale ne sarà il loro rapporto? (ibid.) „.

Orbene, siccome dalla minuta analisi degli oggetti siamo indotti a distinguervi la *forma* e la *materia*: " congiungendosi colla materia, la forma coordina le varie parti dell'unità (estetica), combinandole per mezzo della loro armonia produce qualcosa che è *uno* (ibid.) „. Prescindiamo dal notare che, se la forma è una, il suo prodotto dev'essere pure uno; sta il fatto che in un oggetto, sia pure composto, in quanto è uno, la bellezza si comunica tanto alle singole parti che al loro complesso: incontrandosi in un tutto, le cui parti siano perfettamente simili, la bellezza vi si spande in modo uniforme. E come essa si rivela talora in un edificio intiero, talora in una pietra sola, è ovvio che i corpi sono belli, per essere partecipi ad una ragione comune (*κοινωνίᾳ λόγῳ*), data loro dagli dèi (I. 6. 2).

Il bello inoltre non consiste nella grandezza (aristotelismo): " se la *forma* in un oggetto grande ed in uno piccolo colpisce e commuove del pari lo spettatore, la bellezza non può dipendere dalla grandezza della massa. E poi, finchè la forma è fuori (dell'anima), da noi non è appresa; quando invece penetra nell'anima nostra ci commuove. La forma sola penetra nell'anima nostra attraverso gli occhi, perchè i grandi oggetti non potrebbero materialmente penetrarvi: quindi la loro grandezza deve per così dire contrarsi (I. 6. 2) „.

Opponendosi così agli Stoici, ai Pitagorici, agli Aristotelici, Plotino non aderisce neppure incondizionatamente alla dottrina platonica; egli anzi non definisce la bellezza, perchè ben comprese che la Bellezza s'impone, commuove, spaventa, illumina: è la forma ideale che irradia del suo splendore tutti gli esseri.

Notiamo però che combinando la dottrina platonica delle idee coi concetti peripatetici di *forma* e di *atto*, Plotino avverte in ogni oggetto la forma e l'atto, l'essenza cioè e la potenza: la *forma* per lui è lo stesso *atto* (*Enn.* II. 5. 2), perchè sola possiede la bellezza e la bontà (1). Ma se il bello consiste nella forma ed eccede la materia, può ridursi ad una pura e semplice imitazione della natura materiale (*φύσις*)? Plotino lo nega. " Alcuni cercano di spregiare le arti dicendo che esse solo imitano la natura. Noi rispondiamo che le essenze degli oggetti sono alla loro volta forme di altre essenze, e poichè le arti non si limitano ad imitare le cose, ma risalgono fino alle ragioni ideali, donde traggono la loro natura, e così per loro stesse creano molte cose, aggiungono ciò che manca alla perfezione degli oggetti (2). Sembra che Fidia abbia rappresentato Giove senza aver gettato lo sguardo sulle cose sensibili, concependolo tal quale esso si mostrerebbe se mai si presentasse ai nostri occhi (V. 8. 1) „.

In sostanza, Plotino nel fondo intimo della nostra ragione ha osservato un tipo assoluto di grandezza spirituale, cioè di perfezione (3). " Nell'arte infatti la bellezza non si riporta alla *materia*, ma rimane a sè da un lato, dall'altro ha prodotto una forma inferiore che, nella materia, non ha potuto conservare la sua purezza nè soddisfare del tutto alla volontà dell'artista, e non ha più altra perfezione oltre quella puramente materiale. Se l'arte può produrre opere conformi alla sua essenza, deve significare una Bellezza più grande e più vera avendo la bellezza artistica più grande e più bella di quanta si ha negli

(1) Per il valore di queste teorie cf. la mia sopracit. Memoria, pag. 29.

(2) Sussiste così un concetto fondamentale, donde nasce uno speciale elemento che converte i tipi intellettivi in fantastici, li estrinseca e li esprime sia col magistero della parola, sia colle industrie dell'arte.

(3) Cf. Lévêque, *Le spiritualisme dans l'Art*, pag. 186.

oggetti. Invero, come ogni forma si estende passando nella materia, essa diviene più debole di quella che rimane una. Tutto ciò che si estende, si allontana (dal suo intimo), come la forza, il calore... così pure è della bellezza (V. 8. 1) „.

Sussiste pertanto un principio fondamentale, donde nasce un elemento speciale che converte i tipi intellettivi in fantastici. “ Un soggetto informe, ma per sua natura capace di accogliere una forma (*εἶδος, μορφή*), in quanto è senza forma e ragione, è brutto, irrazionale, deforme (I. 6. 2) (1) „. Forma e ragione dunque si trovano in fondo all'estetica: il solo irrazionale è deforme, perchè “ come elevandoci dal dominio dei sensi, troviamo delle belle occupazioni, abitudini, scienze, virtù „ così la bellezza dell'anima consiste nell'essere scevra di tutto ciò che è estraneo alla ragione ed alla forma, “ fatta sicura dalle passioni che le derivano dal suo commercio col corpo, quando troppo vi si abbandona; liberata dalle impressioni esterne, purificata dalle sozzure, ridotta infine a se stessa, essa depone la bruttezza comunicatale da una natura a lei estranea (la materia) I. 6. 5 „.

Così la forma razionale è la vera causa della bellezza. “ Solo la potenza che sta nel mondo intelligibile ha l'essere ed il bello. Che diverrebbe l'essere senza della bellezza, questa senza di quello? Annullando l'uno, si annienta l'altro: l'essere è da desiderarsi perchè è identico col bello, questo è piacevole perchè è l'essere. Quale delle due sia il principio dell'altra non occorre ricercare: tutt'e due sono della *medesima natura*. La bellezza mendace (corporea) ha bisogno di accogliere l'immagine di quella vera e sussistere; non esiste se non in quanto partecipa alla bellezza reale: più vi partecipa e più è perfetta (V. 8. 8) „.

Il bello inoltre deve avere “ una causa o bella, o brutta, o indifferente. Se fosse brutta non potrebbe produrre il suo contrario; se indifferente non si comprende perchè produca il bello anzichè il brutto: dunque ciò che produce tanti belli oggetti deve avere una bellezza assai superiore (V. 8. 2) „. È così affermato implicitamente il monismo psicologico: poichè il Bello

(1) Questi accenni di Plotino sulla deformità sono stati assai tardi ricordati, tra gli altri, da Siriano, *Comment. ad Metaph. Aristotel.* (ed. Kroll), pag. 37.

piace, ciò è dovuto al fatto ch'esso è conforme all'Essere, supremo principio metafisico.

Riassumendo: un oggetto è bello in quanto la forma dell'Essere metafisico gli si comunica. E tanto più noi l'apprezziamo, quanto meglio sappiamo " rendere analogo il nostro organo all'oggetto della nostra contemplazione. Mai l'occhio ha percepito il sole, se prima non ne ha colto la forma, così l'anima nostra non può intuire la causa della bellezza (il Bello), se prima non è divenuta bella essa stessa (I. 6. 9) „.

Plotino ci porge poi una descrizione suggestiva del Bello intelligibile, causa razionale e formale d'ogni nostra dilettazione estetica: " Supponiamo che quaggiù ogni essere rimanga ciò che è, pur confondendosi cogli altri, per quanto ne sia capace, in modo che tutto si perda in una unità, come una sfera trasparente, posta fuori dello spettatore, nella quale figgendo lo sguardo possiam vedere tutto quello che comprende: dapprima il sole e le altre stelle, poi il mare, la terra, tutti gli animali. Nell'istante in cui ci rappresentiamo questa sfera trasparente, che rinchiude tutte le cose mobili ed immobili, o mobili ora ed altra volta immobili, conserviamone la forma, sopprimendone la massa, l'estensione, ogni altra proprietà materiale, senza però diminuirne il volume (V. 8. 9) (1).

E altrove: " Nella natura vi è la ragione della bellezza, archetipo della bellezza fisica, più bello di quello naturale è il bello psichico (2). Quest'ultimo, essendo più evidente nell'anima virtuosa, si accosta di più alla Bellezza, perchè comunicando all'anima una luce che proviene da una luce derivante da un lume superiore (Bello assoluto), fa comprendere quello che è la ragione della Bellezza superiore, non avventizia, nè posta in un oggetto diverso, ma in se stessa. Così non è semplicemente una ragione, ma il principio creatore della bellezza di una Ragion prima che

(1) " Quando tutti i filosofi anteriori a Jamblico ammettono una pluralità di dèi, affermano che il Dio superiore all' essenza è Uno, e che gli dèi, che formano una moltitudine, sono essenze vivificate dalle irradiazioni dell'Uno „. Così Damascio, *De principiis* (ed. Kopp), C, pag. 134.

(2) Diversamente interpreta il Bouillet, che non segue il Ficino, come fa il Volkmann. A me pare che l'espressione *παρ' οὗ ὁ ἐν τῇ φύσει* sia una glossa.

è nell'elemento psichico: è l'intelletto eterno, immutabile, non fortuito (V. 8. 3) „. — E inoltre: “ Quelli poi che non ne comprendono il complesso, non giudicano bello che ciò che colpisce i loro sguardi; ma quelli che, simili a uomini ebbri di nettare, hanno l'anima penetrata dalla bellezza intelligibile, non sono più semplici spettatori; l'oggetto contemplato ed il soggetto contemplante non sono più diversi tra loro. Se l'anima ha uno sguardo penetrante trova in sè l'oggetto che contempla..... Tutte le volte che si contempla un oggetto, lo vediamo fuori di noi. Orbene bisogna trasportare in noi stessi lo spettacolo del mondo intelligibile, contemplarlo come un oggetto col quale noi c'identifichiamo. Così l'uomo, invasato da una Divinità (1) o da una Musa, contemplerà questa Divinità in se stesso, essendo capace di contemplarla (V. 8. 10) „ (2).

La mitologia a tal punto soccorre al nostro filosofo, che in una mirabile visione del mondo ideale, ci dischiude, per così dire, lo spettacolo della Bellezza eterna. “ Ecco Zeus, il più antico degli dèi, il loro capo, che si avanza nella contemplazione del mondo ideale, seguito dagli dèi, dai genii, dalle anime, che possono contemplare questa visione. Questo mondo divino diffonde la luce su tutti in un luogo invisibile (3), elevandosi al disopra del suo orizzonte sublime, illumina tutte le cose e le inonda di sua luce: abbaglia quelli che son posti in basso della sommità dov'esso brilla, e, come il sole, li costringe spesso a rimuovere i loro sguardi, che non possono sostenerne lo splendore; gli uni si elevano e contemplano, gli altri ne sono conturbati, perchè lontani. Osservandolo, quelli che possono contemplarlo affiggono i loro sguardi su di esso e su ciò che comprende; tuttavia non sempre vi si accompagna la visione: uno vi scorge brillare la fonte e l' essenza della giustizia, un altro è abbagliato dallo spettacolo della sapienza, di cui gli

(1) Preferiamo la lezione del Volkmann: *φοιβόληπτος*.

(2) V. Thomassin, *Dogmata Theologica*, I, 330-332.

(3) Ricorda Platone: “ il luogo che è al disopra del Cielo „. Coi medesimi termini Plotino è ricordato da Proclo (*Theol. plat.*, IV, 16, pag. 215). Ma come “ volta infra celeste „ in Plotino non si trova; il Creuzer però esagera affermando che questa espressione non si riscontrasse nell'edizione di Eustochio. Il Bouillet, riportandola a Teodoro d'Apamea, ritiene che sia un'ipotesi gratuita.

uomini hanno quaggiù una pallida immagine... Ultima ad apparire è la bellezza che brilla tutta quanta nella realtà come in quelli che vi partecipano. Tutto invero brilla nel mondo intelligibile e, coprendo di splendore quelli che lo contemplano, li fa parer belli. Così degli uomini, che abbiano asceso un'alta montagna, brillano d'un tratto dello splendore dorato riflesso dal sole. Ora il colore, che riveste il mondo intelligibile, è la bellezza che vi sboccia nel suo fiore, o piuttosto tutto è colore, bellezza, nelle sue profondità più intime, poichè la bellezza nel mondo intelligibile non è un fiore che sbocci solo alla superficie (V. 8. 10) „.

Ciò posto, l'affermazione di una Bellezza assoluta era la conseguenza logica di tali poetiche interpretazioni. Ed il nostro filosofo non esita un istante ad affermare non solo la possibilità ma la realtà stessa. " L'intelletto (νοῦς), allorchè pensa qualche intelligibile come determinato, in un certo qual modo si sminuisce, e, sebbene accolga quanti enti vi sono nel mondo ideale (1) o ne pensi un solo, ha una sola forma intelligibile. Pensandoli anche tutti insieme, si trova pure in difetto (ἔτι ἐν δεήσει). Se occorre che contempli Quello, che è il Bello Universale (πάγκαλον), vario e non vario, l'anima ne ha desiderio e non dice perchè lo desidera, mentre la ragione rivela che Esso *è realmente*, poichè tutta la natura di Quello che è il migliore ed il più amabile consiste in Quello che è senza forma (ἀνειδέῳ) (2). Invero qualunque oggetto si mostri all'anima, essa, riconducendolo ad una rappresentazione (εἶδος), ne ricerca il principio informatore (τὸ μορφῶσαν). Ma la ragione c'insegna che ciò che ha una forma, la forma è la rappresentazione, è misurabile tutto, ma non è tutto, nè a sè sufficiente, nè di per sè bello, ma frammisto a qualche cosa (3). Pertanto, oltre agli oggetti belli, ciò che è realmente bello, il Bello trascendentale (τὸ ὑπέρκαλον), non è misurabile. Se è così, Esso non si può formare nè rappresentare. Senz'alcuna rappresentazione (ἀνείδεον) dev'essere dunque

---

(1) Inesatto il Bouillet, *Les Enn. d. Plotin*, III, 471: " che fa che alcun oggetto diminuisca (!) „.

(2) Anche qui il Bouillet (v. sopra) è inesatto, come pure il Ficino (ed. Creuser).

(3) Il Bouillet (ibid.) è inesatto, come pure il Ficino (ed. Creuzer).

il Bello metafisico, *Quello che è.* Splendidissima è la sua natura, come l'attesta lo stato d'animo degli innamorati, che, fino a quando si attengono all'oggetto sensibile, non amano veramente. Ma solo quando viene a formarsi nella loro anima indivisibile (*ἀμερής*) una rappresentazione ideale, allora nasce l'amore. Si cerca infatti di contemplare l'oggetto amato per calmarne l'ardenza che divora (*μαραινόμενον*). Ma se poi dobbiamo elevarci ad un oggetto ancor meno rappresentabile, questo tosto noi desideriamo; e quello che abbiamo prima provato è solo un amore di una luce grande (che deriva) da una debole fiammella. Così la forma è il vestigio di Chi non ha forma..... (1). Se la materia poi non è amabile, ma Quello che è stato significato a noi per mezzo della rappresentazione (*εἶδος*) e quest'immagine viene dall'anima, l'anima ne è più intelligibile ed amabile, e più ancora l'intelletto; convien quindi comprendere il principio della Bellezza in Quello che non è rappresentabile (*ἀνείδεον*) VI. 7. 33. „.

Plotino poi ne dimostra la possibilità. " In che modo possiamo essere uniti alla Bellezza senza vederla o rappresentarla? Se la vediamo come un oggetto distinto da noi, non le siamo ancora congiunti, se la visione implica la relazione con un oggetto esterno, non vi ha visione, o almeno questa consiste nella identità di chi vede con ciò che è veduto. Questa visione è una specie di autocoscienza (*σύνεσις καὶ συναίσθησις*), per cui ci sentiamo e ci riconosciamo (V. 8. 11) „. Ora, è per mezzo di questa coscienza che possiamo metterci in relazione colla Bellezza Sovrana. Ma come possiamo averne un probabile criterio di verità? Notiamo che per Plotino la filosofia del Bello è analoga a quella del Vero, o meglio le è parallela: tanto l'una che l'altra non si distinguono dalla sua dottrina morale. " La ragione si chiede che cosa renda l'anima eccitabile all'amore, donde emana quell'aureola di luce che corona tutte le virtù. Prendiamo delle cose contrarie agli oggetti belli e loro paragonate quanto vi può essere di brutto nell'anima... Supponiamo un'anima brutta: dedita all'intemperanza, ingiusta, in preda ad una folla di passioni, tremante, spaventata dalla sua viltà e debolezza, dall'invidia per la sua bassezza, depravata, non vorrà che le volontà impure, sensuali, compiacendosi nelle turpitudini.....

(1) Anche qui è errata l'interpretazione del Bouillet (v. sopra).

Sotto la maschera della bellezza la turpitudine si è introdotta nell'anima, l'ha abbrutita, ricolma di ogni sorta di vizio, resa incapace di una vita pura, puri sentimenti, ridotti ad un' esistenza oscura, infetta dal male, avvelenata da germi mortiferi, impedita di contemplare ciò che dovrebbe, rimanere sola con sè stessa; trascinata in questo stato necessariamente verso le cose sensibili, assorta nel suo commercio col corpo, sprofondata nella materia ed accoltala anzi in sè, ha mutato forma per la sua mescolanza con una natura inferiore. Così un uomo caduto in una pozzanghera non permetterebbe più a' suoi occhi di scoprire la sua bellezza primitiva, non avvertirebbe che l'impronta del fango che l'ha insozzato. La sua bruttezza nasce dall'intervento di un'altra cosa; vuole riacquistare la sua primitiva bellezza? deve lavare le macchie, purificandosi ritorna qual era prima (I. 6. 5) „.

Il bello adunque ci è dato dalla luce di verità che irradia le anime nostre. La sapienza infatti è il fondamento dell'arte. “ Una certa quale sapienza elabora tutti i prodotti della natura o dell'arte nella loro manifestazione. Sola, l'esistenza di questa saggezza rende l'arte possibile. Il talento dell'artista ci riconduce alla sapienza della natura che presiede alla produzione di ogni opera artistica. Questa sapienza non è una serie di dimostrazioni, ma forma tutta intera un'unità: non è una molteplicità ricondotta all' unità, ma un' unità che si risolve in una molteplicità. Se si ammette che questa sapienza è la Sapienza prima, non v' ha nulla da cercare oltre di essa, perchè indipendente da ogni principio, dimorante in se stessa. Si dice poi che la natura possegga la ragione e ne abbia il principio; e noi ne chiediamo il perchè. Se ci si risponde che procede da un principio superiore, noi chiederemo donde questo principio procede: se da nulla proviene, noi ci fermeremo..... La sapienza vera è l' essenza... Nel mondo intelligibile le cose sono delle forme belle (*καλὰ ἀγάλματα*), come si comprendono nella mente del sapiente; non dico delle forme rappresentate, ma di quelle reali (*ὄντα*). Perciò gli antichi dicevano che le idee sono *esseri reali* (V. 8. 5) „ (1). E poi, con linguaggio ispirato alle più vive

(1) Cf. Covotti, *Il Kósmos noetòs e la sua posizione storica*, pagg. 28-30; ed anche Ottino, *Gli Inni di Proclo*, pag. 102.

e seducenti manifestazioni dell'arte ellenica, Plotino ci descrive mirabilmente la Sapienza che, fondamento dell'arte, ci si rivela qual simbolo di luce intellettuale (cf. *Enn.* V. 8. 4) (1).

Tale è il criterio logico dell'estetica plotiniana. Ma la Verità non basta: vuolsi ancora considerare l'Amore, che va posto al fianco della Scienza, perchè a' suoi occhi il Bello ed il Buono non si distinguono, anzi sono lo stesso principio metafisico, che si rivela sotto un duplice aspetto (2). Il Bello ed il Buono nell'Amore ritrovano per così dire la loro medesima natura: verso di essi il pensiero ed il sentimento ci trascinano a seconda che più profondamente l'Amore a noi si manifesta. Bisogna cercare il Bello ed il Buono per la stessa via: l'ascesa dell'anima percorre gli stessi gradi, qualunque sia l' oggetto che ne abbia agitate le ali. Per conseguenza ci è dato di coglierne il momento aretologico. " Interroghiamo gli uomini che amano le bellezze incorporee su quello che essi provano. Che cosa sentite in presenza delle nobili occupazioni, dei buoni costumi, della temperanza, degli atti cioè e dei sentimenti virtuosi e di tutto ciò che costituisce la bellezza delle anime? Che cosa provate, quando contemplate la vostra Bellezza interiore? donde i vostri trasporti, donde i vostri entusiasmi? perchè vi augurate allora di unirvi a voi stessi, raccogliervi, isolandovi dal corpo? poichè è Quello che provano coloro che amano veramente. Qual' è dunque l'oggetto di tante emozioni? Non è una figura, nè un colore, nè una grandezza qualunque: è un'anima invisibile dotata di una sapienza invisibile, in cui si vede brillare lo splendore di tutte le virtù, allorchè contempliamo in noi o negli altri la grandezza del carattere, il buon costume, la pura temperanza, il valore dall' aspetto imponente, la dignità ed il pudore dall'incesso costante, calmo, imperturbabile, e sovratutto, l'intelletto simile a Dio, splendente di luce. Ammirando ed amando questi oggetti, per qual ragione li proclamiamo belli? Essi esistono e si manifestano: chi li vede non può non affermare che essi sono esseri reali. Orbene — conchiude Plotino — cosa sono gli esseri reali? sono belli (I. 6. 5) „.

---

(1) Reminiscenza di Sofocle (*Oedip. ad Col.*, v. 1375).

(2) Cf. il mio lavoro: *Plotino ed il mito dell'Amore*, pag. 12.

A ragione poi si dice che il Buono ed il Bello siano per l'anima come un rendersi simili a Dio, principio della Bellezza e della Realtà, o piuttosto l'Essere è il Bello, il Buono, mentre il Non Essere è il Brutto (cf. *Enn. VI. 7. 21*; *22*; *31-34*). Il brutto è il male primo, anzi, il male stesso, come il primo Principio è il Bene ed il Bello, perchè vi ha una certa identità tra il Bene ed il Bello. Attraverso i medesimi mezzi si devono studiare la Bellezza e la Bontà, il Brutto ed il Male. Conviene considerare il Bello, come identico al Bene, da cui deriva l'Intelletto, di per sè bello... L'anima rende belli i corpi, a cui si attribuisce la perfezione della forma: poichè, essenza divina e partecipe della Bellezza, l'anima, impadronendosi di un oggetto e dominandolo, lo rende bello per quanto le è possibile (I. 6. 6) „.

Riportando il pensiero di Platone (1), il nostro filosofo ci descrive lo stato dell'anima " che s'avanza nella sua ascensione verso Dio, elevatasi al disopra di tutto ciò che le è estraneo, finchè da sola a solo contempla semplice e puro Colui dal quale tutto dipende, cui tutto aspira, dal quale tutto ha vita e pensiero, essendone Esso il primo Principio. Se alcuno lo vede, quali trasporti non deve provare, e con qual ardore non deve desiderare di unirsi con Lui, con qual rapimento non vi deve sentirsi trasportato! Chi non l'ha ancora visto lo desidera come il Bene, chi l'ha visto l'ammira come la Bontà Sovrana, è colto ad un tempo da stupore e da piacere, risente un fremito che non ha nulla di doloroso, ama di un vero amore, di un ardore senza pari, si ride degli altri amori, sdegna le cose che prima chiamava belle (I. 6. 7) (2) „. E ancora: " Coloro che han visto gli dèi ed i demoni, non riguardano più la bellezza degli altri corpi (*ibid.*) (3) „.

---

(1) Cf. *Phaedr.*, 346 e più oltre *Conv.*, 210. Tralasciando i passi già citati nella citata mia Memoria, mi permetto qui di richiamare l'attenzione su quanto non ho ancora esposto altrove.

(2) Si avverta il graduale sviluppo dei vari momenti psichici determinato dal motivo estetico. Non vi badò lo Scharrenbroich, *Plotini de pulchro doctrina*, pag. 27.

(3) Cf. Ottino, *Gli Inni Orfici*, pagg. 171 e segg. È inesatta l'affermazione dello Chaignet, *Psychol. d. Grecs*, IV, 348, che riporta al Ficino il pensiero di Plotino.

Come ci sia possibile cogliere il Bello Sovrano, Plotino l'addita più d'una volta con tutto l'entusiasmo fervente e l'ispirazione luminosa di una visione ineffabile: spettacolo di luce e di ardore, da cui l'anima rimane purificata. " Se tu vuoi accostarti alla Bellezza con un occhio torbido pel vizio, impuro, sprovvisto di energia, non potendo sopportare lo splendore di una bellezza tanto brillante, l'occhio tuo non vedrà nulla, quand'anche gli si presentasse uno spettaolo facile a contemplarsi (I. 6. 9) „. " Come dice un'antica sentenza: Il coraggio, la temperanza, la prudenza, tutte le virtù non sono che una purificazione (cf. Platone, *Phaed.* 69). Con sapienza dunque ci si insegna nei misteri che l'uomo, non purificato, soggiornerà all'Ade in fondo ad una pozzanghera, perchè tutto ciò che non è puro si compiace nel fango per mezzo della sua perversità: così i porci immondi si avvoltolano nel brago con compiacenza. Che diremo essere la vera temperanza se non l'evitare i piaceri corporei, fuggirli come impuri? (cf. *Enn.* I. 2. 3). Non è forse il coraggio il non temere la morte, il distacco dell' anima dal corpo? Chi vuole isolarsi dal corpo non deve temere la morte: la grandezza d' animo è il disprezzo delle cose di quaggiù. La prudenza è il pensiero che, staccato dalla terra, eleva l'anima al mondo ideale. Così l'anima purificata diventa una forma, una ragione, un' Essenza incorporea, intellettuale; appartiene tutta alla Divinità, in cui si trova la fonte del Bello e di tutte le qualità che gli sono affini (I. 6. 6) „. Colla pratica dunque del coraggio, della temperanza, della prudenza, l'anima nostra può cogliere il Bello Sovrano.

Finora abbiamo con Plotino considerato le varie manifestazioni della bellezza sensibile ed intelligibile, e con esse siam pervenuti all'ultimo grado della visione ideale: non ci rimane — per completare la presente indagine — che investigare il principio metafisico del Bello trascendentale. " Qual'è la causa per cui alcuni corpi ci sembrano belli, ed il nostro orecchio appercepisce ritmi melodiosi e noi amiamo le bellezze puramente morali? Proviene la bellezza di tutti gli oggetti da un principio unico, immutabile, ovvero riteniamo una bellezza per un corpo, un'altra per un altro? Se più, quali sono questi principî estetici; se uno, qual'è desso? Notiamo che vi sono oggetti,

come i corporei, non belli di per sè, ma per la loro essenza; altri invece sono belli per se stessi, come la virtù. Infatti i medesimi corpi ci sembrano ora belli, ora no; in modo che è proprio dell'uno l'esser bello, dell'altro invece la bellezza (è la stessa essenza) I. 6. 1 „. In sostanza: autogenesi od eterogenesi del Bello? Dopo quanto abbiamo finora considerato, ci sembra di poter affermare che Plotino non considera unilateralmente la quistione, ma (come già pel problema logico) egli sdoppia il quesito ed opportunamente distingue il Bello trascendentale, autogenetico, unico, da quello empirico, eterogenetico, multiforme. Del primo egli ci parla, quando ne esorta non allo studio, all'indagine, alla valutazione, ma alla vita, alla compenetrazione, al contatto col medesimo. " Che cosa crediamo provi chi vede il Bello puro, che è senza carne e senza corpo, oltre la terra ed il cielo? Tutte le cose sono contingenti e composte, non principii; ma se si giunge a vedere Colui che dà la perfezione a tutti gli esseri, pur rimanendo immobile in sè, senza nulla ricevere, e se ci si acqueta nella sua contemplazione e proviam godimento, rendendoci a lui simili, qual bellezza si vorrebbe ancora mirare? „. " Il Bello è desiderabile per sè stesso: è anzi lo scopo dei nostri desiderî (I. 6. 6) „.

Ne deriva che in quanto è trascendentale il Bello non può essere razionale, ma metalogico. " Esso è primieramente bello, tutto, dovunque, in modo che nessuna delle sue parti (per così dire) manchi di Bellezza. Chi mai dirà ch'Esso non sia bello? Solo chi non possiede il Bello nella sua totalità, non ne ha che una parte, ovvero ne è affatto privo. Se poi questo principio non fosse primieramente bello; qual altra cosa lo sarebbe? un principio superiore al *Bello stesso* (*τὸ ὑπέρκαλον*) „. Ma questo è impensabile...: "...Quello che a noi si presenta primo, poichè è una *forma razionale*, ha l'aspetto gradevole (V. 8. 8) „. È ovvio che questa forma, puramente intelligibile, è quella per cui le creature e la ragione sono congiunte colla materia, mentre la ragione non è immedesimata ad essa, ma sta nel Demiurgo, e perciò non è la bellezza prima ed immateriale, ma (quella che) tende verso l'Uno, supremo principio (V. 8. 2) (1).

---

(1) Il passo è dubbio; noi accettiamo la lezione del Müller, seguìta dal Volkmann, *ἀλλ' εἰς ἓν οὗτος*. Il Ficino: sed in unum haec ipsa redigitur;

Per chiarire questo concetto Platone ci rappresenta il Demiurgo che approva la propria opera (*Tim.* 37), per farci ammirare la bellezza del modello e dell'idea. Ammirare un'opera fatta a somiglianza di un modello, non è forse ammirare il modello stesso? Se ciò si ignora, non dobbiamo meravigliarcene: gli amatori ed in genere tutti quelli che ammirano la bellezza sensibile non sanno che l'ammirano per quella intelligibile (1). Perciò Platone riporta al modello l'ammirazione provata dal Demiurgo per l'opera sua. " Esso ammirò la sua opera, e ne concepì il disegno di renderla ancor più simile al suo modello ". Affermando che l'opera è bella e che è l'immagine del modello, mostra quale ne sia la bellezza, perchè, se questo modello non fosse bellissimo, primieramente bello, di una bellezza ineffabile, che cosa vi sarebbe di più bello in questo mondo? A torto lo si critica, tutt'al più si potrà dire che questo mondo è inferiore al suo modello (cf. *Enn.*, II. 9. 17: contro i gnostici). V. 8. 8.

Ammesso poi che l'universo proceda da un principio superiore ed abbia una certa qual perfezione (come l'indagine estetica ci ha rivelato), questo principio, prima di creare, ha dovuto riflettere che era necessario formare il globo, e sospenderlo in mezzo all'universo, poi produrre acqua e spanderla sulla superficie della terra, quindi formare successivamente tutte le altre cose, contenute tra il cielo e la terra? Non ha forse dato nascimento a tutti gli animali, dopo d'aversi rappresentate tutte le forme loro, i loro organi, le loro parti esterne? Solo dopo d'aver concepito il piano del mondo nel suo complesso e ne' suoi particolari, il Demiurgo ha intrapreso la sua grande opera? No, non ha potuto fare tutte queste considerazioni. Come vi sarebbe stato condotto non avendo visto ancor nulla di simile? Tolta ad altri la idea della propria produzione non poteva eseguirla, come gli artefici che si servono delle mani e degli strumenti... Tutto ciò che è quaggiù, viene di lassù, dove è più bello assai... Il principio che produce, avendo una forma a modello, ha pro-

---

il Creuzer: sed illa ratio quae cum materia in unum coit. Il Bouillet (o. c.) segue il Creuzer, ma non ne dà la ragione. Dal Kirchhoff poi la frase è omessa senz'altro; a me non sembra però che sia una semplice glossa.

(1) Cf. *Enn.*, I, 3. 2. Questo passo è stato accuratamente commentato dal Thomassin, op. cit., I, pag. 168.

dotto facilmente tutte le forme, essendo esso e l'essenza e le forme nella loro totalità: la sua opera fu facile ed universale, essendo esso universale... Così — dice Plotino — io sono persuaso che se noi fossimo in una volta modelli, forme, essenza delle cose, e che la forma, che quaggiù produce, fosse la nostra essenza, realizzeremmo l'opera nostra senza pena, sebbene l'uomo produca quaggiù una forma diversa, perchè, divenuto individuo, ha cessato di essere universale. Ma, cessando di essere individuo, " l'uomo naviga nella regione eterea — dice Platone — e governa l'universo (*Phaedr.* 246) „.

Si può senza dubbio dire perchè la terra sia sferica, posta al centro del cosmo, perchè l'equatore sia inclinato sull'eclittica, ma si ha torto di dire che la Mente divina si sia proposto di raggiungere questi fini, perchè li ha creduti convenienti: se queste cose stanno bene, lo si deve al fatto che la mente divina *è quello che essa è.* La sua opera rassomiglia alla conclusione di un sillogismo, fondato sull'intuizione delle cause, senza premesse di sorta. Nella mente divina nulla è conseguenza, nulla dipende da una combinazione di mezzi: il suo piano è affatto indipendente. Il ragionamento, la dimostrazione, la fede sono cose posteriori. Pel fatto solo che il principio esiste, esso determina l'esistenza e la natura delle cose che ne dipendono (1). Se si ha ragione di dire che non bisogna cercare le cause di un principio, tanto più ciò si deve applicare ad un Principio perfetto, principio e fine al tempo stesso... Ora Esso è tutte le cose in una volta e perciò non lascia nulla a desiderare (V. 8. 7) „.

Le affermazioni suesposte sono di tanta importanza che ci pare indispensabile di farvi un breve commento. Poichè Plotino recisamente sostiene l'agnosticismo del primo Principio, logicamente deduce che l' opera sua non può paragonarsi a quella degli uomini; e così si oppone categoricamente all'antropomorfismo estetico, anche nelle sue più splendide manifestazioni. La stessa Bellezza Sovrana procede dal Divino ineffabile; in quanto si riflette sulle opere nostre, irradiandole di sua luce, non può essere per noi altro che un semplice mezzo, non ultimo termine.

---

(1) Chi non riscontra in questa sentenza implicita la formula ideale del Gioberti? È risaputo che il filosofo italiano aveva studiato a lungo le dottrine neoplatoniche presso gli Umanisti.

Non solo nell'ambito delle produzioni sensibili, ma anche nelle sfere più elevate del mondo ideale *l'arte non può essere fine a se stessa.*

" Essendo *τὸ ὑπέρκαλον*, il Divino rende belli quelli che l'amano e che si rendono degni di amore. Questo è lo scopo supremo delle anime, se non vogliono rinunziare alla contemplazione sublime, il cui godimento rende beati (cf. *Phaedr.* 250), e la cui privazione è la maggiore delle sventure. Non è infelice chi non possiede bei colori nè bel corpo, nè potenza, nè dominio, nè sovranità, ma chi si vede escluso unicamente dal possesso della bellezza, per cui occorre tutto rifiutare (I. 6. 7) „. Ora questo scopo supremo può essere dagli uomini raggiunto per mezzo della sapienza, sia movendo dal proprio intelletto purificato, sia considerando gli Dèi stessi ed il loro intelletto, perchè " tutti sono venerabili e belli di una bellezza inestimabile... gli dèi sono belli, non saggi ora ed ora privi di senno, ma hanno la sapienza per mezzo di un intelletto impassibile, immutabile, puro... gli dèi *non hanno a sdegno gli uomini nè invidiano* le Essenze a loro superiori, perchè *tutti sono compresi dalla Divinità* (V. 8. 3) „ (1).

E a proposito della purificazione individuale — così conchiude Plotino: " Se qualcuno di noi, non avendo coscienza di se stesso, ispirato dalla Divinità, contempla lo spettacolo che possiede in sè, mira se stesso e la propria immagine abbellita. Se lascia da parte quest' immagine, benchè bella, e si concentra nell'Unità, senza nulla scomporre, egli è ad un tempo *uno* e *tutto* con quel Dio che in silenzio gli concede la sua presenza e gli è unito in quanto lo può e lo desidera. Se ritorna alla dualità, rimanendo puro, rimane ancora vicino a Dio più che mai, e gode della sua presenza quando si rivolge a lui. Ecco il vantaggio della *conversione verso Dio*: dapprima ha il sentimento di se stesso finchè rimane distinto da Dio, ma se penetra nel suo interiore, tutto possiede; rinunciando ad avere coscienza di sè, per non essere distinto da Dio, non fa che uno con Lui... Occorre che l'anima, che studia il Divino, se ne *formi un'idea cercando di conoscerlo*; quindi sapendo a qual grande

---

(1) Cf. anche *Enn.*, II, 2. 1 e V, 8. 12. È evidente l'accenno alle pratiche teurgiche di quel tempo.

cosa vuole unirsi, persuasa che troverà la felicità in questa unione, si sprofonda negli abissi del Divino ineffabile, sino a che invece di accontentarsi di contemplare il mondo intelligibile, diviene ella stessa oggetto di contemplazione, e brilla della luce di quelle intellezioni (*νοημάτων*), che hanno lassù la loro origine (V. 8. 11) „.

In conclusione, Plotino, distinguendo un doppio ordine di manifestazioni estetiche, segue il cosidetto metodo oggettivo, in quanto si rivolge all'opera d'arte e ricerca in essa le ragioni e le leggi nascoste per cui l'opera è bella. Ma in quanto considera il soggetto artistico, studiandone i sentimenti e le sensazioni, si rivela un antesignano dello psicologismo estetico (1). Ci pare quindi che il Bénard non abbia colto interamente il pensiero del nostro filosofo, quando affermò che “ Plotino riunisce le viste di Platone e di Aristotele (?), coordinandole secondo un'idea dominatrice e nuova, l'emanazione, che si traduce nel mondo, nelle cose, nella bellezza, per mezzo del movimento e della vita „ (2). Chè, se Plotino accosta in un' intima unione l'imitazione e l'oggetto imitato, la copia e l'originale, non sopprime per il Bello oggettivo il dualismo della materia e della forma, del fenomeno e del noumeno; tutt' al più pone in luce la moderna nozione dell'ideale.

---

(1) Nell'accezione proposta dal Fierens-Gevaert, *Essais sur l'art contemporain.*

(2) V. *L'Esthétique d'Aristote*, pag. 127 e segg.

Di una proprietà generale dell'ofelimità.

Nota del Dott. GINO BORGATTA.

SUNTO. — § 1. Oggetto della nota. Il problema in rapporto all'equilibrio. — § 2. L'ofelimità non è nozione *indispensabile*, come per l'economia edonistica, all'*equilibrio* e sue equazioni sintetiche; difetti della teoria edonistica. — § 3. Le condizioni dell'equilibrio possono essere desunte dai fatti (scelte) senza conoscere e misurare l'ofelimità. — § 4. Non è però inutile, nè impossibile conoscere le proprietà generali dell'ofelimità considerandola per ipotesi una *quantità*. — § 5. Rassegna degli A. che hanno ammesso *crescente* l'ofelimità elementare delle quantità iniziali dei beni: 3 gruppi: — § 6. I) la proprietà è ammessa generale, ma trascurabile (Pantaleoni, Marshall); III) critici della teoria edonistica (Valenti e Graziadei). — § 7. II) La proprietà è ammessa per *alcuni* casi, ma posta in relazione all'equilibrio generale (Pareto, Ricci, Boninsegni) opp. no (Flux, ecc.). — § 8. Posizione generale del problema. — § 9. Secondo noi, in base all'osservazione de' fatti, la proprietà è generale. Concetto discutibile di *dose*. — § 10. Dimostrazione ed esempi. — § 11. Le varie forme delle curve dell'ofelimità.

§ 1. Oggetto di questa nota è di ricercare brevemente l'estensione che ha nell' economia concreta una proprietà dell'*ofelimità* elementare (o grado finale dell'utilità soggettiva dei beni), che gli studiosi di economia pura hanno in genere considerato solo o come proprietà di casi eccezionali, o trascurabile nella considerazione dei fenomeni e dell' equilibrio economico. Per intenderci, la proprietà cui accenniamo è la seguente: *la curva dell'ofelimità elementare dei beni, e di varî gruppi strettamente complementari di beni, è crescente per un tratto maggiore o minore dal suo inizio.* Prima di fare una rapida rassegna delle varie teorie in proposito e di esporre le nostre brevi considerazioni, è opportuno porre questo problema speciale in relazione al posto che le nozioni sull' ofelimità, sulle sue proprietà, misurabilità, ecc., vengono ad avere nella concezione dell'equilibrio economico generale. La nostra ricerca non parte dal presupposto

della *misurabilità* dell'ofelimità o della conoscenza di questa, come *indispensabile* alla conoscenza dell'equilibrio: criterio col quale invece il problema è stato in genere considerato da quella ch'è comunemente chiamata *teoria edonistica.*

§ 2. Riassumiamo le considerazioni più essenziali al riguardo:

I. Gli elementi che le scienze psicologiche e fisiologiche attualmente ci offrono sulla misurazione del piacere e del dolore (in quanto hanno rapporto coi fenomeni economici) sono insufficienti a dedurne le uniformità più importanti ed elementari del fenomeno economico. Se dal punto di vista della psicofisica si è oggi oltrepassata la legge cosidetta di Fechner o Weber, dal punto di vista dell' economia non si ha molto di più (1). Queste insufficienze si rispecchiano nella teoria edonistica. Infatti:

II. Si prenda la definizione di M. PANTALEONI, per cui l'economia pura " consiste nelle leggi della ricchezza sistematicamente dedotte dalla ipotesi che gli uomini siano mossi ad agire esclusivamente dal desiderio di conseguire la maggior possibile soddisfazione dei loro bisogni mediante il minimo sacrificio individuale " (2). Si può osservare: 1° ammesse *rigorose* le premesse, e posto che le nozioni in proposito delle scienze psicofisiche sono lontane dall'esser esaurienti, l'economia pura che rigorosamente deducesse dalle premesse edonistiche, riuscirebbe così una scienza *logica*, non una scienza *sperimentale.* 2° l'ipotesi edonistica considera solo *una parte* dei bisogni o gusti degli uomini: quelli *egoistici*, mentre l'equilibrio economico è determinato in base a

(1) Si può vedere: FECHNER, *Revision der Hauptpunkten der Psychop.* (Leipzig, 1888); WUNDT, *Éléments de psychologie physiol.* (Paris, 1886); SPENCER, *Principes de psychologie* (Paris, 1875); FOUCAULT, *La psychophysique* (Paris, 1901); SERGI, *Principî di psicologia, Dolore e piacere* (Milano, 1894); TARDE, *La croyance et le désir, La possibilité de leur mesure* (" Revue philos. " 1880); TARDE, *Psychologie économique* (Paris, 1902); RIBOT, *Psychologie des sentiments,* (Paris, 1896) e, tralasciando tutti gli A. della teoria edonistica, A. GRAZIADEI, *Intorno alla teoria edonistica del valore* (" Riforma Sociale " 1900); RICCI, *La misurabilità del piacere e del dolore* (" Giornale d. Economisti ", 1905). Si ved. anche i prossimi §§. Inutile aggiungere che tutto questo non toglie che i risultati e le nozioni di un'avanzatissima psicologia ci servirebbero a dedurne leggi essenziali dei fatti economici: solo, oggi ciò non ci appare possibile.

(2) *Principî di economia pura* (Firenze, 1889), pag. 9.

tutti i gusti individuali; noi dobbiamo considerare azioni *economiche* tutte quelle logicamente dedotte dall'esistenza dei bisogni da soddisfare, siano egoistici che altruistici, superando gli ostacoli che vi si frappongono, altrimenti *i dati per l'equilibrio economico ci verrebbero parzialmente a mancare.* 3° considera come logiche azioni che spesso non sono tali: quelle determinanti (e connesse ai movimenti, trasformazioni, ecc.) dei bisogni umani (non sono risolvibili dall'economia pura se non in base ai *dati di fatto*, problemi come questi: l'*homo oeconomicus* preferisce investimenti a basso saggio e sicuri o con alto saggio e alti rischi? diminuendo il saggio dell'interesse aumenterà o diminuirà la produzione di risparmio? ecc.). 4° trascura di considerare (necessariamente) le azioni economiche non solo soggettivamente, ma oggettivamente, *logiche*. 5° essenzialmente, le teorie edonistiche non considerano tutto il fenomeno economico come un *equilibrio*, cioè sia tutte le ofelimità in ogni individuo, sia tutti i dati (prezzi o quantità od ofelimità) del fenomeno economico generale, legati come i fattori algebrici di un sistema di equazioni, da mutue dipendenze: per cui il cosidetto " grado finale di utilità " (soggettiva) viene ad essere, da *causa* del " valore ", *un* elemento o dato dell'equilibrio (1).

§ 3. - III. Dimodochè il cosidetto " teorema della bilancia dei gradi finali di utilità di Jevons o Walras " appare non più la deduzione rigorosa del presupposto edonistico (implicando perciò la nozione di piacere economico, la sua misurabilità, in rapporto al problema del valore, ecc.), ma la semplice espressione sintetica *di condizioni dell' equilibrio statico* (uguaglianza delle ofelimità elementari ponderate di Pareto). Non è quindi più caso di parlare di un " teorema ".

IV. Oggetto principale dell'economia pura viene ad essere la ricerca delle uniformità dell'equilibrio economico, statico e dinamico. Merito di Vilfredo Pareto (il quale pure nel suo

(1) Lo stesso M. Pantaleoni, che fu in Italia il più geniale e lucido espositore della teoria edonistica, ha oggi sostanzialmente accolto la concezione dell'equilibrio. Si vedano i due primi saggi degli *Scritti varî di economia*, serie III[a] (Roma, Castellani, 1911) ed il (prossimo) volume delle sue *Lezioni*.

Cours d'économie politique era ancora partito dalla nozione (iniziale) di ofelimità) è stato, oltre che di darci il concetto di equilibrio economico *generale* (il Walras aveva considerato solo l'ipotesi di libera concorrenza perfetta e non aveva considerato l'interdipendenza tra le ofelimità delle varie merci *nello stesso individuo*), appunto di dimostrare che le equazioni che debbono soddisfarsi per l'equilibrio si possono avere anche prescindendo dalla conoscenza dell'efelimità e dalla sua misurazione (1), passando prima nel *Manuale di Economia Politica* (Milano, 1906) alla nozione di *indici* di ofelimità (gli indici che dà alle linee di indifferenza, desunte dalle scelte degl'individui e dalle preferenze che queste indicano tra le varie combinazioni di merci) e nel *Manuel* (Paris, 1909) a quella di *funzioni-indici*. Le fun-

(1) Si consideri l'equilibrio dei *gusti* (o bisogni) e si abbiano i beni X, Y, Z... di cui si consumano le quantità x, y, z... Le equazioni che in ogni caso debbono essere soddisfatte per l'equilibrio sono (1) $\varphi_x \frac{\partial x}{\partial y} + \varphi_y = 0$, $\varphi_x \frac{\partial x}{\partial z} + \varphi_z = 0$, .. Evidentemente, φ_x, φ_y,... sono funzioni di x, y... L'esperienza psicologica, con uno stato avanzatissimo delle scienze psico-fisiologiche, ci potrebbe dare le ofelimità elementari φ_x, φ_y, φ_z, o una funzione Φ (l'ofelimità totale) di cui φ_x, φ_y ... sono le derivate parziali in rapporto a x, y, z.. Le equazioni (1) si ottengono da quest'altra (supposto l'ordine di consumo di x, y... indifferente o prefissato) (2): $\varphi_x dx + \varphi_y dy + ... = 0$. La quale non è che l'espressione di $d\Phi = 0$, cioè dello stato di equilibrio, supposti i consumi di x, y... con un'ofel. *totale* $= \Phi$. Si può, viceversa, passando dalle equazioni (1) all'equazione (2) e integrando questa, ottenere Φ. Se Φ è una costante, ed è un'integrale delle equazioni (2) queste avranno per integrale anche una funzione $F(\Phi) =$ cost., in cui F è una funzione arbitraria: in questo caso, l'equilibrio si stabilisce ugualmente sia che l'ofel. totale sia $F(\Phi)$ che Φ (l'ofelimità totale non è, cioè, intieramente determinata). Tralasciamo le ipotesi in cui non essendo indipendente l'ordine di consumo di x, y... (o fissato *a priori*) le equazioni (2) mancano di fattore d'integrabilità e non esiste quindi la funzione Φ (sempre partendo dalla nozione di ofelimità). Si possono invece considerare solo le quantità consumate e prescindere dalla nozione di ofelimità. In questo caso le *curve di indifferenza* (o *di preferenza*, o quell'altro sistema che si vorrà proporre migliore allo scopo) ci daranno funzioni φ_x, φ_y, φ_z...: Le equazioni (1) sono desunte dall'esperienza diretta: potranno essere tali che direttamente o indirettamente moltiplicate per un certo fattore, ci diano una funzione integrale Φ o $F(\Phi)$. [Si veda l'*Appendice* del *Manuel d'éc. pol.* e P. Boven: *Les applications mathématiques à l'économie politique* (Lausanne, 1912)].

zioni φ_x, φ_y... delle equazioni dell'equilibrio si possono derivare dalle *scelte*. Basterebbe cioè conoscere le preferenze individuali, che possiamo rappresentare colle *linee d'indifferenza* (le linee che uniscono le varie combinazioni di due merci, di cui è indifferente all'individuo goder l' una piuttosto che l'altra) e con indici che ci dicano se l'individuo preferisce una o l'altra serie di combinazioni, e quindi avere semplici *funzioni* che crescano quando cresce il piacere od ofelimità e decrescano quand'esso decresce. Questo ci dispensa dal dimostrare la natura, la misurabilità (e la misurazione effettiva) ecc. dell'ofelimità (1). Se però si possono avere, prescindendo dalla nozione d'ofelimità, le condizioni dell'equilibrio economico *statico*, tale nozione e misurazione diverrà probabilmente necessaria in uno sviluppo ulteriore dell'economia sintetica, e sovratutto della *dinamica* economica,

(1) L'espressione analitica della linea d'indifferenza di 2 merci A, B, di cui le combinazioni $a_1\,b_1$; $a_2\,b_2$; a_3, b_3... sian tutte equivalenti fra loro, è data, coll'interpolazione di queste, dall'equazione $f, (a, b) = 0$ in cui dati ad a i valori a_1, a_2, a_3... si avranno per b i valori b_1, b_2, b_3. Quest'evoluzione è analoga a quella della meccanica razionale passata dalla considerazione della " forza „ come *causa* del movimento, alla considerazione del movimento in sè. Già un economista d'ingegno, cui i tempi suoi non han forse consentito di trarre dalle geniali intuizioni tutte le feconde deduzioni possibili, A. Cournot, in principio delle *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses* (1838) affermando non la impossibilità di dedurre le (cosidette) leggi di domanda o vendita ecc. dalle utilità, ma di poter esprimere algebricamente i bisogni o gusti degli uomini, ha tentato di partire da equazioni e curve oggettive, di domanda, per stabilire le relazioni tra prezzi e quantità smerciate.

Dunque le *scelte* (e loro considerazione esperimentale) non hanno più lo scopo di darci una misurazione del piacere ecc., come in Wicksteed: *The alphabet of economic science* (1888), ma solo certe funzioni-indici che ci evitano il bisogno di conoscere e misurare il piacere stesso, per aver le condizioni dell'equilibrio. Non andrebbe più perciò l'osservazione del Ricci (*La misurabilità*, cit., pagg. 31-2): " la scelta ci consente di asserire che $\varphi = \Psi$, ma quest'uguaglianza sussiste solo al momento della scelta, non dopo. La scelta non serve a giudicare l'uguaglianza fra due piaceri che siano *contemporaneamente* a disposizione di un individuo e per conseguenza non si può mostrare un piacere doppio o in generale multiplo di un altro. Per la via delle scelte non arriviamo dunque felicemente in porto „. D'accordo, se " il porto „ è quale lo ha in mente il Ricci e anche in parte il Wicksteed; ma non più se è quello cui si è diretto il Pareto.

tanto maggiormente quanto più l'economia diventerà di *pura*, *applicata* (1). Concludendo, dunque:

§ 4. - V. La configurazione di equilibrio economico (statico) è indipendente dall'ipotesi di misurabilità del piacere od ofelimità. Quest'ipotesi non è concretizzata dallo stato attuale delle scienze psico-fisiologiche. Dalle rappresentazioni (linee di indifferenza, preferenza, ecc.) delle scelte (*reali* e *virtuali*) e quindi dei gusti degli uomini, e dai loro caratteri, possiamo dedurre le proprietà generali dell'ofelimità e viceversa. Combinando i risultati dei varî procedimenti, se non dare un'analisi esauriente dell'ofelimità, la sua misurazione (aritmetica), cioè la *forma precisa* delle varie curve di essa, possiamo però (e può essere scientificamente utile, anche in rapporto alla concezione sintetica dell'equilibrio) conoscere le proprietà generali di essa, che ci saranno tanto più opportune nello studio della dinamica economica. La presente nota ha appunto lo scopo di dilucidare una di queste proprietà. La quale perciò corrisponderà ad un certo carattere delle *linee di indifferenza*. Questo dilucideremo meglio in § seguente.

Basterà per ora dire che supposta una linea d'indifferenza delle combinazioni di due beni aventi i caratteri d'ofelimità elementare indicati nel § 1, la curva sarebbe *concava verso gli assi per un certo tratto iniziale*, dopo il quale *diventa convessa*. E certo, se l'osservazione della pratica realtà, le condizioni delle statistiche, ecc., ce lo consentissero, il nostro studio riuscirebbe assai più dimostrativo considerando esclusivamente le *scelte*, che non ragionando di un'entità così mal nota qual'è la ofelimità.

§ 5. Consideriamo ora rapidamente gli autori che hanno accennato al problema. Un'osservazione generale che può farsi a tutti quelli di cui parleremo, eccetto il Ricci (2), il Boninsegni e sovratutto il Pareto, si è che essi non lo hanno considerato in

---

(1) Ved. le *note* del dott. L. Amoroso: *Contributo alla teoria matematica della dinamica economica* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1912) pag. 263 e s.

(2) U. Ricci: *Curve crescenti di ofelimità elementare e di domanda* (" Giornale d. Economisti, 1904, pagg. 112 e s. (specialm. 129 e s.).

rapporto all'equilibrio generale, tenendo conto e della interdipendenza delle ofelimità individuali fra loro e di queste con tutti gli altri fattori dell'equilibrio; ripetiamo, quest' indagine non deve aver per scopo di contribuire alla dimostrazione o discussione della teoria che fa dipendere il valore dal grado finale di utilità od ofelimità elementare, ma di dilucidare una proprietà generale di questa.

Non riesporremo la nota teoria della decrescenza dei gradi finali di utilità, o dell'ofelimità elementare di successive dosi aggiunte e consumate, supponendola nota (1).

La maggior parte degli economisti edonisti e preedonisti non fa che ammetter questa legge o proprietà dell' ofelimità senza rilevar eccezioni: e non solo i precursori (2) ma, salvo qualche accenno più che incidentale — quando vi è —, i maggiori interpreti della teoria, quali il Gossen (3), il Jevons (4), l'Edgeworth (5) ed altri.

Quelli invece che hanno considerato, in vario modo, le eccezioni alla legge dell'ofelimità elementare decrescente, si possono dividere in tre gruppi: I. economisti che considerano la curva dell'ofelimità elementare rapidissimamente crescente, si può dir per *tutti* i beni, per le prime piccolissime dosi, ritenendo del tutto trascurabile per l'economia questo rilievo; II. economisti che hanno considerato tale proprietà solo di *certi* beni,

---

(1) Geometricamente, la teoria si può rappresentare con una curva continua (supponendo variazioni finite per dosi piccole quanto si vuole), che, massima per la quantità iniziale del bene, diminuisce continuamente col crescere della quantità, fino a diventar zero e poi negativa. Analiticamente la si esprime con una funzione decrescente della quantità: sia A il bene e U la funzione di ofelimità totale di A, sarà $\varphi(a) = \frac{dU}{da} < 0$.

(2) Già il Condillac (*Le Commerce et le Gouvernement considéré*, etc., 1803) diceva: " il valore delle cose aumenta colla scarsità e diminuisce coll'abbondanza... (il valore) dipende dai bisogni, essendo meno nelle cose in sè stesse che nella stima che noi ne facciamo, ed esso varia secondo l'intensità dei bisogni e l'offerta dei beni ". Si ved. Galiani, Barbon, Bentham ed altri ricordati da L. H. Haney, *History of Economic Thought* (New York, 1911).

(3) Gossen, *Entwickelung der Gesetze des menschlichen Verkehrs* (ediz. del 1889).

(4) Jevons, *The theory of Political Economy*, London, 1911, pagg. 45 e s.

(5) Edgeworth, *Mathematical Psychis* (London, 1881), pag. 6.

come eccezione alla legge gosseniana di decrescenza, ecc.; III. economisti che hanno additato e impiegato queste eccezioni solo come critica della teoria edonista del valore (e per sostenere quindi indirettamente altre teorie del valore, specie quella del *costo* o simili).

§ 6. - Gruppo I. Citeremo sovratutto il Pantaleoni ed il Marshall. Il primo (1) dice precisamente: " se supponiamo una prima dose infinitamente piccola, la soddisfazione che essa ci potrà procurare sarà impercettibile e dovrà esprimersi con una ordinata piccolissima. Possiamo addirittura assumere che ogni curva esprimente i gradi d'utilità di *un qualsiasi bene* incominci da zero e si elevi rapidissimamente fino ad un punto culminante dopo il quale essa ricade più o meno lentamente a seconda del bene di cui si tratta „ ed il Marshall dice qualcosa di analogo (2) per quanto non consideri il fenomeno del tutto

(1) *Principii* cit., pagg. 88-89. Il Graziadei, nel suo studio critico cit. (*Intorno alla teoria*, ecc.) parla del Wicksteed, ma non nota queste osservazioni del Pantaleoni, del Marshall ed altri maestri della teoria da lui criticata, le quali avrebbero reso in gran parte inutili le sue critiche, prevenendole.

(2) *Principles of Economics* (London, 1907), pag. 94 e solo in nota: " It may be noticed here, *though the fact is of but little practical importance*, that a small quantity of a commodity may be insufficient to meet a certain special want; and there will be a more than proportionate increase of pleasure when the consumer gets enough of it to enable him to attain the desired end. Thus, for i., anyone would derive less pleasure in proportion from ten pieces of wall paper than from twelve, if the latter would, and the former would not, cover the whole of the walls of his room. Or again a very short concert or a holiday may fail of its purpose of soothing and recreating; and one of double length might be of more than double total utility. This case corresponds to the fact, which we shall have to study in connection with the tendency to diminishing return that the capital and labour already applied to any piece of land may be so inadequate for the development of its full powers, that some further expenditure on it even with the existing arts of agriculture would give a more than proportionate return; and in the fact that an improvement in the arts of agriculture may resist that tendency, we shall find an analogy to the condition just mentioned in the text as implied in the law of diminishing utility „. Il M. qui identifica l'ofelimità (diretta) dei beni di consumo individuale diretto a quella di successive dosi di beni in quanto coefficienti di produzione (vedi § 8).

generale. Così un altro edonista, il Menger, vi fa pure un rapido accenno (1) e implicitamente lo riconosce il Barone colle parole e grafico 3° di pag. 13 dei suoi *Principii di economia* (vol. I).

Però criterî comuni a questi A. e più o meno esplicitamente (2) espressi sono: in parte, questo carattere della curva dell'ofelimità deriverebbe da considerazioni fisiologiche: quantità infinitesimali o quasi di beni non possono determinare neppure sensazioni nettamente rappresentabili all' uomo cosciente normale: un cm. cubo di vino aggiunto ad un altro non produrrà evidentemente *minor* piacere del primo a chi lo beve; e così via. E sovratutto, questa proprietà sarebbe, secondo essi, del tutto trascurabile per l'economia, che può senz'altro considerare l'intiera curva come tutta decrescente. Ma il concetto del Pantaleoni sul primo punto non ci sembra esatto: vi sono infiniti casi in cui la proprietà accennata non si riferisce affatto a dosi piccolissime di beni, come vedremo, e quindi non abbiam bisogno di riferirci ad un'analisi psico-fisiologica del fatto, per accertarlo e spiegarlo. Quanto alla " trascurabilità „ di essa, tutto sta nell'intendere che cosa è trascurabile e che cosa no: se, per esempio, si constatasse, come tenteremo di fare, che per gruppi numerosi di beni e per numerose classi di individui, la distribuzione del numerario disponibile (reddito) tra i varî beni di consumo avviene prevalentemente per le quantità cui corrisponde un'ofelimità elementare assai vicina al valor massimo, quando non è tale, si dirà che la proprietà è *trascurabile*?

Gruppo III. Di notevoli citeremo solo A. italiani, il Valenti ed il Graziadei. Il primo, a criticare la teoria edonistica del valore reca numerosi esempi, in cui la legge gosseniana di decrescenza non si verifica, crescendo invece l'intensità del godimento col suo ripetersi (3). Egli ammette però che vi siano casi in cui la legge gosseniana si verifica. Non rileva, come il Graziadei (cit.), che alcuni edonisti hanno prevenuta tale critica. Il Graziadei basa la sua critica alle teorie edonistiche ed alla legge

---

(1) Come fanno il Pantaleoni, cit. pag. 89, ed il surriportato periodo del Marshall.

(2) *Principî fondamentali di economia* (Roma, 1907), pagg. 30-4, 78-9.

(3) G. Valenti, *La teoria del valore* (Roma, 1890), pagg. 110-1 e s.

di decrescenza su considerazioni e nozioni date dalle scienze psico-fisiologiche. Non a torto osserva che mentre la teoria edonistica del valore parte dalla legge di decrescenza dei godimenti successivamente protratti, le scienze sperimentali al riguardo poco ancora o nulla hanno accertato: anzi, basandosi sul Wundt, rileva che esse dicendoci che mentre l'*intensità* di successivi stimoli omogenei cresce meno che proporzionalmente, il *tono* sale invece dapprincipio fino ad un massimo per poi discendere, essendo il tono delle sensazioni quello che occorre considerare parlando di piacere e dolore dal punto di vista economico, la legge avrebbe un andamento addirittura opposto (1). Parecchie considerazioni si potrebbero fare a queste critiche; ma qui non è luogo.

Non di rado vi troviamo confuse osservazioni sull'*utilità* (nel senso paretiano) a considerazioni sull'*ofelimità*. Non vediamo, inoltre, come queste obiezioni (di per sè s'intende) potrebbero fondamentalmente intaccare la teoria edonista del valore in quanto afferma i prezzi dello scambio proporzionali al grado finale d'utilità sia pur generalmente considerato decrescente per

(1) A. Graziadei, *Intorno* etc., a pagg. 872-3 dice: " le prime frazioni di pane producono all'affamato un piacere limitatissimo, poichè sono insufficienti a sollevare sensibilmente la depressione del suo organismo, non lo allontanano ancora abbastanza da quelle condizioni, di cui il dolore era la conseguenza necessaria. Man mano però ch'egli continua a mangiare, le sue funzioni vitali aumentano di vivacità. L'irritazione del suo sistema nervoso si calma: la sua circolazione diventa più ricca ed attiva... Corrispondentemente a questa modificazione di stato ed all'attenuazione continua degli stimoli dolorosi, il piacere prenderà consistenza e andrà accentuandosi sempre più. Così arriverà un momento in cui egli si troverà alla massima distanza dal dolore da cui aveva voluto liberarsi e proverà il piacere massimo... Se continuasse oltre a mangiare, l'attività del suo organismo diverrebbe ben presto eccessiva, ed il suo piacere, in corrispondenza, diminuirebbe rapidamente, fino a trasformarsi in un dolore ". Anche qui, come nelle considerazioni del Pantaleoni, prevalgono osservazioni tratte dal fatto fisiologico. Del resto, il caso in sè, appunto per questa limitazione all'elemento fisiologico, è eccezionale, e non ci servirebbe molto nello studio delle uniformità di azioni umane che si considerano appositamente medie e ripetute. L'esemplificazione del Graziadei lascierebbe supporre che la proprietà dell'ofelimità elementare da noi accennata non può aversi in rapporto ad individui non morenti di fame o di sete.

successive dosi (1): nè tanto meno si vede come queste osservazioni possano servire d' appoggio ad una diversa teoria del valore, quale sarebbe la teoria del *costo* o altra consimile (non si vede proprio il nesso logico tra proposizioni di questo genere: *a*) l'ofelimità cresce fino ad un certo punto per successive dosi per molti o tutti i beni; e *b*) il valore dipende dal costo di produzione, o dalla quantità di lavoro contenuta nel prodotto, etc.).

§ 7. - Gruppo II. È il più importante, non perchè abbia fatto delle più ampie e particolari analisi in proposito, ma perchè alcuni degli economisti che vi rientrano hanno considerato il problema in rapporto all'equilibrio generale tra i gusti o bisogni e gli ostacoli. Il Pareto tratta diffusamente dei caratteri generali dell' ofelimità al cap. IV del *Manuale*, specialmente ai paragrafi 33, 34 e segg., ponendoli in relazione colle forme o proprietà delle linee d'indifferenza (§ 44 e segg.) e dandone nell'Appendice (§ 10 e seg.) le espressioni analitiche. Egli che aveva già considerato casi di eccezione alla legge di decrescenza nelle *Considerazioni sui principii fondamentali dell' economia politica pura* (2) al § 33 (c. IV) del *Manuale* osserva appunto: " in quanto segue, supporremo che l'ofelimità sia una quantità; sarebbe del resto facile di modificare il ragionamento onde valesse semplicemente per gli indici dell'ofelimità ". E naturalmente, lo stesso per le funzioni indici. Non è dunque neppure rigorosamente indispensabile nell'analizzare le proprietà dell' ofelimità considerarla una quantità: ond'è che la proposizione del nostro § 1 si può semplicemente riferire ad una funzione che prima sia crescente col crescere della variabile, poi, sempre col crescere di questa, decresca. Il Pareto non si occupa dell'argomento *ex pro-*

---

(1) D'altra parte non comprendiamo la critica che il Ricci (*Curve crescenti* ecc., pag. 116) fa al Graziadei: e perchè pel tratto in cui la curva dell'ofelimità (totale) *cresce*, la funzione dell'ofelimità elementare debba decrescere.

(2) " Giornale d. Economisti ", 1893, pagg. 2 e 3. Se ne è anche occupato con osservazioni non molto originali ed importanti il Crocini, *Alcune questioni relative all'utilità finale* (Est. d. " Studî Senesi ", Torino, 1896). A questo gruppo si potrebbe anche assegnare il Marshall e l'Edgeworth, il quale, ci sembra, considera solo incidentalmente l'eccezione relativa al risparmio.

fesso: nota che in genere col crescere della quantità, in base all' esperienza, l'ofelimità elementare decresce; ma vi rileva eccezioni più o meno larghe, quali quelle di un collezionista pel quale i successivi oggetti della raccolta riescono spesso più accetti in quanto completano la raccolta; quelle dei piccolissimi proprietari terrieri di Francia, che divengono più avidi man mano le piccole proprietà loro s'ingrandiscono di appezzamenti faticosamente acquistati, quella del risparmio la cui ofelimità cresce per molti risparmiatori e sovratutto per gli avari. Inoltre considera eccezioni (§ 35-7) costituite da gruppi di beni strettamente complementari.

Il Ricci se n'è invece occupato appositamente in uno studio monografico, interessante ed accurato (1). Egli parte dall'osservazione del Giffen che l'aumento del prezzo del pane non diminuisce la " domanda „ di esso, anzi presso certe classi (povere) l'aumenta: il che non sarebbe concepibile se per certe quantità (iniziali) l'ofelimità elementare del pane per questi individui non fosse crescente. Riunisce tutti i casi relativi sotto una legge " dell' utilità crescente „ che varrebbe, secondo l'A., per una parte dei beni, e completerebbe la legge gosseniana di utilità decrescente: e ne dà le espressioni analitiche. Successivamente considera l'influenza di questi casi sull'andamento della curva dell'ofelimità (strumentale) del numerario (totale), giustamente deducendone che la funzione indicante i gradi di utilità strumentale del numerario (cioè le ofelimità elementari della ricchezza totale dell'individuo valutata in numerario)

$$U = f(A)$$

viene a " presentare nel caso dell'esistenza, tra gli altri di un bene consumo ad ofelimità crescente due rami distinti di equazioni $f_1(A)$ $f_2(A)$ (A è la somma di numerario) e la relativa curva è tagliata in due punti da una retta parallela all' asse delle coordinate: la legge di eccezione vi è posta in relazione alla condizione dell'equilibrio statico dell'uguaglianza delle ofelimità elementari ponderate come condizione necessaria al *maximum* di ofelimità totale, esemplificando appunto, che nel caso

(1) Ricci, *Curve crescenti* cit.

di *una* curva di ofelimità crescente " il problema di massimo edonistico cui si riferisce il teorema di Pareto ammetterà in generale due soluzioni, mentre ne offrirebbe un numero maggiore se vi fossero più curve di utilità crescente. Sicchè, trovati i valori di U, il problema non è sciolto, ma occorre calcolare le utilità totali rispettive e determinare, caso per caso, quale soluzione debba accettarsi e quale respingersi „ (1). Infine applica le eccezioni rilevate alle equazioni generali dell'equilibrio (ipotesi di libera concorrenza di Walras) e osservando che le domande (e le offerte) dei beni sono funzioni di tutti i prezzi, prescindendo naturalmente dalle altre relazioni dell' equilibrio, supponendo costanti tutti gli altri prezzi, dimostra che la curva di domanda di un certo bene è decrescente col crescere del prezzo del bene (2) e, in generale, " se varia il prezzo di una merce, *coeteris paribus*, si produce una opposta variazione nella domanda totale di quella merce „ (3) se il bene o merce obbedisce alla legge di ofelimità elementare decrescente; e se invece il bene obbedisce alla legge di utilità crescente, un piccolo tratto della curva di domanda è crescente. Rimane dunque fermo che anche il Ricci considera la proprietà solo verificabile in

---

(1) Il Ricci ne dà un esempio numerico, ed alla fine della dimostrazione osserva secondo noi giustamente: " Non è prudente escludere *a priori*, come fa il Pantaleoni, il ramo ascendente di una curva dei gradi finali di utilità, qualora esso esista; ma caso per caso, dopo l'esame analitico e geometrico delle funzioni o delle curve di ofelimità elementari e dei prezzi, si dovrà decidere se operi la legge di utilità crescente o quella di utilità decrescente; se si possa, in altri termini, trascurare o no il ramo crescente di una curva analoga a $\varphi(b)$ „ (pag. 128).

(2) Analiticamente, supposta la domanda di A, $Da = F_a, 1 (p_a, p_b, p_c \ldots)$ le derivate parziali di questa funzione rispetto alla variabile p_a sono negative, cioè

$$\frac{\partial F_a, 1}{\partial p_a} < 0.$$

si suppongono costanti gli altri prezzi $p_b \, p_c \ldots$

(3) V. cit. pag. 133-4. Inutile dire che il Ricci poteva risparmiarsi la citazione del Marshall a pagg. 136-7; poichè non si vede che cosa aggiunga la dimostrazione geometrica del M., che considera ofelimità e domanda di *un* bene, indipendentemente dagli altri, a quella del Walras che tiene conto di tutte le relazioni dell'equilibrio, sia pure limitatamente all'ipotesi della libera concorrenza.

certi casi e l'eventuale "legge di utilità crescente„ da aggiungersi a completare quella generale di utilità decrescente. Citiamo in questo gruppo anche il prof. P. Boninsegni, il quale in un acuto studio (1) considera anche queste ipotesi non dal punto di vista della realtà concreta, ma comprendendole nelle ipotesi generali che tratta analiticamente e con esempi numerici.

Tralasciamo i varî altri economisti che, come per esempio il Flux (2), hanno ammessa un'estensione maggiore o minore a queste eccezioni alla legge generale di ofelimità decrescente senza porle in relazione all'equilibrio generale.

§ 8. Passiamo a considerare direttamente il problema. Lo considereremo solo dal punto di vista dell'esperienza od osservazione dei fatti concreti, accennando solo in una seconda breve parte ai rapporti dei fatti osservati colla teoria generale dell'equilibrio.

Ci limitiamo a considerare l'ofelimità cosidetta *diretta* o di consumo diretto, per semplificare il problema; ma è evidente che il problema esiste, con ampiezza maggiore anche per l'ofelimità dei beni come coefficienti di produzione; e si può dire in tutte le infinite serie di combinazioni degli *infiniti* coefficienti di produzione è sempre rinvenibile un gruppo più o meno ampio di combinazioni in cui l'utilità strumentale (o con frase più comune, la *produttività economica*) del bene cresce per successive dosi, fino ad un certo punto. Rientra invece nell' osservazione dei cosidetti consumi diretti o personali, quella dell' ofelimità elementare di beni *complementari* (che soddisfano certi gusti solo mediante certe combinazioni tra varî beni di consumo): e infine la considerazione dell'utilità strumentale del numerario totale (reddito in moneta) a disposizione dell'individuo.

§ 9. Se consideriamo le *scelte* degli individui (s'intenda di beni e tra beni allo scopo di soddisfare direttamente i gusti)

---

(1) P. Boninsegni, *Tentativi di ricerca delle funzioni di domanda e di offerta nel caso del baratto supposte le ofelimità elementari lineari* ("Giornale d. Economisti„, 1904, pagg. 210 e s.).

(2) A. W. Flux, *Economics Principles*, 1904. Accenna ad un punto, sull'ofelimità crescente della ricchezza totale, che riprenderemo in seguito.

possiamo osservare come fatto assolutamente generale che gli individui non scelgono mai *quantità infinitesime* di beni; non solo, ma le azioni volte alla soddisfazione (diretta) dei gusti sono *sempre* in relazione a certe quantità (se consideriamo in certo modo omogeneo la materia dei beni) ossia a certe *unità* di beni, in considerazione delle quali gli scambi avvengono, in modo che gli individui o acquistano *quella* quantità (o maggiori) o unità oppure rinunciano addirittura allo scambio. Gli economisti in genere usando la parola “ *dose* „ superano queste considerazioni, almeno in parte; ma ciò non è sempre molto rigoroso. Chiamando infatti “ successive dosi „ tanto successivi millimetri cubi di vino o milligrammi di pane, quanto successive ville, spettacoli drammatici, ecc., identifichiamo fatti ed elementi che, se possono identificarsi sotto certi aspetti, non lo possono più sotto certi altri. È questione di bilancia: certe bilancie pesano solo a kg., certe altre anche i milligrammi: se pesiamo dei blocchi di marmo non usiamo bilancie da farmacista, e se pesiamo stricnina non usiamo stadere per pietre. Possiamo per un' ipotesi comoda supporre una specie di *omogeneità* nella materia onde i varî beni, cioè le varie parti dei varî beni, sono composti; ed estendere l' ipotesi anche a certi gruppi strettamente complementari di beni, ed a gruppi di beni molto *sostituibili*. L'ipotesi è discutibile, ma può esser giustificata se si pensa: 1° che noi ci riferiamo non effettivamente a fatti individuali, ma (con espressioni apparentemente individuali) a fenomeni *collettivi*, *medî*, *ripetuti*, pei quali l'apparente assurdo dell'ipotesi svanisce: riferendoci ad una collettività possiamo anche parlare di frazioni di un'*unità*, come in statistica si parla benissimo di frazioni di individuo; 2° effettivamente, l'economia concreta, col fenomeno della *moneta*, ci dà qualcosa di analogo alla nostra ipotesi, che serve abbastanza alla considerazione del nostro problema. La moneta, cioè una merce moltissimo divisibile può considerarsi grossolanamente come un denominatore comune misuratore non solo dei vari beni ma delle quantità delle singole “ dosi „ od “ unità „ dei beni.

§ 10. Ciò supposto, a noi sembra di poter affermare in base all'osservazione dei fatti, che l'ofelimità elementare se non di tutti, della grandissima parte dei beni (di consumo *diretto*)

cresce colla quantità, fino ad un certo punto o misura di questa, che appunto corrisponde spesso a quella nozione di *dose* od *unità* che gli edonisti adoperavano (1).

In corrispondenza ai loro gusti noi vediamo gli individui

---

(1) È chiaro che chiamando *successive dosi* per es., successivi abiti completi, successive case di campagna, etc., l'ofelimità (diretta) di queste " dosi „ sarà generalmente decrescente. Osservando le *scelte* degli uomini, osserviamo che, corrispondentemente al reddito disponibile, essi scelgono per consumare, un " abito intiero „, mentre pure distribuiscono altre porzioni del reddito in *certe* quantità (e qualità) di cibi, di bevande, etc. Crescendo il reddito, scelgono due, tre, etc., abiti. Può essere che l' " unità „ si limiti anche ad una parte: per es. un panciotto di colore sta a sè, sarebbe una *dose* (e si potranno scegliere successivamente due, tre panciotti di colore da soli, etc.). Come pure può essere che la " dose „ comprenda più di " un abito „: se un individuo, per es., ha da andare ad una *soirée* di gala dovrà avere non solo *un certo* abito, ma *un certo* complesso di indumenti, scarpe, guanti, cravatta, bottoni, *gibus*, etc.: la mancanza di qualcuno di essi implica la impossibilità di raggiungere il fine desiderato e diminuisce enormemente l'ofelimità (diretta, in quel momento, condizioni, etc.) delle altre quantità (parte degli indumenti) disponibili. Qui si dirà che il complesso degli indumenti costituisce una " dose „? L'importante è di non perdere la considerazione di fenomeni generali e medî in piccole sottilizzazioni verbali e formali. Inutile rammentare che l'ofelimità elementare di un bene A per un individuo X è il quoziente del piacere proveniente dal godimento di una quantità h piccolissima (infinitamente piccola) aggiunta ad una quantità a di A, già da X posseduta, diviso per la quantità h.

$$\lim_{h=0} \frac{\Delta \Phi(a)}{h} = \varphi(a).$$

Ora è chiaro che a può essere = zero. E allora l'ofelimità elementare sarà l'ofelimità della prima porzione (infinitamente piccola) di qualsiasi bene, disponibile ad X. Evidentemente il concetto di " dose „ generalmente usato non vi coincide. Non potremo considerare *infinitamente piccoli* un intiero dramma a teatro, come un gruppo d'indumenti, una casa, etc., e neppure una certa porzione di cibi e bevande, un cappello, un orologio, etc. E se, come ci sembra lecito, considereremo tutti questi (e la maggior parte degli altri beni consumo) come diverse quantità più o meno superiori ad h, è chiaro che per *certe* quantità di ognuno dei beni, l'ofelimità elementare cresce. Nel ragionamento degli edonisti si giungerebbe alla curiosa conclusione che prescindendo dall'uso della nozione di *dose* l'ofelimità elementare delle quantità iniziali dei beni è crescente fino ad un certo punto (Pantaleoni), ragionando di " dosi „ l'ofelimità elementare sempre (o quasi) decrescente.

operare in modo abbastanza approssimativamente corrispondente all'ipotesi (se ipotetizziamo che l'ofelimità sia una quantità) che l'ofelimità elementare cresca per le quantità iniziali fino ad un certo punto. Non dobbiamo lasciarci turbare dal fatto che invece di veri *beni* (omogenei) ci troviamo quasi sempre dinanzi a piccoli gruppi di beni strettamente complementari: il manico di un pennello ed il fiocco in fondo; il pennino d'acciaio ed il porta-penne; la manica di una giacca ed il busto di essa; il tetto di una villa ed i suoi muri; un cavallo d'attacco e la relativa carrozza; un mezzo litro d'acqua o vino ed il bicchiere in cui è contenuto e via, via, quanti esempi banali e usuali si vogliano citare, presentano sempre unioni di corpi materiali diversi che — rispetto alla soddisfazione di *certi* gusti, crescono di ofelimità aggiungendosi e combinandosi l'un all'altro, e all'altro, fino ad un certo punto. In questi e negli altri casi il fenomeno è sempre lo stesso: l'individuo non acquista e non potrebbe usare (o per lo meno quella frazione di bene avrebbe per lui un'ofelimità elementare assai minore) soltanto un busto di giacca senza manica, una casa senza tetto, ecc. Certo non si può dare la *prova* materiale del fenomeno, solo osservando le *scelte* quali ci sono offerte dalla realtà; e d'altra parte, come si è già detto, la psicologia non è ancora al punto da darci un'analisi generale sufficiente in proposito. Per giungere ad una proposizione più rigorosamente sperimentale occorrerebbe fare una specie — diremo così — di *inchiesta* sui *gusti* individuali, e sottoporre a ciascuno una serie di quesiti sulle combinazioni puramente *possibili* e quindi sulle serie di *scelte puramente virtuali* che ci sono indispensabili per costrurre le linee d'indifferenza. La pura osservazione della *realtà* non ci dà che *un punto* o al più *qualche* punto delle linee d'indifferenza. Sacrificando il rigore, noi possiamo completare (in parte almeno) il dato obiettivo e colla nostra esperienza subiettiva personale e ponendo i beni in relazione ai *gusti* ed agli atteggiamenti che questi assumono. Le scelte (direttamente osservate) ci dicono che gl'individui scelgono *un bicchiere intiero*, *una* seggiola, *un* letto, *un* appartamento, *una* villa, *un* automobile, ecc. Possono scegliere anche una parte (e allora la proprietà si applica semplicemente ad una quantità *minore* di bene): invece di una villa, scelgono un piano soltanto di essa; invece

di un ammobigliamento ricco e svariato, pochi sgabelli, un tavolaccio ed un paglericcio, ecc. Queste serie di *puri fatti* non ci dicono ancora se gl'individui non sceglierebbero *una parte* di seggiola (s'intenda, una seggiola, per es., tripiede non si può considerare *parte* di una seggiola; un panciotto bianco *parte* di un vestito, per quanto seggiola soltanto e soltanto panciotto senza una serie maggiore o minore di altri beni, possano non significare nulla), *una parte* di un bastone, di un servizio da tavola, di una carrozza, di una villa, ecc. Qui l'inchiesta sulle scelte può appunto esser sostituita dall'autosservazione e dal ragionamento generalizzatore. Resta inteso che si ragiona sempre di ofelimità *diretta*: un individuo potrebbe benissimo scegliere un centinaio per es. di pantaloni, di ruote di carrozza, ecc., per poi rivenderli a prezzi più o meno alti, e soddisfare poi i suoi gusti direttamente. Se quindi prescindiamo dalle ofelimità strumentali (eccettuando la moneta) noi osserviamo su noi stessi che le linee delle scelte non si fermano mai su *frazioni*, parti staccate, e non solo quantità infinitesime, di beni (e non solo per le scelte reali, ma per le virtuali) e non sapremmo che farci di un portapenne o di una parte di tavolo, di libro, ecc., naturalmente ove non avessimo la speranza di completarlo prima o poi colle porzioni complementari del bene. I nostri gusti sono evidentemente in relazione a *certe* quantità dei varî beni: queste quantità mutano da individuo a individuo, da classe a classe, secondo le condizioni del reddito disponibile, e secondo tutte le altre condizioni dell'equilibrio economico. Ma questo non toglie che la ofelimità si trovi sempre crescente per *una certa* quantità. Spieghiamoci con un esempio: se siamo ricchissimi e riceviamo una brigata d'amici che abbian, come noi, sete, offriremo loro *champagne* con un servizio di coppe costose; ma è chiaro che solo una mezza bottiglia di *champagne* ed un servizio mancante delle coppe necessarie, assolutamente non ci servirebbero e quindi le coppe e lo *champagne* che mancano alla sufficienza hanno un'ofelimità crescente; se siamo una famiglia di piccoli borghesi, in contingenze analoghe offriremo magari solo vino con un servizio di semplici bicchieri; ma anche qui ugualmente il vino ed i bicchieri che giungono alla sufficienza hanno una ofelimità crescente; se siamo dei poverissimi operai offriremo soltanto dell'acqua pura e un bicchiere solo si farà passare di

mano in mano e servire per tutta la comitiva; ma anche qui il bicchiere ed una certa quantità di acqua hanno ofelimità crescente; se siamo una comitiva di vagabondi andremo ad una fontana pubblica a prendervi acqua colle nostre mani, e l'ofelimità crescente si applicherà soltanto ad una certa quantità di bevanda. L'esempio banale, che si potrebbe moltiplicare all'infinito, vuol soltanto tener conto del concetto di " gerarchia delle merci „, così chiamato dal Pateto nel Cap. IV del *Manuale* o sostituibilità di beni di *qualità* (e quantità) diverse (vedansi specialmente i §§ 16, 18, 19, 20-22, 62-68 del Cap. IV), ma di *genere* uguale (o analogo); e constatare che il fatto della sostituibilità dei beni nella soddisfazione dei gusti e bisogni individuali non toglie affatto l'esistenza della proprietà da noi indicata, solo ne allarga o riduce il verificarsi a quantità maggiori o minori di beni (oltrechè a qualità, *specie*, ecc., diverse). Ma ripetiamo ancora, noi non intendiamo qui cercare le *forme* precise delle curve di ofelimità, ma soltanto le loro *direzioni*.

Si osservino pure i più disparati fenomeni di consumo e la proprietà vi appare assolutamente generale anche in *gusti* puramente " intellettuali „: le successive pagine di un romanzo interessante, di un libro scientifico, ecc., i successivi atti di un dramma che non ci annoi, presentano un'ofelimità elementare crescente col crescere della quantità del bene. Gli economisti hanno tenuto spesso conto del fenomeno generale solo nei casi in cui i beni sono *molto divisibili* (per es., il risparmio) oppure in casi di gruppi strettamente complementari di beni.

Per certi gruppi di beni di consumo diretto (cibi, bevande, vestiarî, alloggio) il fenomeno acquista dei caratteri particolari. È una nozione comune che gli individui hanno dei *minimi* (di consumo) al disotto dei quali, non soddisfacendo i loro bisogni, morirebbero (crederebbero di morire) di sete o di fame (come pure di freddo, ecc.). Non fermiamoci a sottilizzare o ammassare estranee considerazioni fisiologiche, ricordandoci sempre che l'economia, come le altre scienze, ragiona per *approssimazioni*, maggiori o minori. I minimi varieranno infinitamente da individuo a individuo, classe, età, paese ed epoca storica non solo, ma anche saranno elastici relativamente, nello *stesso* individuo, tanto più pensando che qui non ragioniamo di un *minimo* in rapporto all'*utilità* (quale ci può esser con mag-

giore approssimazione chiarito dalle scienze fisiologiche, mediche, ecc.) ma all'*ofelimità*. Ad ogni modo il concetto si può fino ad un certo punto ammettere. E allora è evidente che le successive quantità dei varî beni, o *generi* di beni, necessarie a soddisfare quel minimo di quei gusti al disotto del quale gli individui sentono di non poter resistere e di morire di fame, sete, freddo, ecc., avranno un' ofelimità elementare spiccatamente crescente fino a quella (sia pur elastica) quantità minima. Questa osservazione ha un' applicazione importante: quella riguardante l' ofelimità elementare (*strumentale*) del numerario totale a disposizione (per distribuirlo nei vari beni consumo) dell'individuo. Evidentemente questa sarà crescente in corrispondenza di quelle certe quantità " minime „ relative, o all' individuo o a sè ed alla famiglia, ch' ei deve con sè mantenere, ecc.: ed è quest' osservazione che ci spiega l' ofelimità elementare crescente per successive dosi di risparmio, almeno in numerosi casi, e, quasi sempre, fino ad un certo punto.

Anche qui concetti troppo particolari non debbono turbare il nostro ragionamento: per esempio, si potrebbe dire che il *minimum* di quantità indispensabile per non morir di sete può esser costituito tutto di acqua o di una porzione di acqua, una di vino, una di latte, ecc.; e che, nel primo caso, successive quantità non più di acqua, ma di vino, latte, ecc., hanno ofelimità elementare decrescente. Lo stesso pel pane, o carne, o altro cibo che soddisfi la " fame „; per le vesti, la camera, il fuoco, ecc., che soddisfino il bisogno di ripararsi dal " freddo „. È sempre questione della *bilancia* del § 9: qui dovremo riferirci non tanto a singoli beni, quanto a gruppi *generici* di beni, a beni *sostituibili*, ecc. Non solo, ma in realtà, in rapporto all'ipotetico *minimum* per l'esistenza non si dovranno questi generi (soddisfacenti la " fame „, la " sete „, il " freddo „, ecc.) tanto considerarsi staccati, quanto gruppi anch' essi strettamente complementari, poichè un individuo muore e sente di morire ugualmente se manca dell'indispensabile a non morir di fame, pur avendo sufficienti bevande e vesti, o se ha pane e casa abbastanza e manca di bevande. Rappresentando " cibi „ e " bevande „ cioè le combinazioni scelte tra i rispettivi *generi* di beni, con una linea d' indifferenza, questa correrà *parallela* agli assi rappresentanti le quantità dei due generi di beni, a distanze maggiori o minori

dagli assi e loro angolo, secondo le quantità dei beni, tra le cui combinazioni l'individuo può scegliere.

§ 11. Ritornando al fenomeno generale, fermiamo dunque, come carattere, proprietà, si può dire della maggior parte dei casi, per singoli beni, generi (sostituibili) di beni, e gruppi strettamente complementari, il fatto che l'ofelimità elementare cresce fino ad un certo punto, col crescere della *quantità*, e raggiunto un massimo, decresce poi per tutti (1).

Questa conclusione è evidentemente diversa in parte da quella del Pantaleoni e di altri edonisti, in quanto così considerata la proprietà non riguarda solo più una semplice impossibilità fisiologica, per dosi infinitesime, ma anzitutto, può abbracciare anche quantità notevoli (tutti gli atti di un lungo spettacolo; gran parte del numerario-reddito che un operaio guadagna, ecc.); inoltre, se la considerazione di essa per *un* individuo e per *certi* beni può apparir banale, non lo è più se pensiamo al fenomeno collettivo, poichè allora troviamo ch'essa si traduce in funzioni crescenti di domanda dei beni, dei gruppi complementari di beni, delle merci (materie prime) che servono a costituire i beni stessi, ecc.

Cerchiamo di dare un' espressione un po' più rigorosa ai concetti fin qui sviluppati e la cosa si vedrà meglio. La proprietà da noi analizzata si può rappresentare con una curva ACD, che consideriamo funzione delle quantità a del bene rappresentate sulla linea ABx, cioè $\varphi(a)$. I caratteri generali di questa curva sono anzitutto: di essere (se è vera la tesi enunciata) crescente fino ad un certo punto corrispondente ad una certa quantità del bene:

$$\varphi(a) > 0.$$

Corrispondentemente ad una certa quantità del bene (che può esser, come abbiamo veduto, costituita da un'unità di bene, da

(1) Non importa evidentemente la *quantità* materiale: un individuo che vuol avvelenare un altro con stricnina, ha bisogno di una quantità piccolissima del bene: ma se questa non arriva a quel certo punto, è inutile o quasi, onde le prime dosi più che... piccolissime hanno un'ofelimità assai minore di quelle ulteriori che rendono la quantità sufficiente.

più unità di quel bene (una collezione di quadri, di libri rari, di francobolli, un servizio da tavola, certe specie di cibi e di bevande, ecc., ecc.) o da gruppi strettamente complementari di beni) la funzione assume un valor massimo:

$$\varphi'(a) = 0$$

e, infine, successivamente, la funzione diventa sempre decrescente, per quanto ampia possa essere la quantità corrispondente ad un'ofelimità elementare massima:

$$\varphi''(a) < 0.$$

Esaminiamo un po' più particolarmente la curva AC (segnata coll'indice I). Essa presenta una caratteristica che finora, ci sembra, è stata trascurata anche dagli economisti che hanno ammessa più o meno largamente, come crescente l'ofelimità elementare delle quantità iniziali dei beni; la curva è cioè più o meno convessa verso l'asse Ax, in altri termini, se noi tiriamo una tangente ad un qualsiasi punto della AC la curva rimane intieramente al di sopra della tangente stessa. Il perchè di questo carattere appare evidentissimo. L'ofelimità delle successive quan-

tità necessarie a raggiungere quella quantità minima che soddisfa il gusto, che corrisponde alle esigenze così tecniche di un certo bisogno, non soltanto è crescente, ma è crescente *più che proporzionalmente*, se si può usare la parola per parti e quantità che in realtà non sono spesso omogenee. Ci si persuade facilmente che, se abbiamo bisogno di un tavolo (si parla sempre di ofelimità *diretta*), un solo gambo di esso ha per esempio una ofelimità minore di quello che avrebbe il gambo stesso quando servisse a completare in modo sufficiente le quantità di tavolo che già possedessimo. Così, tornando all'esempio del servizio di coppe; se ce ne abbisognano precisamente venti perchè venti sono tra invitati e padroni di casa quelli che devono esser serviti, qualora ne avessimo solo tre o quattro rinuncieremmo senz'altro, perchè esse non ci servirebbero affatto; e di queste tre o quattro sole disponibili, avrebbero un'ofelimità molto maggiore quelle altre tre o quattro coppe che venissero ad aggiungersi, supponiamo, alle diciassette coppe che già possedessimo, completando così il servizio. E così via per la maggior parte dei beni sia unici, sia strettamente complementari; è d'intuizione elementare che una porzione a di un bene A (è solo sotto la forma A che il bene soddisfa il gusto: le *linee di indifferenza* non ci dànno una scelta di a combinata con altro bene, salvo si tratti di un gruppo complementare, cosa che qui escludiamo per ipotesi) che serva a poco o nulla da sola (in questo caso è *quantità iniziale* del tratto AA' della Ax) avrà un'ofelimità assai maggiore, e più precisamente l'ofelimità elementare di A, se ne costituisce l'ultima porzione completatrice. Naturalmente la convessità di AC può essere maggiore o minore, e non sarà da escludersi assolutamente che possa esser analoga alla curva (III). Non comprendiamo perchè il Ricci (1) dica esplicitamente il contrario di quel che diciamo noi e lo dica implicitamente il Pantaleoni colla curva di pag. 89 dei suoi *Principî*. Se poi passiamo ai " generi „ di beni *sostituibili* accennati nel § 10 e soddisfacenti i gusti corrispondenti ai bisogni elementari dell'esistenza (" fame „, " sete „, " ricovero „, " freddo „, ecc.), questa proprietà appare ancora più spiccata e la convessità di AC sarà ancor maggiore; il *minimum* indispensabile all'individuo, indi-

(1) Ricci, *Curve crescenti*, ecc., cit. pag. 114.

viduo e famiglia, ecc., secondo le sue personali valutazioni, avrà un'ofelimità che sarà rapidamente progressiva per le ultime quantità indispensabili. Del resto questo si vedrà meglio in seguito, parlando delle linee d'indifferenza e della forma che presentano in corrispondenza della proprietà generale da noi accennata.

Ritorniamo ora a confrontare la tesi da noi enunciata con quella del Pantaleoni, Marshall, ecc. La forma *crescente* di AC non è dovuta solamente a ragioni fisiologiche (Pantaleoni), e d'altra parte la considerazione addotta dal Marshall (nota § 6) si applica visibilmente alla maggior parte dei beni e a gruppi numerosi di beni complementari e sostituibili. Nelle scelte individuali può essere che la porzione AB sia massima (in *un certo* periodo di tempo) e la curva cada ripida da C verso D''' e l'asse; per esempio l'ofelimità elementare di un dramma interessante aumenta fino alla fine di esso; ma, subito dopo, ben difficilmente un individuo si sentirebbe di risentirlo un'altra volta, donde la forma CD'''; l'individuo che ha bisogno della stricnina, dopo la piccola quantità più che sufficiente al suo scopo criminoso, non sa che farsene di altre quantità, salvo abbia altre intenzioni analoghe; l'AB è brevissima, ma la CD è pure rapidissimamente decrescente. Può darsi invece che pur avendo l'AC una certa estensione corrispondentemente alla quantità notevole iniziale, la CD sia lentamente decrescente; per es. un individuo soddisfatto il minimo indispensabile per non morir di sete, può continuare a godere ancora la bevanda sia pure con minor piacere proporzionale; chi ha bisogno di un *certo* numero di coppe almeno, può però apprezzarne altre che arricchiscano il suo servizio ed aumentino gli ornamenti della sua casa, ecc. Ma tutte queste (e altre) diverse forme ed estensioni della curva e del suo tratto crescente non appaiono rientrare nella osservazione generale del Pantaleoni.

EPICVREA

(*Pap. Herc. ined.* 168 col. 1; *Schol. in* Epic. *ep. ad Her.* § 42 sg.).

Nota di ETTORE BIGNONE.

Papiro 168, col. 1.

Debbo all'amichevole cortesia di Achille Vogliano, se mi è dato di poter pubblicare questa colonna del papiro 168, finora inedito. Assai generosamente infatti il Vogliano mi favorì la trascrizione degli apografi N(apoletano) ed O(xoniense). Non ho visto il papiro: però il Prof. Domenico Bassi, direttore dell'officina dei Papiri, a cui inviai la mia ricostruzione della prima colonna, con molta gentilezza me ne indicò le lezioni nei punti più importanti. Dodici sono le colonne che, in tutto o in parte, appariscono conservate dagli apografi, secondo la trascrizione del Vogliano. Di esse finora non si avevano che poche parole riferite dal Crönert (*Kol. und Men.* p. 183) (1), e cioè, col. 2_{17}: *ΝοτΑ Διον[ύσι]ος ΧΑΡΙΟΝ*; col. 5_7: *[ὥς φησι]ν Μνασίλας*; 11_{15}: *κατ' Αἴσωπον* (2).

---

(1) Un breve cenno ne aveva fatto veramente lo Scott *Fragm. Herc.* Oxf. 1885 p. 21. Ecco ciò che ne riferisce: " – – – – *ὑπ(ο)μνημάτ(ων) α'* – – – –. Title in Oxf., – – – – ω ‖ – – – – AT . . ON ‖ ΥΠ . MNHMAT ‖ A ‖ – – – – ⟨ T P . -I – – – – ‖ C . T H. Oxf. Title and 12 pages. Nap. dis., 16 pages unpublished The sense of some parts might perhaps be recovered. Some cols. appear to be in second person singular (perhaps extracts from letters?) ". [Quanto all'induzione circa l'uso della seconda persona del singolare può benissimo spiegarsi, come vedremo nella ricostruzione della I col., come un semplice mezzo espositivo].

(2) Gli apografi hanno O(xf.) ΚΑΤΑΙϹϹⲰΠΟΝ N(apol.) Ι . ΘΤ . ΙΟϹΟΠΟΝ. Il Crönert altro non aggiungeva, se non che il papiro era di carattere morale e che conteneva frammenti di lettere di Epicuro.

Il titolo ci è conservato nell'O(xoniense) (col. XII), ma affatto frammentario:

. . . . .ω . . .

(HΘ) . . . .

. . . . AT . . ON . . (ZH)

Y Π . M N H M A T . .

A

(NB) . . K T P H

C . T H C

Nel facsimile che do del titolo le lettere segnate fra parentesi derivano da lettura fatta dal Vogliano sul papiro, e su essa ho naturalmente basate le mie induzioni. Ciò che appare evidentemente è che si tratta di uno scritto ipomnematico, come ad es. l'*ipomnematico* di Filodemo π. ῥητορικῆς ripubblicato nel Suppl. ai *Voll. rhet.* del Sudhaus. Le lettere della seconda linea ero indotto dapprima a integrarle [κ]ατ[ὰ τ]ὸν, a cui poteva seguire l'indicazione della fonte da cui furono tratti gli ipomnemati, quando, avvisato dal Vogliano delle lettere segnate da me fra parentesi, giudicai doversi tenere altra via. Perciò basandomi su pap. 1471 (V. Susemihl *A. L.* II 271 n. 195 e Scott *loc. cit.* p. 70): *Φιλοδήμο[υ] | τῶν κατ' ἐπιτομὴν ἐξειργ|α[σ]μένων περὶ ἠθῶν καὶ βί|ων ἐκ τῶν Ζήνων[ος σχολ]ῶν | . . . | ὅ ἐστι περὶ παρρ[η]σίας* . . ., e poichè in fine della terza linea dopo ZH non pare si possa aggiungere più di una lettera, mi avventuro a congetturare: [*Φιλοδήμου?*] | . . . . . [*περὶ βί*]*ω*[*ν καὶ*] | *ἠθ*[*ῶν, ἢ περὶ τοῦ μὴ* (*μάτην?*) *κατὰ τ*]*ὰ τ*[*υχ*]*όν*[*τα*] *ζῆ*[*ν*] | *ὑπ*[*ο*]*μνημάτ*[*ων*] *α'*. Quanto alle due ultime linee, è possibile che esse contengano un sottotitolo del libro I, come partizione dell'opera; ma nulla saprei congetturare di più preciso.

Della prima colonna do il facsimile N(apoletano), che servì di base alla collazione del Vogliano, e aggiungo in nota quanto mi risulta sia dell'O(xoniense) come del papiro, avvertendo che il papiro, come di solito, piuttosto conferma l'O(xoniense) (per quello che si può ricavare dal senso e dalle lezioni comunicatemi dal Bassi) anzi che il N(apoletano).

Col. I (Nap.).

. . . . ΚΕΡΕ
. . ΟΝΟΙϹ
5 . . ΕΙΤΟΙ
. . . ΟΒΒΗΙΤ
Π . . . ΖΗΤΟ
Τ . . . ΟϹϹ
ΕΙ. ΛΑΤΤΩΑ
10 ΤΑΚΑΤΑΤΑϹΩ
ΕΚΤΟΥϹΩΜΑΤ
ΦΕΡΟΜΕΝΟΥΚΑΕ
ΜΕΓΙϹΤΗΙΓΙΝΟΜΕΝ
ΑΜΟΡΦΗϹΚΑΙϹΥΝ
15 ΗΔΟΝΗΙΕΚΤΗϹΤΑ
Ν.ΛΟΓΙΑϹΑΠΟΛΑΥΜ
ΤΗΝΕΚΤΩΝΕΙΔΩ
Ν
Λ Ω ΝΗΔΟΝΗΟ ΠΡΟΝ
. . . Α.ΥΝΔΗΛΟΝΩϹΟΥ
20 ΠΡΟϹΠΑϹΑΝΜΟ.ΦΗ
ΤΟΙΟΥΤΩΠΡΟϹΤΟ
ΤΟϹ
ΕΝΔΕΤΗΝΕΚΙ.ΙΑΤΟ
. . . . . . Α . . . .
. . . .

Il solo apografo O(xon.) ci conserva le prime due linee: ecco le lettere conservate: .....ΤϹ ΜΕ....... || ....ϹΩ.... Non so se ve ne sia ancor traccia nel papiro. L'Α della lin. 23 è conservato dal solo O.: il papiro avrebbe solo tracce di due o tre lettere illeggibili, il N. ha spazio almeno per due linee; lin. 5 O. ΘΥ invece di ΟΙ; lin. 9, dopo ΕΙ negli apografi non sono che due trattini; nel papiro si vede —(= Δ ?) e tracce arcuate dell'Ε; lin. 10 Ox. Ο invece di Ω; lin. 12 Oxon. ΑΘ invece di ΑΕ; lin. 13, dopo ΜΕΝ il papiro non concederebbe spazio per aggiungere altro; lin. 14 O. ϹΥΜ invece di ϹΥΝ, nel papiro l'Υ è mutilo e del Ν (o Μ?) non rimangono che i primi due elementi, e dopo non vi sarebbe spazio che per due lettere;

lin. 15 O. . . TO invece di CTA; nel papiro l'H di HΔON è svanito; lin. 16 O. HΨ invece di AY: il papiro ha HΨ . .; lin. 18, la 9ª lettera in O. è C. invece di O, e la penultima C invece di O: il papiro ha HΔONH . . P, e null'altro; lin. 21 O. Π̇; lin. 22, le prime due lettere in O. sono OY invece di EN.

Col. I.

εἰ [δ' ἐ]λάττω α[ὐτὰ]
10 τὰ κατὰ τὰ σώ[ματα]
ἐκ τοῦ σώματ[ος ἀνα-] (1)
φέρομεν, οὐκ ἀθ[ρεῖς]
μεγίστηι γινόμεν⟨α δι-⟩
ὰ μορφῆς καὶ συμ⟨μετρίας⟩
15 ἡδονῆι; ἐκ τῆς τ' ἀ-
ναλογίας ἀπολήψῃ (2)
τὴν ἐκ τῶν εἰδώ-
λων ἡδονήν ὡς προεί-
[ρηκ]α[· ν]ῦν δῆλον, ὡς οὐ
20 πρὸς πᾶσαν μο[ρ]φὴ[ν]
τοιοῦτο [[προσ]]πο[εῖ]
οὐδὲ τοσ[αύ]την ἐπ' ἴ[δ]ια το[ιαῦ-]
[τα (3) . . . . . . α . . . .
. . . .
. . . .

(1) Nelle linee perdute si deve supporre forse εἰς ταῦτα, o un simile complemento, a cui si riferisca [ἀνα]φέρομεν. In fine della linea 8 vi sono del resto tracce di lettere ε e ι che possono benissimo permettere di congetturare εἰ[ς ταῦτα], se anche poi non è necessario che questo complemento precedesse immediatamente εἰ δ' ἐλάττω. In l. 12 potrebbe anche leggersi οὐ καθορᾷς, ma ἀθρεῖς mi pare preferibile.

(2) Per ἀπολήψη⟨ι⟩ Crönert *M. H.* p. 37; così pure (l. 21) per τοιοῦτο (τοιούτω) vedi Scott. *l. c.* p. 16. Philod. π. κακιῶν ed. Jensen. p. IX; Philod. π. τοῦ καθ' Ὁ. ἀγ. β. ed Ol. p. VI.

(3) La lezione della l. 22 presenta qualche difficoltà: di τοιοῦτο per τοιούτω ho già detto sopra; ma il Philippson mi fa notare che dal facsimile

A qual parte della filosofia di Epicuro si riferisca questa colonna non è, di subito, evidente. Che l'argomento sia morale, si ricava da quello che si può, anche imperfettamente, leggere dalle altre colonne, e già lo stesso Crönert attribuiva l'intero papiro ad un'opera di carattere morale. Non è però impossibile precisare meglio il punto di dottrina che qui si espone. Anzitutto, nelle lin. 9-11 si parla di *impressioni* che riguardano il corpo e che *ci vengono dal corpo*, e queste sono dette *minori* (*ἐλάττω*) in confronto, certo, di altre, di cui si è parlato prima o si parlerà dopo; e di fatto nelle lin. 13 sgg. si contrappongono evidentemente alle prime altre *impressioni*, che ci procurano un *grandissimo* piacere. È evidente che si stabilisce fra esse un paragone, e perciò io ho integrato [*ἀνα*]|*φέρομεν*; ma su questo verbo ritorneremo poi. Ora, poichè in lin. 15 sg. si parla del piacere che ci arrecano gl'idoli, come spiegato da questo confronto, ne viene di conseguenza che nelle linee 15 sgg. non si tratti più degli idoli delle cose o delle persone, che sarebbero anch'essi *ἐκ τοῦ σώματος*, ma di idoli speciali, e perciò degli idoli divini, perchè gli dei non sono corpi, ma *συγκρίσεις* di natura particolare (*quasi corpora*) (1). Da ciò si comprende il minor piacere

---

del Vogliano si rileverebbe che sul *π* di *πρὸς* in O. vi è un punto, che segnerebbe evidentemente un segno di espunzione. A chiarire ciò occorrerebbe rivedere l'apografo oxoniense e il papiro: ad ogni modo è probabile che se espunzione vi fu, essa riguardasse tutta la preposizione *πρὸς*, perchè in realtà il verbo composto non è qui necessario, e anzi può recare ambiguità con i significati veri di questo verbo: *aggiungere*, *fingere* e simili. Perciò propendo per leggere [[*προσ*]]*πο*[*εῖ*]. Del fine della linea 22 e delle seguenti è impossibile dare un'integrazione che non sia affatto congetturale. Tuttavia, per compire il senso che a me pare di ricavarne, e solo *exempli causa*, mi avventuro a proporre: 22 sgg. *οὐδὲ τοσ*[*αύ*]*την ἐπ' ἴ*[*δ*]*ια το*[*ιαῦ*|-*τα γίνεσθ*]*α*[*ι δεκτὸν ἡδονὴν μὴ διὰ τῆς καλλίστης, τοῦτ' ἐστὶ δι' ἀνθρωποειδοῦς μορφῆς*]. Invece di *τοιαῦτα γίνεσθ*]*α*[*ι* potrebbe essere, a seconda che si calcolano gli spazi, *τοιαῦτ' εἶν*]*α*[*ι*. Si noti che la seconda colonna è mutila in principio. Il Philippson invece propone: (21 sg.) *τοιούτω⟨ν⟩* [[*πρὸς τὸ*]] | *οὐδὲ* ·[*π*]*ρὸς τὴν ἐπ' ἴ*[*δ*]*ια το*[*ύ*–|]*των ἀν*]*α*[*λογίζεσθαι* | *δεῖ τὴν τῶν θεῶν*.]. Le ragioni della mia proposta sono esposte nel commento.

(1) Cic. *Nat. deor.* I 18, 49: " Nec tamen ea species deorum corpus est, sed quasi corpus ", cfr. 25, 71 e 27, 75. Sulle speciali *συγκρίσεις* degli dei vedi, oltre il noto scolio a D. L. X, 139, Scott " Journal of Philology " 1883 p. 212 sgg.; e Giussani *Studi Lucreziani* p. 227 sgg., che riferiscono e discutono i passi epicurei relativi. La questione relativa è però tutt'altro che

che ci producono le impressioni percepite dai corpi e il massimo piacere che ci producono gli idoli divini (1). Che si tratti degli idoli di amici defunti, che anch'essi non sarebbero pro-

---

esaurita. Vedi, ad esempio, come interpretava i passi in questione (non tutti però perchè, i fr. del *περὶ θεῶν διαγωγῆς* non erano ancora pubblicati) il Philippson nella sua dotta e acuta dissertazione (pag. 71 sg.): *De Philodemi libro qui est περὶ σημείων καὶ σημειώσεων, et de Epicureorum doctrina logica, Diss. inaug.*, Berol., 1881; dissertazione pur troppo poco nota sì che non ne ebbero conoscenza nè il Giussani nè lo Scott. Una soluzione del difficile problema non si potrà probabilmente avere che da una pubblicazione più integra e da una migliore lettura del papiro del *π. θεῶν διαγ.*

(1) Vedi infatti Cic. *Nat. deor.* I 19, 49: " imaginibus similitudine et transitione perceptis..... *cum maximis voluptatibus* in eas imagines mentem intentam infixamque nostram intellegentiam capere, quae sit beata natura et aeterna „. Epic. fr. 385 Us.: *ἤδη δὲ ταύτῃ γε καὶ κατ' Ἐπίκουρον ὄνησις τοῖς ἀνθρώποις ἀπὸ θεῶν γίνεται· τὰς γοῦν βελτίονας ἀποῤῥοίας αὐτῶν φασι τοῖς μετασχοῦσι μεγάλων ἀγαθῶν παραιτίας γίνεσθαι.* Philod. *π. εὐσ.* 86, 13 Gomp. (v. Us. p. xx) *ἐξ αὐτῶν* (sc. *τῶν θεῶν*) *λέγομεν παρακολουθεῖν καὶ ἀγαθῶν τὰ μέγιστα*: cfr. *Epist.* III 124 p. 60, 10 *ἔνθεν αἱ μέγισται βλάβαι τε τοῖς κακοῖς ἐκ θεῶν ἐπάγονται καὶ ὠφέλειαι* ⟨*τοῖς ἀγαθοῖς*⟩, passo giustamente messo in rapporto con i precedenti (e con essi spiegato) dall'Usener a p. xx. A questi passi riferisce l'Usener (fr. 385[a] p. 356, 6 sgg.) anche la seguente testimonianza: Ambros. *Epist.* (classis I) LXIII 13 t. II p. 1026[a] ed. Maur.: " atque hic (Epicurus) quam alienus a vero sit, etiam hinc deprehenditur, quod voluptatem in homine deo auctore creatam adserit principaliter, sicut Philominus eius sectator in epitomis suis disputat, et huius allegat Stoicos esse auctores sententiae, sed hoc divina scriptura redarguit... „ Al che l'Usener annota: " *Sententiam Epicuri apparet male exceptam esse, nec tam de origine omnis voluptatis quam de illa voluptate dictam fuisse, quam homo deorum simulacris perceptis sentiret: cfr. fr. 385 et 386.* filominus *aut* filuminus *libri* Philuminaris *vetus editio* Philomarus *editur*: Philodemus *latere perspexerunt editores Maurini* „. Ora, che Ambrosio abbia male compreso il suo fonte è certo, ma poichè evidentemente parla dell'origine divina del piacere in generale, credo che egli non si riferisca punto al nostro passo, ma alla *πρόληψις* dell'*ἡδονή* che si prestava ad essere considerata per errore come un'idea innata, e così si esprimeva anche Cicerone riguardo alla *πρόληψις* degli dei *de nat. deor.* I 17, 44: " insitas eorum (*sc.* deorum) vel potius *innatas* cognitiones habemus „; ciò darebbe anche l'esatta spiegazione del confronto con gli Stoici perchè essi pure ammettevano la prolessi, e la definirono (D. Laerz. VIII 54) *ἔστι δὲ ἡ πρόληψις, ἔννοια φυσικὴ τῶν καθόλου.* Su la *prolessi* dell'*ἡδονή* in Epicuro e in Cicerone vedi il mio studio: *Qua fide quibusque fontibus instructus moralem Epicuri philosophiam interpretatus sit Cicero in primo De finibus libro* (" Riv. di Fil. „ 1909 p. 62 n. 1 e p. 63 n. 1).

priamente *ἐκ τοῦ σώματος*, pare escluso da qualsiasi trascrizione che si possa dare delle lin. 13-15.

Veniamo ora ad *ἀναφέρειν* della lin. 11. Benchè noi abbiamo delle *προλήψεις* degli dei, tuttavia la loro conoscenza non cade immediatamente sotto i nostri sensi, ma la ricaviamo dalle immagini che ce ne giungono e (come si vede dal *de natura deor.* di Cicerone e dal *περὶ εὐσ.* di Filodemo) tali immagini per la loro sottigliezza sono solo percepibili dalla *mens*. Non possiamo dunque renderci conto esatto della loro esistenza se non per mezzo del *λογισμός*. Ora ogni ricerca di tal natura deve farsi servendosi del criterio dell'esperienza (*ἐνάργεια*). Che questo criterio valga anche per gli dei risulta chiaro dal fondamento della canonica epicurea v. Ep. p. 187, 17 Us. *διὰ φαινομένου... ὀφείλει τὸ ἄδηλον ἀποδείκνυσθαι* cfr. Ep. *ep.* I 80 (p. 29, 19 Us.) *ὥστε παραθεοροῦντας ποσαχῶς παρ' ἡμῖν τὸ ὅμοιον γίνεται αἰτιολογητέον ὑπέρ τε τῶν μετεώρων καὶ παντὸς τοῦ ἀδήλου*. Più precisamente esprime il medesimo criterio di giudizio Demetrio, nel papiro sopra citato, recentemente letto dal Crönert (v. l. cit. p. 113), ove è detto che le qualità attribuibili agli dei sono ad essi dovute *ἔνθ' ἂν μή τι τῶν φαινομένων ἀντιπράττηι*: ad un simile confronto dovevamo dunque attenderci appunto nella colonna presente. Ora, l'espressione che usa Epicuro in simili casi è appunto *ἀναφέρειν*, v. p. Ep. *ep.* I 63 (p. 19, 15 Us.) *δεῖ συνορᾶν ἀναφέροντα ἐπὶ τὰς αἰσθήσεις καὶ τὰ πάθη (οὕτω γὰρ ἡ βεβαιοτάτη πίστις ἔσται)*. Diog. L. X 34 *τὸ δοξαστὸν ἀπὸ προτέρου τινὸς ἐναργοῦς ἤρτηται, ἐφ' ὃ ἀναφέροντες λέγομεν...* cfr. Lucr. I 423 sgg., sensus, cui nisi prima fides fundata valebit| Haut erit *occultis de rebus quo referentes* | Confirmare animi quicquam ratione queamus (1). Dopo ciò non è difficile interpre-

(1) Che, del resto, l'ammirazione per gli dei dipenda dalla considerazione della loro vita beata e della loro magnifica forma, in confronto alla realtà umana (come si dice nella nostra colonna), e che questo sia il fondamento dell'*εὐσέβεια* epicurea, risulta anche da Lucrezio che spiega come si sia formata. V 1167 sgg. " Quippe etenim tum divom mortalia saecla | *Egregias* animo *facies* vigilante videbant, | Et magis in somnis *mirando* corporis auctu. | His igitur sensum tribuebant propterea quod | Membra movere videbantur vocesque superbas | Mittere *pro facie praeclara et viribus amplis;* | Aeternamque dabant vitam, *quia semper eorum* | *Suppeditabatur facies et forma manebat,* | ..... simul in somnis *quia multa videbant* |

tare le prime linee (9-18): " Se alle impressioni degli idoli divini (*εἰς ταῦτα* che io suppongo essere nelle linee precedenti) *noi confrontiamo le impressioni corporee che riceviamo dal mondo corporeo e che sono ad esse inferiori* (*αὐτὰ* rende appunto il concetto di *αὐτὰ τὰ παρ' ἡμῖν* in cfr. con i fenomeni dei *μετακόσμια* cioè degli dei; per *ἐλάττω* cfr. i passi citati di Lucr. e di Cicerone), *non vedi come quelle si manifestano recandoci grandissimo piacere, per la loro forma e per la bellezza* (*συμμετρίας*) *delle loro immagini? Da questo confronto appunto comprenderai il piacere che ci recano gli idoli divini come ho detto sopra* „.

Devo notare però che il mio caro e dotto amico Roberto Philippson, a cui debbo le acutissime congetture ⟨*δι*⟩*ὰ* e *συμ*⟨*μετρίας*⟩, preferisce leggere, invece di *ἀναφέρειν*, *ἐκφέρειν* (= *dicere*, cfr. Sudhaus, indici ai *Voll. Rhet.* di Filod.) e intende: " Si voluptates corporis ipsas, quatenus e corpore (ipso) eveniunt, (velut amatorias) minores *vocamus*, nonne eas, quae (corporis) forma et convenientia partium gignuntur, summo gaudio coniunctas esse vides? Ex harum similitudine voluptatem, quam ex imaginibus (divinis) capimus, cognosces ut supra dixi „.

A me l'interpretazione del Philippson pare ingegnosa assai, ma mi sembra pure che forzi un poco troppo la costruzione della frase *οὐκ ἀθρεῖς... συμμετρίας*, che per dare il senso che ne ricava il Phil. credo dovrebbe essere piuttosto, *οὐκ ἀθρεῖς μεγίστῃ γινόμενα ἡδονῇ τὰ* (*γινόμενα*) *διὰ μορφῆς καὶ συμμετρίας*, anzi che quale è nel testo restituito della colonna (1).

Quali siano le ragioni che mi fan credere, che anche nel

Efficere et nullum capere ipsos inde laborem „. Un simile confr. abbiamo in Usen. p. 239, 23, dove è detto che gli dei debbono usare la lingua greca perchè *μόνον οἴδαμεν γεγονότας σ[οφ]οὺς Ἑλληνίδι γλώττῃ χρωμένους* dove la corr. *σ[οφ]οὺς* è indicata, secondo lo Scott e la lezione del papiro, a p. LXXVIII, cfr. fr. 226. V. Demetrio ap. Crönert, *Kolot. u. Men.* (pap. 1055 col. 11) pag. 112 *φανερὸν ὡς καὶ τὸν θεὸν ἀνθρωπόμορφον χρὴ | καταλείπειν ἵνα καὶ σὺν λογισμῷ τὴν ὑπόστα|σιν ἔχει.* V. anche la diss. citata del Philippson, p. 73.

(1) Parallelamente il Philippson mi scrive pure, che sarebbe possibile leggere *εἰ δ' ἐλάττω αὐτὰ τὰ κατὰ τὰ σώ[ματα] ἐκ τοῦ σώμα[τος αὐτοῦ] φερόμεν'* (= *φερόμενα*)... ma *σώματ[ος αὐτοῦ]* pare più lungo che non conceda lo spazio rimasto libero in fine della colonna. Al più si potrebbe leggere semplicemente *ἐκ τοῦ σώματος φερόμεν' οὐκ ἀθρεῖς κτλ.*

primo periodo si tratti già del confronto con gli idoli divini, ho detto in principio. Resta ai lettori il giudizio.

È opportuno aggiungere qualcosa sulle linee 13-15, quanto alla restituzione del testo. Come ho detto nelle note al facsimile, il papiro, a testimonianza del Bassi, non concederebbe di inserire nulla dopo *γινομεν-*, e dopo *συμ* (o *συν*?) si avrebbe solo spazio per 2 lettere. Ora poichè, come ha dimostrato il Crönert nella sua *Memoria Herculanensis*, p. 10 sgg., non è possibile la falsa divisione di sillabe *γινόμεν-α*, io ero indotto a leggere *μεγίστη γινόμεν*[*α*] | [[*α*]] *μορφῇ* (invece di *μορφῆς* che anche il Bassi mi attestò poi essere nel papiro) *καὶ σὺν ἡδονῇ* (o *σὺμ* ⟨*μεγίστῃ*⟩ *ἡδονῇ*); ma la doppia correzione [[*α*]] e *μορφῆς* rendono persuasiva la bella proposta del Philippson ⟨*δι-*⟩ e *συμ*⟨*μετρίας*⟩.

Vediamo ora le ultime linee. L'espressione *οὐ πρὸς πᾶσαν μορφὴν κ. τ. ἑ.* resta ancora da spiegare. Ma il concetto è chiaro, per chi conosca la filosofia epicurea. Il senso, quale è dato da me nell'integrazione delle ultime linee, è questo: " *Non da ogni forma può essere prodotto il sommo piacere che noi ricaviamo dagli idoli divini* (che son di natura speciale [*ἐπ' ἰδία τοιαῦτα*]), *ma solo da una forma particolare* (cioè dalla più nobile e bella delle forme, e quindi dalla forma antropomorfica) ". Che gli dei debbano avere forma umana (e in fatti in questa forma appariscono nei sogni e tale è la loro *πρόληψις*) è attestato da tutte le testimonianze: vedi *ἀνθρωποειδεῖς θεοί* fr. 355, e le parole stesse di Epicuro o di un epicureo antico (Ermarco? [v. n. Us. ad. l.]) p. 239, 14 segg. *οὐ γὰρ μᾶλλον εὐδαίμονας καὶ ἀδιαλύτους νοήσομεν μὴ φωνοῦντας μηδ' ἀλλήλοις διαλεγομένους ἀλλὰ τοῖς ἐνεοῖς ἀνθρώποις ὁμοίους*. I passi recati dall'Usener al fr. 358 contengono i capisaldi della polemica epicurea contro i filosofi che consideravano la divinità come non antropomorfa. Ma più dappresso possono illuminare la chiusa della nostra colonna le seguenti attestazioni di Cicerone.

Cic. *de nat. deor.* I 18, 46 " sed ne omnia revocentur ad primas notiones (cioè alle *προλήψεις* da cui prima si è ricavata l'esistenza degli dei) (1) ratio [*λογισμός*] hoc idem declarat.

---

(1) È inesatto però Cicerone quando disgiunge la forma antropomorfica degli dei dall'attestazione della *πρόληψις*, perchè anche la *πρόληψις* ci prova che di solito gli dei appariscono in forma umana agli uomini, al

Nam cum praestantissimam naturam, vel quia beata est vel quia sempiterna, convenire videatur eandem esse pulcherrimam, quae compositio membrorum, quae conformatio liniamentorum, quae figura, quae species humana potest esse pulchrior?... Quod si omnium animantum formam vincit hominis figura, deus autem animans est, ea figura profecto est quae pulcherrima sitomnium „. *cfr.* 27, 76 “...quoniam rebus omnibus excellat natura divina, forma quoque esse pulcherrima debeat, nec esse humana pulchriorem... „ (1).

Il nostro nuovo testo epicureo, come si vede, conviene in tutto con la teoria di Epicuro, anzi ne illumina alcuni lati, raccogliendo intorno ad un unico argomento (cioè il piacere che riceviamo dagli idoli divini) principî epicurei che disgiunti conoscevamo dagli altri fonti antichi.

Resta a vedere quale sia l'autore del nostro papiro. Che sia Filodemo è assai probabile, per il fatto che è uno scritto ipomnematico. Certo che vi è esempio di iato p. e. *ἐλάττω αὐτά* proprio nella prima linea da me restituita. Ma è da ricordarsi che è uno scritto ipomnematico, e perciò, oltre tutto, ricco di citazioni; e appunto la nostra colonna potrebbe essere la trascrizione di un passo di un epicureo più antico. Del resto la questione del iato in Filodemo resta ancora da studiare. Molto fece lo Strathmann (*Jahresbericht über das Real-Progymn. der Stadt Viersen*, 1892) quando però non erano uscite parecchie delle migliori edizioni di Filodemo. Del resto lo scrupolo suo di voler togliere ogni iato in Filodemo è probabilmente eccessivo. Per il *π. σημ. καὶ σημ.* provò il Philippson “ Rh. Mus. „ 1909, p. 7 sg. che parecchi iati certi vi appariscono.

---

più il ragionamento (*λογισμός*, *ratio*) può confermarci ciò, e contraddire all'opinione dei popoli selvaggi che credono a dei di forme animali e ributtanti. Vedi infatti ibid. 27, 76 “ non deest hoc loco copia rationum, quibus docere velitis humanas esse formas deorum: primum *quod ita sit informatum* [*anticipatum*] mentibus nostris, ut homini cum de deo cogitet *forma occurrat humana*... „ dove *informatum* è l'espressione che rende la *πρόληψις*.

(1) Che il ragionamento dell'epicureo ciceroniano sia esattamente epicureo provano, oltre i luoghi di Demetrio, anche Us. p. 239 sgg. (v. s. p. 10 n. p. p.) ove troviamo espressa una induzione parallela e anche assai più audace.

* * *

Uno scolio epicureo e la polemica atomica contro Democrito.

Epic. *ep. ad Herod.* § 42 sg. = p. 7, 17 sgg. Us.

Πρός τε τούτοις τὰ ἄτομα τῶν σωμάτων καὶ μεστά, ἐξ ὧν καὶ αἱ συγκρίσεις γίνονται καὶ εἰς ἃ διαλύονται, ἀπερίληπτά ἐστι ταῖς διαφοραῖς τῶν σχημάτων· οὐ γὰρ δυνατὸν γενέσθαι τὰς τοσαύτας διαφορὰς ἐκ τῶν αὐτῶν σχημάτων περιειλημμένων. Καὶ καθ' ἑκάστην δὲ σχημάτισιν ἁπλῶς ἄπειροί εἰσιν αἱ ὅμοιαι, ταῖς δὲ διαφοραῖς οὐχ ἁπλῶς ἄπειροι ἀλλὰ μόνον ἀπερίληπτοι.

A questo passo dell'epistola ad Erodoto in cui si stabilisce che gli atomi presentano fra loro una varietà di forme non infinita, ma solo incommensurabilmente grande (1), è aggiunto uno scolio, che secondo l'uso dei manoscritti di Laerzio è inserito nel testo subito dopo *ἀπερίληπτοι*, scolio che l'Usener ha saggiamente relegato in calce. Eccolo:

οὐδὲ γάρ φησιν ἐνδοτέρω [v. § 56] *εἰς ἄπειρον τὴν τομὴν τυγχάνειν, λέγει δέ· ἐπειδὴ αἱ ποιότητες μεταβάλλονται, εἰ μέλλει τις μὴ καὶ τοῖς μεγέθεσιν ἁπλῶς εἰς ἄπειρον αὐτὰς ἐκβάλλειν.*

Come si vede, l'ultima parte dello scolio non è punto chiara, e non ci deve perciò stupire che molte siano state le discussioni a cui ha dato origine. E poichè nessuna spiegazione od emendamento di cui ho notizia mi pare possano considerarsi definitivi, credo opportuno prendere in considerazione questo luogo confidando di poterne dare una spiegazione convincente.

Anzitutto C. F. Hermann (in " Zeitschr. f. d. Alterthumsw. „ 1834 p. 110) propose di correggere *λέγει* dei codici in *λήγει*,

(1) Questa era una correzione alla fisica di Democrito di cui dice Aristotele *gen. et corr.* I 1 p. 314ᵃ 22 *ταῦτα* (gli atomi) *δ' ἄπειρα καὶ τὸ πλῆθος εἶναι καὶ τὰς μορφάς*, cfr. Theophr. fr. 8 (*Dox.* p. 484, 11-13) e Alex. *ap.* Joh. Philoponus in *Comm. Arist. de gen. et corrupt.* II 1 che dice che gli Epicurei in questo punto *οὐκέτι συνεφώνησαν Δημοκρίτῳ*. Per pura curiosità osserverò che il Joyau nel suo volume su Epicuro, pubblicato dall'Alcan nella coll. dei grandi filosofi (1910), (p. 93) scrive: " la diversité de leurs figures (degli atomi, secondo Epicuro) est INFINIE „. Di simili e più gravi errori è gremito questo libro, che è deplorevole sia stato pubblicato da un editore serio come l'Alcan.

e più opportunamente, sebbene senza necessità, l'Usener stampò *λήγειν*. Senza necessità, perchè la lezione dei codici è evidentemente corretta, essendo uso di questo o di questi anonimi glossatori di Epicuro riferire così le parole *o il senso* di qualche dottrina di Epicuro (1). Nè del resto con tale correzione si spiega meglio l'ultima parte dello scolio.

Il Woltjer (*Lucreti philos. cum font. comp.* p. 27) riferisce *αὐτὰς* a *ἄτομοι* anzi che a *ποιότητες*, intende *μέλλει* nel senso di *esitare* e corregge *εἰ μὴ μέλλει τις λέγειν καὶ τοῖς μεγέθεσιν ἁπλῶς εἰς ἄπειρον αὐτὰς ἐκβαίνειν*. Ma 1° la correzione appare subito un rifacimento troppo arbitrario e violento del testo; 2° il significato attribuito a *μέλλω* è artifizioso, mentre più naturale è quello che appare proprio poco sopra p. 7, 1 *εἴπερ μὴ μέλλει εἰς τὸ μὴ ὂν φθαρήσεσθαι*.

Il Giussani (*comm. ad Lucr.* I 584 sgg.) spiega le parole *ἐπειδὴ κ. τ. ἑ.*: " altrimenti le qualità essendo variabili varierebbero all'infinito nelle loro gradazioni ". Spiegazione molto sommaria, a ritenere la quale occorre intendere *τοῖς μεγέθεσι* come *gradazioni di qualità*, ciò che non è punto facile, tanto più che proprio nel passo a cui lo scolio si riferisce (v. *ἐνδοτέρω*) (2) cioè nel § 56 *μέγεθος* è giustamente applicato agli atomi. Inoltre non veggo come possa, con tale spiegazione, darsi una traduzione conveniente del testo. Infatti il testo suonerebbe: " poichè le qualità (dei corpi) mutano, se alcuno non voglia anche per le gradazioni di qualità estenderle all'infinito ", mentre per rendere possibile e logica la spiegazione del Giussani dovrebbe dirsi: " poichè le qualità *specifiche* mutano [se si ammette la divisione all'infinito] *e si dovrebbero estendere* anche esse all'infinito nelle loro gradazioni ".

Lo Heidel (in " Amer. Journ. of Philology " XXIII 2 (1902) p. 189), è di parere che la proposizione *ἐπειδὴ αἱ ποιότητες*

---

(1) Cfr. lo scolio a p. 22 Us., *τὸ ἀσώματον· λέγει γὰρ κατὰ τὴν πλείστην ὁμιλίαν*. Vedi anche D. L. X 31 (Us. p. 371, 8) dove le parole *λέγει δὲ* a torto sono dall'Usener lasciate nel contesto, perchè certamente sono una correzione fatta da un lettore posteriore, giacchè il primo scrittore, qualunque esso sia, attribuisce agli epicurei l'assunzione delle *φανταστικαὶ ἐπιβολαί* come *criterî*, al che il glossatore corresse che anche Epicuro ne parla nell'epistola ad Erodoto e nelle *κ. δοξ.*

(2) Vedilo citato più sotto p. 15.

μεταβάλλονται turbi la costruzione e sia estranea all'argomento dello scolio, perciò la considera come un'interpolazione. Ma, in realtà, oltre che è sempre poco prudente espungere qualcosa da un testo di cui si cerca appunto di chiarire il senso, per di più le parole che, secondo lo Heidel, nuocciono al senso, sono certamente a loro posto, perchè spiegano il riferimento al § di quest'epistola a cui lo scoliasta si richiama (*ἐνδοτέρω*); vedi infatti § 56 dove è detto: *πᾶν δὲ μέγεθος ὑπάρχειν οὔτε χρήσιμόν ἐστι πρὸς τὰς ποιοτήτων διαφοράς.....* cioè sono messe in relazione, proprio come nello scolio, le *ποιότητες* e la grandezza limitata degli atomi.

Successivamente il Pascal (*Studi sul poema di Lucrezio* 114 e 213 sg.) tentò una spiegazione ed una correzione del difficile passo, che mi pare più felice delle precedenti, se anche poi non riesca ad appagarmene. Egli segna una lacuna dopo ..*τις μή*, e nella lacuna egli suppone che fossero ad un di presso le parole seguenti: *εἰ μέλλει τις μὴ ⟨ἀδιαλύτους τὰς ἀτόμους νομίζειν⟩ καὶ*... In tal modo *αὐτὰς* si riferirebbe naturalmente a *αἱ ἄτομοι*, e a *μέλλει* è dato il suo significato naturale, pur avendosi un senso perfettamente chiaro e (fino a un certo punto) corrispondente alla teoria di Epicuro, per il quale (v. Lucr. II 478 sgg.) solo supponendo l'invariabilità di grandezza degli atomi si può spiegare l'invariabilità delle qualità *specifiche* nelle cose.

Pur tuttavia mi par necessario osservare:

1° che il supporre una lacuna è sempre l'ultimo rimedio a cui si debba ricorrere per correggere o spiegare un testo.

2° che è difficile dare una spiegazione paleografica della lacuna supposta, non essendovi somiglianza grafica fra il fine e il principio dei due monconi del testo, somiglianza che possa avere indotto in errore l'amanuense.

3° (e più importante poichè ci servirà a trovare la via per risolvere il problema presente) perchè *mentre qui chiaramente lo scoliasta ci dice di riferire l'opinione di Epicuro esposta in seguito* (*ἐνδωτέρω*) *nella medesima lettera*, è facile vedere poi che Epicuro non adduce punto come ragione della indivisibilità degli atomi quella ragione che risulterebbe dall'integramento del Pascal, che cioè le qualità *specifiche* muterebbero; anzi di ciò non parla punto, ma invece dice che non si debbono ritenere gli atomi divisibili all'infinito *ἵνα μὴ πάντα ἀσθενῆ ποιῶμεν*

καὶ ἐν ταῖς περιλήψεσι τῶν ἀθρόων εἰς τὸ μὴ ὂν ἀναγκαζώμεθα τὰ ὄντα θλίβοντες καταναλίσκειν (§ 56), cioè, affinchè rendendosi le particelle che compongono i corpi, con la successiva divisione infinitamente piccole, non si giunga al punto che un infinito tempo non sia più sufficente alla composizione delle cose, ciò che anche Lucrezio ha svolto nel l. I 560 sgg.

Per risolvere la nostra questione credo dunque che bisogni tenere altra via da quella tenuta sin ora dagli interpreti di Epicuro. E poichè lo scoliasta ci attesta che egli anticipa qualcosa che dirà poi Epicuro (*φησὶν ἐνδοτέρω... λέγει δέ*) bisogna cercare nel testo di Epicuro la spiegazione delle parole oscure dello scolio; principio di metodo questo su cui non credo possa cader dubbio, e che a torto venne trascurato sin ora, chiedendo a Lucrezio, anzi che ad Epicuro, la soluzione dell'enigma.

Ciò posto, credo sia anche evidente che a torto gli interpreti *vollero qui introdurre il concetto dell'invariabilità delle qualità* SPECIFICHE *delle cose, ponendola in relazione con la divisione all'infinito.* A torto, sia perchè la divisione all' infinito non è *confutata*, come abbiamo visto, *da Epicuro in questa lettera con l'argomento delle qualità specifiche*, sia perchè quando lo scoliasta dice *αἱ ποιότητες μεταβάλλονται non è punto detto che egli parli* delle qualità *specifiche*, che sono le sole che non variano, ma evidentemente parla delle *qualità*, in generale, dei corpi, e queste variano appunto continuamente. Che ciò sia vero ce lo attesta Epicuro stesso in questa lettera: § 54 *Καὶ μὴν καὶ τὰς ἀτόμους νομιστέον μηδεμίαν ποιότητα τῶν φαινομένων προσφέρεσθαι πλὴν σχήματος καὶ βάρους καὶ μεγέθους καὶ ὅσα ἐξ ἀνάγκης σχήματι συμφυῆ ἐστι. ποιότης γὰρ πᾶσα μεταβάλλει· αἱ δὲ ἄτομοι οὐδὲν μεταβάλλουσιν, ἐπειδήπερ δεῖ τι ὑπομένειν ἐν ταῖς διαλύσεσι τῶν συγκρίσεων στερεὸν καὶ ἀδιάλυτον.* Dunque è chiaro, che se *tutte le qualità mutano e si trasformano, non si può, senz'altro, dire nello scolio che gli atomi sono indivisibili perchè le qualità del resto muterebbero*, senza aggiungere (qualità) *specifiche*, e in fatti questa aggiunta non dimentica di fare Lucrezio quando svolge questo argomento I 593 sqq; " si primordia rerum | Commutari aliqua possent ratione revicta, | Incertum iam constet quid posset oriri | Quid nequeat, finita quoque potestas denique cuique | Quanam sit ratione atque alte terminus haerens, | Nec totiens possent *generatim saecla* referre |

Naturam, mores, victum motusque parentum „. Come si vede dunque anche Lucrezio non parla senz'altro di *qualità*, ma del circolo vitale destinato alle cose secondo la loro specie, e delle qualità connaturate a ciascuna *specie di cose* (*generatim* e *saecla*).

Anzi Lucrezio stesso poi ci dice che le qualità delle cose mutano continuamente, proprio traducendo le parole del testo or ora citato di Epicuro: II 749 sqq. " omnis enim color, omnino mutatur et omnis (1). | Quod facere haud ullo debent primordia pacto | Immutabile enim quiddam superare necesset, | Ne res ad nilum redigantur funditus omnes „.

Stabilito adunque che non deve essere nello scolio questione delle qualità specifiche invariabili delle cose, per vedere di che tratti non abbiamo che a consultare il testo di Epicuro, se-

---

(1) Così i mss. lasciando il senso sospeso. In generale si adottò la correzione umanistica *in* in luogo di *et*; ma osserva bene il Brieger (" Philol. „ XXV, 62) che, nel caso, dovrebbe essere *in omnem*, perciò egli e il Giussani ammettono una lacuna dopo questo verso, e credo con ragione, tanto più che la correzione di *et* in *in* non è punto facile paleograficamente. Rimane dubbio ciò che debba essere nella lacuna. Il Brieger (vedi Proleg. XXV e *loc. cit.* cfr. " Jahrb. f. Phil. „ 111, 710) crede che Lucrezio debba aggiungere che i colori non possono mutarsi se non mutano le cose, e suppone, che nella lacuna sia a un dipresso: ⟨res dum alium capiunt mutare ipsas quoque debent⟩. Quanto a me credo che debba toccarsi piuttosto del variare delle circostanze che son causa delle mutazioni delle cose, e perciò integro:

> omnis enim color omnino mutatur et omnis
> ⟨est ubi res alio [*oppure* vario] videatur tincta colore⟩;
> quod facere haud ullo debent primordia pacto...

Infatti nella lacuna deve essere detto che il colore muta col mutare delle condizioni, p. e. il colore rossigno che assumono la scena e gli spettatori al riflesso del velario che copriva i teatri antichi, come bene già osservò Lucrezio, IV 75 sgg., e per di più doveva essere contenuto il vocabolo *res*, perchè la differenza (*quod facere h. u. d.*) non è in realtà fra i *colori* e gli *atomi*, ma fra le cose e gli atomi rispetto ai colori.

Quanto al verso da me supposto perduto cfr. con *est ubi* Hor. *epist.* II 1, 63 *Interdum vulgus rectum videt, est ubi peccat*; I 10, 15 *est ubi plus tepeant hiemes? ubi... Est ubi divellat somnos minus invida cura?* Plaut. *Capt.* 324 *Est etiam ubi... praestet.* Lucrezio usa anche *est cum* = *ἐστὶν ὅτε* VI 295 *est etiam cum vis extrinsecus incita venti.* E anche qui potrebbe dirsi *est cum res alio...* ma più duramente. Con l'ultima parte del verso cfr. II 776. *Sin alio atque alio sunt semina tincta colore.*

condo il principio di metodo che ci è suggerito, come vedemmo, dalle stesse parole dello scoliasta.

Questi dunque parla unitamente delle *ποιότητες* e della grandezza (*τοῖς μεγέθεσι*) degli atomi. Ora l' unico passo dell'epistola ad Erodoto in cui questi due termini sono accostati è il principio del § 56 *πᾶν δὲ μέγεθος ὑπάρχειν* [sc. *ταῖς ἀτόμοις*] *οὔτε χρήσιμόν ἐστι πρὸς τὰς τῶν ποιοτήτων διαφοράς, ἀφῖχθαί τε ἅμ' ἔδει καὶ πρὸς ἡμᾶς ὁρατὰς ἀτόμους*, cioè " supporre che gli atomi possano raggiungere qualsivoglia grandezza non è punto utile per spiegare le differenze delle qualità (nelle cose) e nello stesso tempo farebbe sì che gli atomi fossero visibili ad occhio nudo ".

Per chiarire questa passo bisogna rifarci alla teoria di Democrito.

Abbiamo visto che Epicuro non ammetteva infinite forme di atomi, ma solo innumerevoli, Leucippo e Democrito invece ne ammettevano infinite.

Così infatti ci attestano le testimonianze antiche: Arist. *de gen. et corr.* I, 1, 314^{a} 21 (Diels *Fr. d. Vors.* I^{2} pag. 345, 12) *Δημόκριτος δὲ καὶ Λεύκ. ἐκ σωμάτων ἀδιαιρέτων τἆλλα συγκεῖσθαί φασι, ταῦτα δ' ἄπειρα καὶ τὸ πλῆθος εἶναι καὶ τὰς μορφάς* (cfr. Simpl. *Phys.* 28, 4 Diels ibid. pag. 345, 4 sg. Hippol. *ref.* I 12 ibid. l. 35 sgg., Simpl. *de cael.* pag. 294, 33 Heib. Diels p. 359, 41 *ὑπάρχειν δὲ αὐταῖς παντοίας μορφὰς καὶ σχήματα παντοῖα καὶ κατὰ μέγεθος διαφοράς*). Questo gli atomisti antichi facevano appunto per *spiegare con la varietà delle forme, la varietà e la mutazione delle qualità nelle cose*, v. Arist. *gen. et corr.* I 1, 314 a, Diels loc. cit. p. 345, 17 sgg. *ἐπεὶ δ' ᾤοντο τἀληθὲς ἐν τῷ φαίνεσθαι, ἐναντία δὲ καὶ ἄπειρα τὰ φαινόμενα, τὰ σχήματα ἄπειρα ἐποίησαν, ὥστε ταῖς μεταβολαῖς τοῦ συγκειμένου τὸ αὐτὸ ἐναντίον δοκεῖν ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ*; cfr. Simpl. *phys.* 28, 4 Diels p. 345, 4 sgg. e p. 361, 17 sgg. Cioè data la gnoseologia democritea, per cui tutte le qualità dei corpi ed ogni fenomeno sono affatto soggettivi (fr. 125 D), e dato il continuo mutare delle qualità e delle cose, era necessario supporre un' infinità di forme di atomi, perchè il solo cambiamento di posizione di essi non bastava a spiegare il fatto che la stessa cosa sembrasse, a diversi sperimentatori, o al medesimo in diversi momenti, presentare qualità contrarie.

Se non che risultando necessariamente le forme degli atomi dalla disposizione delle loro parti (sia pure indivisibili e neppure idealmente considerabili distinte dall'atomo intero) (1), ne conseguiva che perchè fossero possibili infinite forme atomiche dovessero supporsi infinite combinazioni delle parti degli atomi. Perciò queste dovevano essere in alcuni atomi molte e si rendeva così assai vario anche il limine di grandezza degli atomi (v. sopra la testimonianza di Simplicio *καὶ κατὰ μέγεθος διαφοράς*). E certamente Democrito non aveva determinato il limite di grandezza degli atomi, se Dionisio, notando la differenza con Epicuro, poteva attribuirgli l'opinione che vi fossero atomi grandissimi: Dionys. ap. Eus. *Praep. ev.* XIV 23, 2, 3 *ταύτης δὲ τῆς δόξης Ἐπίκουρος γεγόνασι καὶ Δ. τοσοῦτον δὲ διεφώνησαν ὅσον ὁ μὲν* [*Ἐπ.*] *ἐλαχίστας πάσας καὶ διὰ τοῦτο ἀνεπαισθήτους, ὁ δὲ καὶ μ ε γ ί σ τ α ς εἶναί τινας ἀτόμους ὁ Δ. ὑπέλαβεν.* E secondo Aezio nel sistema democriteo si sarebbero dati atomi grandi come mondi; Aet. I 3, 18 (*Dox.* 285) *δυνατὸν ⟨δ'⟩ εἶναι* (sc. *Δ. φησι*) *κοσμιαίαν ὑπάρχειν ἄτομον.*

Epicuro invece cercò di sfuggire il pericolo che gli si attribuissero atomi di grandezza tale che non potessero essere invisibili, e considerando che la forma di qualsiasi cosa, e perciò anche degli atomi, può solo variare con la varia combinazione delle sue parti, e dovendo queste negli atomi essere pochissime, perchè un gran numero di parti importa una considerevole grandezza (2), negò l'infinità di forme atomiche. Se non che gli competeva poi di mostrare come con forme finite di atomi fosse possibile quella variazione delle qualità individuali dei corpi, per cui Democrito e Leucippo si erano veduti costretti ad ammettere infinite forme di atomi. E in verità il còmpito era più facile per Epicuro, il quale non essendo così vicino ad Eraclito ed agli Eleatici, non rimaneva sotto l' influsso della loro

---

(1) Vedi sulle *partes minimae* in Epicuro e probabilmente anche in Leucippo e Democrito, Giussani *Stud. Lucr.* p. 56.

(2) Lucr. II 478 sgg. " Quod quoniam docui pergam conectere rem quae | Ex hoc apta fidem ducat primordia rerum | Finita variare figurarum ratione | Namque in eadem una cuiusvis brevitate | Corporis inter se multum variare figurae | Non possunt . . . . | Ergo formarum novitatem corporis augmen | Subsequitur. Quare non est ut credere possis | Esse infinitis distantia semina formis, | Ne quaedam cogas immani maximitate | Esse, supra quod iamdocui non posse probari „.

dottrina che il mondo sensibile si mutasse continuamente ed ogni conoscenza non potesse essere che soggettiva (1). Epicuro spiegava perciò certe mutazioni apparenti di fenomeni con la diversa reazione su diversi sperimentatori (ad esempio, il dolce che pare amaro a un ammalato), altre — come certe mutazioni di colore — colla modificazione dell'ambiente esterno, la maggior parte poi con la diversa disposizione degli atomi nei moti atomici, o con l'aggiunta o la sottrazione di componenti, ed è appunto ciò che egli dice nel § 54 di questa epistola *αἱ δὲ ἄτομοι μηδὲν μεταβάλλουσιν, ...ὃ τὰς μεταβολάς* [*delle qualità*] *οὐκ εἰς τὸ μὴ ὂν ποιήσεται οὐδ' ἐκ τοῦ μὴ ὄντος* [come nell'ilozoismo ionico] *ἀλλὰ κατὰ μεταθέσεις τινῶν δὲ καὶ προσόδους καὶ ἀφόδους* (2).

(1) Dem. fr. 125 D. *νόμῳ γὰρ χροιή, νόμῳ πικρόν, νόμῳ γλυκύ.*

(2) *τινῶν — ἀφόδους*, furono aggiunte dal Giussani I 6; II 94, e dopo di lui dal Tescari (" Stud. ital. di filol. class. " XV p. 162), mentre l'Usener le pone in calce come una *varia lectio*. In realtà nei codici esse ci sono date come una *varia lectio* inserita nel testo, come indicano le parole che le precedono *ἐν πολλοῖς* (sc. *ἀντιγράφοις*, cfr. *Epic.* p. 72, l. 21 sgg.) *τινῶν κτλ.* Ma ha torto l'Usener a considerare questo come un *additamentum* " *hic loci profecto non genuinum* " (cfr. Lucr. II 770), perchè appunto il confronto con Lucr. prova che l'aggiunta è necessaria: (I 675) " Certissima corpora quaedam | Sunt quae conservant naturam semper eandem | *Quorum abitu aut aditu* mutatoque ordine mutant | Naturam res et convertunt corpora sese ". E del resto, ad esempio, il color rosso che si riflette dal velario sulla scena del teatro proviene precisamente da una velatura di atomi rossigni che dalla tenda si posa su tutte le cose che vi son sotto. A torto però il Giussani e dopo lui il Tescari conservano l'antica correzione (contro l'autorità dei codici che hanno *ἐν πολλοῖς*) *μεταθέσεις μὲν πολλῶν τινῶν δ. κ. πρ. κ. ἀ.*, perchè la lezione che ne risulta, fa supporre che in *tutti* i mutamenti di qualità debbono concorrere i due processi, di mutamento di posizione e di aggiunta o sottrazione di elementi, ciò che evidentemente non è vero; nè è giusto il contrapposto *πολλῶν — τινῶν* perchè molti possono essere gli elementi aggiunti che modificano un composto e pochi essere al contrario gli elementi che mutano posizione: cfr. infatti Lucrezio II 680 sgg.: " Nil referret enim quaedam decedere, abire, | Atque alia adtribui, mutareque ordine quaedam... "; e subito dopo considera solo il caso della mutazione, come quello che in certi fenomeni si presenta da solo, come abbiamo visto, 684: " sunt quaedam corpora, quorum | Concursus motus ordo positura figurae | Efficiunt ignis, mutatoque ordine mutant | Naturam ". *ἐν πολλοῖς* è il lemma di una *varia lectio* e non una correzione di *μὲν πολλῶν*; se poi questa *varia lectio* è genuina non è però necessario, ac-

Come si vede, dunque, egli ha in questa parte, di mira la polemica contro Democrito, per spiegare come anche senza una infinità di forme atomiche si possa rendere ragione del *μεταβάλλειν* delle qualità nelle cose (1), e tale accenno è appunto chiaro nella conclusione di questa parte dell'epistola ad Erodoto: *ἱκανὰ οὖν τὰ ὑπολειπόμενα ταῦτα τὰς τῶν συγκρίσεων διαφορὰς ποιεῖν*, donde si vede anche che qui *διαφοραί* è preso nel senso di *μεταβολαί* di poche linee sopra.

Con ciò è dunque manifesto che Epicuro nel § 56 scrivendo: *πᾶν δὲ μέγεθος ὑπάρχειν* [sc. *ταῖς ἀτόμοις*] *οὔτε χρήσιμόν ἐστιν πρὸς τὰς ποιοτήτων διαφορὰς* [e perciò anche *μεταβολὰς* cfr. Aten., p. 14, 20, e le testimonianze citate su Democrito, particolarmente p. 18] *ἀφῖχθαί τε ἄμ' ἔδει καὶ πρὸς ἡμᾶς ὁρατὰς ἀτόμους*, si riferisce a questo punto della sua polemica con Democrito, in quanto le infinite forme atomiche richiedono una notevole variazione di grandezza degli atomi fra loro e non sono necessarie a spiegare le differenze individuali delle cose e il mutare delle qualità di esse, ma anzi ci costringerebbero ad ammettere atomi troppo grandi, sì che sarebbero visibili.

Ed ormai poichè è risultato chiaro che nello scolio in questione *non si può parlare dell'impossibilità che le qualità mutino*, perchè esse mutano — e conviene anzi *spiegare come possa avvenire la mutazione* — e poichè è risultato anche che il limite di grandezza degli atomi è posto da Epicuro in relazione con le qualità solo in questo passo della lettera ad Erodoto, dove tende a confutare, con gli argomenti che abbiam visto, la teoria di Democrito, conviene che nello scolio, ove si anticipa una spiegazione che Epicuro darà, sia contenuto precisamente quello stesso punto di dottrina che abbiamo or ora illustrato. Esaminando dunque la seconda parte dello scolio: *λέγει δέ, ἐπειδὴ*

---

cogliendola, alterare il testo contro la realtà del sistema epicureo. Piuttosto credo debba correggersi *κατὰ μεταθέσεις ⟨τινῶν⟩, τινῶν δὲ καὶ*. Pecca poi in particolare la versione del Tescari, che traducendo (p. 178) *sed secundum translationem multorum* [*id est secundum*] *quorundam accessiones et recessiones*, fa credere, con le parole messe da lui tra parentesi quadrate, che la *translatio multorum* consista nelle *accessiones et recessiones*, ciò che non è vero.

(1) Anche Metrodoro aveva scritto un trattato *περὶ μεταβολῆς*. V. Diog. Laert. X 24, e Philod. *π. εὐσ.* p. 122 sgg. Gomp.

αἱ ποιότητες μεταβάλλονται, εἰ μέλλει τις μὴ καὶ τοῖς μεγέθεσιν ἁπλῶς εἰς ἄπειρον αὐτὰς ἐκβάλλειν si vede chiaro — (a chi pensi che lo scolio è posto proprio a spiegare perchè non siano le forme degli atomi infinite [*οὐχ ἁπλῶς ἄπειροι ἀλλὰ μόνον ἀπερίληπτοι* (1)]) che esso è inintelligibile solo per una lievissima corruzione che è tosto sanata se si legge *κεἰ* invece di *εἰ*. Cioè, all'affermazione che le forme degli atomi non sono infinite, lo scoliasta, anticipando ciò che verrà in seguito, e dando la spiegazione di questa modificazione dell' atomismo, ci dice ciò che ivi ha ommesso Epicuro, cioè che le forme non sono infinite " *perchè le mutazioni delle cose possono benissimo spiegarsi anche senza stabilire infinito il limite atomico quanto alla grandezza* „ [e non solo per la piccolezza, come è detto sopra nello stesso scolio], limite che si distrugge come vedemmo, se si debbono ammettere infinite forme di atomi. Perciò con la lievissima correzione *κεἰ* in luogo di *εἰ* abbiamo fatto sì che lo scolio corrisponda *all'unica spiegazione possibile e richiesta sì dalla teoria di Epicuro, come dall'ufficio di commentatore che lo scoliasta doveva esercitare in questo passo, in cui Epicuro non aveva data ragione perchè le forme degli atomi non fossero ἄπειροι; e per di più abbiamo fatto sì che le parole dello scoglio corrispondano al passo che esso dice richiamare, come quello in cui sono messe in relazione le ποιότητες e il limite di grandezza degli atomi.*

Occorrerà solo osservare che qui due scolii successivi, e non uno solo, sono stati trascritti dal margine nel testo, perchè la prima parte *οὐδὲ γάρ φησι ...τυγχάνειν* era probabilmente apposta ad *ἄπειροι* (vedi nello scolio *εἰς ἄπειρον*) e l'altra *λέγει δὲ* [con la stessa forma iniziale che nello scolio a pag. 22, 21, citato sopra] si riferisce, come abbiamo visto, ad *ἀπερίληπτοι*. Chi copiò l'epistola ad Erodoto, con sì poco discernimento da inserire nel testo questi due scolii che evidentemente non facevano parte del testo, li unì pure quantunque debbano essere separati, e ciò fece anche perchè, scritti nel margine, si seguivano immediatamente l' uno all' altro. Del resto, dopo *ἄπειροι* troppo evidentemente il primo scoglio avrebbe interrotto il contesto, mentre dopo il punto potevano stare ambedue.

---

(1) *ἀπερίληπτοι* è il lemma dello scolio.

Credo così di avere interpretato e corretto in modo persuasivo questo scolio che finora ha invano tormentato i critici, e di avere in qualche modo illuminato un punto della polemica epicurea contro Democrito e gli antichi atomisti.

Aggiunta. — Con piacere, sapendo di fare cosa grata agli studiosi, aggiungo alcuni chiarimenti che il mio amico R. Philippson mi manda, credendoli opportuni a dilucidazione delle sue proposte.

A p. 7 egli avverte che intende *τοιούτω⟨ν⟩* (l. 21) e *το[ύτων]* (l. 21) riferiti agli idoli divini, i quali dai *metacosmia* sino a noi subiscono varie modificazioni.

A p. 11 nota che ad *αὐτὰ τὰ κ. τ. σ.* egli sottintende *ἀγαθά*, e dopo *ἀθρεῖς* sott. *τὰ ἐκ τοῦ σώματος φερόμενα*, cosicchè si abbia un esatto parallelo grammaticale con *γινόμενα διὰ μορφ. κ. συμμ.*

Relazione intorno alla memoria su *Il problema del combustibile nel periodo rivoluzionario, come fattore della distribuzione topografica delle industrie*, del prof. Giuseppe Prato.

La monografia che ci è messa dinnanzi dal prof. Giuseppe Prato per la pubblicazione nelle memorie accademiche tocca uno dei problemi più importanti nella scienza e nell'arte economica. Il Roscher, che fu certamente tra i più profondi indagatori del problema della distribuzione topografica delle industrie, così riassume i suoi studi:

" Allorchè la divisione del lavoro non è molto sviluppata, " i vantaggi derivanti dalla prossimità del luogo di consumo " hanno grande influenza sulla sede dell' industria; mentre, a " misura che la divisione del lavoro si estende, e che i processi " tecnici si perfezionano, l'industria tende a stabilirsi là dove " si manifestano vantaggi particolari per la produzione „. Influenza preminente dei luoghi di consumo in un periodo iniziale di sviluppo dell'industria, e dei luoghi dove la produzione è più economica in un periodo successivo di perfezionata divisione del lavoro: ecco dunque la legge storica affermata dal Roscher ed accolta, dopo di lui, da molti economisti.

Il prof. Prato si è proposto il còmpito di verificare, in un caso particolare, l'esattezza della legge roscheriana. Parve a lui che il principio, così come fu sopra enunciato, non tenesse conto di parecchi fattori importanti anche nel periodo iniziale dello sviluppo delle industrie e principalmente delle esigenze create dagli approvvigionamenti di combustibile, le quali dovevano ten-

dere ad avvicinare le industrie ai luoghi di produzione di siffatte indispensabili materie sussidiarie con forza tanto maggiore, quanto più malagevoli erano per lo passato i trasporti, vuoi per la viabilità manchevole e difettosa, vuoi per l'esclusivo impiego del legname come combustibile industriale, prima che fosse diffusa l'utilizzazione del carbon fossile.

Di qui una stretta connessione del problema industriale col problema forestale, che improntò di peculiari caratteristiche la evoluzione di entrambi e stabilì intimi rapporti fra le legislazioni intese a disciplinarne, secondo i criteri intervenzionistici dell'epoca, la pratiche soluzioni.

Ristudiare il problema dei rapporti fra localizzazione dell'industria e distribuzione delle foreste, e riprendere, su più ampia messe di fatti, lo studio di quello speciale aspetto della politica vincolistica e mercantilistica, finora appena abbozzato per incidenza dagli storici dell'economia: ecco il còmpito propostosi dall'autore della memoria. L'occasione gli venne fornita dalla scoperta da lui fatta, fra le carte non inventariate dell'Archivio di Stato di Torino, dei documenti di una vasta inchiesta ordinata nel 1782 dal governo piemontese per accertare lo stato dei boschi ed il suo rapporto con lo sviluppo delle industrie nel regno.

Premessi alcuni cenni riassuntivi sulle varie fasi attraversate dalla legislazione forestale in Europa correlativamente allo svolgersi della vita economica ed al mutare della struttura sociale, l'A. classifica ed analizza minutamente gli editti sabaudi in tale materia, illustrando i criteri tecnici ed economici a cui era pervenuto questo ramo della pubblica amministrazione negli ultimi anni dell'antico regime. Esamina in seguito la condizione del patrimonio forestale negli Stati continentali del Regno e le cause che tendevano a diminuire e devastare i boschi, dovute le une a male pratiche e ad abusi, ma altre alla nuova vita economica che pulsava nel paese.

Appartiene a queste ultime il consumo crescente di legna richiesto dalle industrie. Il quale viene minutamente analizzato dall'A., in base ai dati dell'inchiesta e di molti altri documenti inediti, passando l'un dopo l'altro in rassegna successivamente i diversi rami di produzione e tentando infine un calcolo approssimativo generale del quantitativo medio di combustibile

assorbito dalle fabbriche, manifatture, mestieri, ecc., e la dotazione di selve necessaria a fornirlo. Completando tale calcolo con quello del fabbisogno medio di legna per altri usi, e confrontando tali cifre con quelle relative all'estensione e produttività dei boschi, l'A. giunge alla conclusione che giustamente il governo sabaudo si preoccupava del problema in vista dello sviluppo industriale del paese, pur essendo tuttora il Piemonte uno dei paesi europei più ricchi di foreste e perciò meglio suscettibile di progressi industriali, in confronto anche della Francia e sopratutto dell'Inghilterra.

Le previsioni di buon avvenire industriale traevano forza però soltanto dalla possibilità di conservare e riprodurre la dotazione, ancor grande ma pure via via esaurentesi, di foreste. I funzionari inquirenti facevano dipendere la scelta del luogo dove far sorgere nuovi opifici dalla vicinanza ed accessibilità dei boschi; studiavano il decadere delle industrie in funzione dello scarseggiare di legna; e leggi e regolamenti numerosi e minuziosi cercavano di distribuire equamente, equilibrare, regolamentare le iniziative ed i diritti delle singole intraprese nelle gare di appropriazione di una così preziosa naturale ricchezza. Un capitolo speciale è dedicato dall'A. a studiare le dottrine economiche a cui si ispiravano i suggerimenti ed i consigli trasmessi al ministro dai funzionari dell'amministrazione provinciale incaricati di curare la conservazione dei boschi; e dall'indagine acuta e larga quei funzionari ci appaiono assai più liberali, assai più curiosi della letteratura economica straniera di quanto potesse supporsi in un paese considerato tradizionalmente chiuso in sè stesso e tutto dedito alle armi e devoto alle tradizioni. Il rimboschimento diretto ad opera dello Stato è dai più sconsigliato; e solo si ammette in casi eccezionali di lande sterminate nude, dove la popolazione sia radissima, come nelle 10.000 giornate della Vauda in quel di S. Maurizio, Ciriè, Leynì, Volpiano, Vauda e comuni limitrofi. Più favorevole accoglienza trovano le provvidenze indirette, come la vendita dei beni comunali con l'obbligo del rimboschimento, i premi ai comuni ed ai privati, ecc., ecc.

Nuovi tempi frattanto incalzavano. Il primato industriale che Germania e Scandinavia e forse anche in parte il Piemonte meglio dotati di boschi, minacciavano di togliere all'Inghilterra,

viene a questa serbato dalla utilizzazione economicamente conveniente del carbon fossile, avvenuta alla fine del secolo XVIII. Il combustibile legna lotta a lungo contro il nuovo concorrente; le industrie localizzate nei centri di produzione forestale tentano di resistere ai bassi prezzi dei prodotti ottenuti mercè il più economico carbone di pietra. Ma alfine devono cedere. La vittoria del carbon fossile sulla legna, e non altri fattori industriali, come l' allevamento artificiale delle industrie in una Inghilterra protezionista, conserva ed anzi rafforza il primato britannico. Valli popolose per traffici e manifatture ritornano allo stato agricolo; e solo in qualche località (Biellese, Altare) si conservano le tradizioni industriali dell'età della legna. Una nuova distribuzione delle industrie va attuandosi a poco a poco; ma non ancora l' equilibrio sembra raggiunto, che esso è oggi nuovamente minacciato, in maniera augurale per l' Italia, da nuove vicende: l'approfondimento progressivo dalle miniere di carbone fossile ed il rialzo dei costi del minerale, le mirabili invenzioni della scienza dell'elettricità e le ancor più mirabili sue applicazioni industriali promuovono un vero ricorso storico. L'industria, disgiunta, nell'êra del carbone, dalle foreste e dalle montagne, ora torna ad esserne dipendente. Le strette relazioni fra il regime idraulico e la sistemazione dei bacini montani con il problema capitale del rimboschimento fanno intravvedere nell'avvenire nuovi strettissimi rapporti tra la distribuzione e la prosperità dell'industria e la distribuzione e la ricchezza delle foreste.

Tale la trama della monografia del Prato; che a noi sembra nuova nella concezione teorica, freschissima per la copia delle notizie storiche ignorate tratte alla luce, importante nelle conclusioni dottrinali e nelle applicazioni amministrative, condotta con rigore di critica nell' uso dei documenti archivistici e con ampia conoscenza della letteratura straniera ed italiana, onde raccomandiamo vivamente alla Classe di volere approvare l'inserzione della monografia nelle memorie accademiche.

Francesco Ruffini,
Luigi Einaudi, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLVII, Disp. **12ª**. **1911-1912**.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 28 Aprile 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti il Direttore della Classe Naccari, ed i Soci: D'Ovidio, Jadanza, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Grassi, Somigliana, Fusari e Segre, Segretario. — Scusano l'assenza il Vice-Presidente Camerano ed il Socio Foà.

Si legge e si approva il verbale della seduta precedente.

Vengono presentate per l'inserzione negli *Atti* le seguenti Note:

Guareschi, *Nuova reazione del bromo, sensibilissima anche in presenza degli altri alogeni*;

Guidi, *Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro*;

Mattirolo, " *Jaczewskia* ", *Illustrazione di un nuovo genere di Hysterangiacea*;

V. Monti, *Sull'influenza climatica della elevazione media delle masse montagnose nella catena alpina* (presentata dal Socio Naccari);

P. Giacosa, *Studi farmacologici sui soterii della digitale* (presentata dal Socio Fusari).

LETTURE

Nuova reazione del bromo, sensibilissima anche in presenza degli altri alogeni.

Nota del Socio ICILIO GUARESCHI.

In una mia nota: *Alcuni nuovi derivati dei cicloesanoni* (1) ho fatto osservare che scaldando con alcol a 60 $^{0}/_{0}$ il derivato bibromurato della ββ-pentametilen-1.2.-dicianglutarimide per trasformarlo nel derivato trimetilenico corrispondente, si eliminava probabilmente dell'aldeide. I vapori alcolici raccolti nella soluzione della fucsina decolorata col gas solforoso, o reattivo di Schiff per le aldeidi, coloravano il reattivo istantaneamente in un bel azzurro-violaceo intenso. Però mi avvidi subito che insieme ai vapori alcolico-aldeidici passavano anche dei vapori di bromo e mi nacque il dubbio che il bromo avesse parte nella reazione. Anche la grandissima rapidità colla quale si produsse la colorazione azzurro-violetta mi fece dubitare che non fosse dovuta solamente ad aldeide. Ed invero facendo cadere i *vapori di bromo*, o qualche goccia d'*acqua di bromo*, nel detto reattivo si manifestò subito la intensa colorazione azzurro-violetta sovraccennata. Coll'*acqua di iodo* invece non si ha affatto colorazione e coll'*acqua di cloro* un colore giallo-bruno e talora anche qualche cosa di rossastro, ma mai una netta e intensa colorazione come si ha col bromo libero.

Una goccia di acqua di bromo al 1 $^{0}/_{00}$ in 1 cm^3 d'acqua dà ancora la reazione violetta con carta bagnata appena nel reattivo di Schiff. Due centesimi di cm^3 di una soluzione al 1 $^{0}/_{00}$ di bromo dànno ancora la colorazione con una traccia di reattivo. Bisogna sempre evitare un eccesso del reattivo.

Quando si versa il reattivo nella soluzione acquosa anche molto diluita di bromo e di iodo si ha la colorazione violetta

(1) " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ,, 23 aprile 1911, t. XLVI.

caratteristica del bromo anche quando il iodo eccede in grande quantità; le soluzioni mescolate dei tre alogeni anche in rapporti diversi dànno la colorazione violetta o violetto-rossa a seconda dei casi. Se pochissima acqua di bromo si trova in presenza di molto iodo e molto cloro, allora bisogna mettere poco reattivo, basta bagnare una cartina col reattivo Schiff e questa si colorirà lentamente in violetto.

Se si mescola una goccia di acqua di bromo con un eccesso di acqua di iodo e si tratta la miscela con poco reattivo fucsinico, si ha subito la colorazione accennata. Così pure se si agisce su una miscela di poca acqua di bromo con molta acqua di iodo e di cloro. Si deve aggiungere il reattivo a goccie e agitando.

La colorazione col bromo si ha con quantità minime di questo elemento ed è una reazione che può servire non solo a riconoscere subito questo alogeno, ma a distinguerlo in presenza del cloro e del iodo ed a riconoscere delle piccolissime quantità di bromuri in un eccesso di ioduri e di cloruri.

Quando si mette una carta bagnata col reattivo di Schiff per le aldeidi in un grande matraccio contenente appena traccie di vapori di bromo, si manifesta una bellissima ed intensa colorazione azzurro-violacea. Questa reazione non avviene coi vapori di iodo nè col gas cloro, nè coll'ossicloruro di cromo nè coi vapori nitrosi e, dico subito, nemmeno coi vapori di aldeidi. È reazione caratteristica del bromo, ed assai sensibile, e può servire come elegante esperienza di lezione quando si mettano in tre matracci separatamente un poco d'acqua di cloro, d'acqua di bromo e d'acqua di iodo e vi si sospenda una larga striscia o listerella di carta bagnata col reattivo. I vapori di iodo non colorano affatto la carta, il cloro dà solamente un lieve giallo brunastro, e il bromo dà la intensa e magnifica colorazione azzurro-violetta.

La carta deve essere purissima, priva affatto di amido, quale è la celebre carta svedese o carta Berzelius.

Nel principio di queste ricerche ottenevo delle reazioni colorate alquanto incerte relativamente al riconoscimento del bromo in presenza del iodo, perchè adoperavo della carta da filtro, buona sì, ma che conteneva delle piccole quantità di materia amidacea. In questo caso i vapori di iodo dànno un color azzur-

rognolo grigio che solamente a poco a poco passa alla colorazione dovuta al bromo. La sensibilità colla carta purissima è maggiore.

Se si tratta una sola goccia di una soluzione diluita di una miscela di ioduro potassico contenente anche meno di 1 $^0/_0$ di bromuro, con acqua di cloro e a poco a poco sino a che il iodo messo in libertà si sia ridisciolto ed il liquido sia quasi incoloro e si aggiunga una goccia del reattivo Schiff, si avrà subito, agitando, la colorazione azzurro-violetta. Se, talora, la reazione non appare subito, si può aggiungere qualche goccia d'acqua di cloro. Dibattendo il liquido con etere la materia colorante si raccoglie fra lo strato etereo e lo strato acquoso; invece la colorazione che il medesimo reattivo produce coll'aldeide o la formaldeide, è rosso violaceo e dibattendo il liquido con etere questo non esporta la materia colorante. Così pure la colorazione dovuta al bromo passa nel cloroformio se si dibatte il liquido con cloroformio, mentre non passa in questo solvente se è dovuta al bromo.

Si può quindi così distinguere se la colorazione è dovuta ai vapori di bromo o alla aldeide.

Si possono ricercare i bromuri nei ioduri trattando un poco della soluzione con eccesso di cloro, poi dibattere con etere ed aggiungere il reattivo; la presenza dei bromuri è svelata dalla colorazione azzurro-violetta del liquido sottostante.

Un modo molto più comodo e sicuro per riconoscere i bromuri nei cloruri e ioduri alcalini, consiste nel trattare uno o due decigrammi del sale entro matraccino od un pesa-filtri, con alcune goccie d'acqua, con 4 a 5 cm^3 di soluzione d'acido cromico al 15 od al 25 $^0/_0$ (1), e sospendere nell'interno del vaso una cartina inumidita col reattivo; dopo poco tempo si manifesta la colorazione azzurro-violacea, che talora tende al porporino. La reazione ha luogo a freddo, ma anche scaldando lievemente. Dopo 10 minuti circa rinnovando la carta reattiva si ha immediatamente la colorazione violacea; colorazione che si può ripetere varie volte rinnovando la cartina. Reazione intensa e prolungata si ha con ioduro potassico contenente anche meno del $^1/_2$ $^0/_0$ di bromuro; evidentissima ancora con ioduro contenente 1 : 500 di bromuro ed anche molto meno.

---

(1) L'acido cromico impiegato conteneva una piccolissima quantità di acido solforico.

Il iodo e il cloro puri non dànno questa reazione nemmeno quando sono mescolati.

Anche i ioduri puri privi di bromuro non danno la reazione.

Si potrà, volendo, spostare il bromo dai bromuri anche con uno dei tanti metodi conosciuti, come ad esempio con bicromato potassico ed acido solforico al 50 %, col permanganato potassico solo o insieme al solfato di rame, ecc. Io mi sono limitato all'uso dell'acido cromico al 25 %, perchè l'ho trovato più conveniente e perchè non vi è nessun inconveniente anche se vi sono nel tempo stesso dei cloruri e dei ioduri insieme al bromuro.

Ma una sensibilità pure grande si ha facendo uso di striscie o listerelle di carta, inumidite col reattivo fucsinico, contenute in un piccolo tubo di vetro attraverso al quale, mediante un aspiratore si fa passare una lenta corrente d'aria che trascina i vapori di bromo (1). La soluzione o il sale da esaminare può essere contenuto in una piccola boccetta di Habermann od altra analoga. Operando in questo modo e mescolando un poco del sale da esaminare con alcune goccie d'acqua e poi circa 5 cm^3 di soluzione di acido cromico al 25 %, si ha dopo pochi minuti la caratteristica colorazione, specialmente se si mette la cartina inumidita col reattivo dentro un tubo stretto e in modo che i

---

(1) Per riconoscere il bromo libero o i bromuri, lo Swarts (" Bull. Roy. Acad. de Belgique ", 1889 (3), t. XVII, p. 359 e " Jahresbericht f. Chem. ", 1889, p. 2329) ha raccomandato l'uso della *fluoresceina*, la quale col bromo si colora in roseo (eosina). Nel caso dei bromuri mette in libertà il bromo coll'ipoclorito di sodio. Questa reazione è però ostacolata dalla presenza dei joduri, il cui jodo deve essere precipitato allo stato di joduro rameoso.

Nel 1897 (" C. R. ", t. 125, p. 654) il Baubigny raccomandò pure l'uso della fluoresceina (senza ricordare, credo, il lavoro precedente dello Swarts); egli adopera delle carte bagnate con fluoresceina sciolta in acido acetico, che si colorano in rosa col vapore di bromo. Ma il cloro ostacola questa reazione ed il jodo pure, e questo deve essere trasformato in jodato per riscaldamento con permanganato. Baubigny sposta il bromo dai bromuri con una miscela di permanganato potassico e solfato di rame. Questa reazione colla fluoresceina fu poi modificata da Labat (" Bull. trav. de la Soc. Pharm. de Bordeaux ", 1911, pag. 347; e 1912, p. 17).

Comunque sia, la mia reazione è più semplice e sicura, ed avviene anche in presenza degli altri alogeni. La colorazione delle carte fluoresceiniche non è così bella nè così intensa come quella col reattivo fucsinico.

vapori incontrino bene la superficie bagnata. Allora si ha nettissima la caratteristica reazione con piccolissime quantità di bromuro, anche se è mescolato a molto cloruro o a molto ioduro, oppure a cloruro e ioduro insieme.

Così esperimentando, si svela facilmente 0,5 $^0/_0$, ed anche molto meno, di bromuro potassico in una miscela a parti eguali di cloruro e di ioduro potassico; si svela 1 p. di bromuro in 6-7000 p. di cloruro potassico; circa 2 gr. di cloruro di sodio cui fu aggiunto $^1/_3$ di milligramma di bromuro potassico diedero dopo circa 10 a 15 minuti nettamente la colorazione indicata.

La presenza dei cloruri e dei ioduri in questo modo non ostacola la reazione. Ad un ioduro contenente meno del 0,5 $^0/_0$ di bromuro ho aggiunto un egual peso di cloruro potassico e la reazione col reattivo fucsinico si è avuta nettissima.

La reazione nettissima ho avuta con svariate miscele di cloruro, bromuro e ioduro potassico a parti eguali, o con pochissimo bromuro, con cloruro e traccie di bromuro.

La reazione data dal bromo resiste bene anche alla piccola quantità di cloro che può svilupparsi, specialmente a freddo, per l'azione dell'acido cromico sui cloruri.

Mescolai a 3 gr. di cloruro di sodio puro 1 mgr. di bromuro potassico, poi aggiunsi 4 a 5 cm^3 di soluzione d'acido cromico al 15 $^0/_0$ e dopo pochi minuti ebbi manifesta la colorazione azzurro-violetta, che si ripetè cambiando la cartina reattiva. La reazione in bianco nelle stesse condizioni e contemporaneamente fatta con 3 gr. dello stesso cloruro non diede nulla e solo dopo qualche ora diede una lieve colorazione rosea, che è impossibile confondere colla colorazione data dal bromuro, e forse dovuta a minime traccie di bromuro contenuto nel cloruro.

Delle traccie di bromuri si svelano anche nel ioduro potassico detto purissimo, che forniscono le fabbriche di prodotti chimici; basta a questo scopo trattarne circa gr. 0,2 con poche goccie di acqua, poi con 5 o 6 cm^3 di acido cromico e farvi gorgogliare l'aria: dopo circa 10 minuti si ha la colorazione azzurro-violetta sulla cartolina. Invece il iodo puro o un ioduro puro, trattati nello stesso modo non dànno nulla, ma coll'aggiunta di una traccia di bromuro, questo dà subito la reazione. Anche il iodo puro misto a cloruro potassico non dà la reazione, ma la dà subito quando vi si aggiunga una traccia di bromuro.

Un vecchio campione di ioduro potassico, detto di Carof, trattato nel modo indicato ha data manifestissima la reazione del bromo. Così pure un campione di ioduro potassico (gr. 0,2) di Kahlbaum del 1906, diede visibilissima la reazione del bromo e un altro campione del 1908 lieve. Nessuna, o assai lieve, da un vecchio campione di ioduro della fabbrica di Hobein.

L'acqua salso-iodica di Sales, trattata direttamente coll'acido cromico al 25 $^0/_0$ ed a volumi uguali, dà manifestissima la reazione del bromo, anche quando si impiega 1 cm^3 di acqua. In tal modo trovai il bromo in 1 gr. di sali *Vichy État* che servono a preparare le acque di Vichy in casa.

Un cm^3 di acqua di Castrocaro dimostrò di contenere pochissimo bromo; nelle acque di Salsomaggiore, che servono come bevanda, ve n'era pochissimo. Si scoprì subito facilmente nei sali di Salsomaggiore e nei sali di mare artificiali.

Ho potuto in questo modo riconoscere il bromo nel cloruro di sodio commerciale, che serve come alimento. Si mescolano gr. 5 del cloruro da esaminare, tanto il *greggio* quanto il *raffinato*, con 5-6 cm^3 di acido cromico al 25 $^0/_0$. Si lascia la miscela a sè alcuni minuti entro al recipiente chiuso, poi si fa passare la corrente d'aria attraverso al liquido e sulla carta reattiva; dopo poco tempo si nota la caratteristica colorazione violetta. Anche alcuni campioni di cloruro sodico purissimo commerciale davano la reazione del bromo. Ho osservato che quando il bromuro trovasi solamente in minime traccie è bene lasciare la miscela col reattivo a sè per un certo tempo, affinchè tutto quel poco bromo possa mettersi in libertà, ma non troppo lungo tempo.

La sensibilità di questa reazione è grande; la colorazione violetta è ancora visibile con 0,00001 di KBr in 0,1 cm^3 di soluzione trattata con 2 cm^3 di acido cromico al 25 $^0/_0$.

Anche il cloruro di bario puro non dà nulla, ma se contiene traccie di bromuro di bario fornisce subito la colorazione.

I nitriti impediscono la reazione; ma è facile eliminarli; coi solfocianati o non si ha reazione oppure lieve colorazione rosea.

Se si tratta con acido solforico concentrato un cloruro mescolato bene con biossido di manganese e si fanno passare i vapori attraverso la cartina inumidita col reattivo di Schiff, si colora per un istante un poco in violaceo, poi il colore scompare;

se al cloruro è unita una traccia di bromuro, la colorazione azzurro-violetta è ben manifesta ed è scolorata assai lentamente dall'eccesso di cloro.

La carta colorata in azzurro-violetto dall'aldeide si scolora subito immergendola nell'acqua di cloro diluitissima, mentre in questo caso la colorazione azzurro-violetta prodotta dal bromo resiste molto di più.

Ho osservato un fatto riguardo al comportarsi delle aldeidi con questo reattivo, che non so sia stato notato da altri. Facendo passare i vapori di aldeide etilica oppure di aldeide formica con corrente d'aria sulla cartina bagnata col reattivo Schiff, questa non si colora; nemmeno se l'aria passa attraverso una soluzione alcolica di aldeide. Anche sospendendo una carta bagnata col reattivo in un vaso contenente aldeide, non si colora. Bisogna, affinchè la soluzione di aldeide agisca, che si mescoli colla soluzione del reattivo. Lo stesso reattivo dunque, a seconda delle condizioni in cui si impiega, può servire tanto alla ricerca delle aldeidi quanto alla ricerca del bromo.

Ho fiducia che la reazione colorata da me trovata potrà servire a dimostrare la presenza o la mancanza del bromo in quei casi in cui sino ad ora si aveva incertezza; come, ad esempio, alla ricerca del bromo supposto esistente nell'organismo animale; tanto più quando trovasi insieme a grandi quantità di iodo. E potrà servire forse anche a ricercare poco iodo in presenza di molto bromo, assorbendo questo col reattivo sovra indicato. Forse potrà diventare un metodo di determinazione quantitativa dei bromuri in presenza di grandi quantità di cloruri e di ioduri.

Non ho esaminato completamente la materia colorante violetta che si forma nella reazione fra il bromo e il reattivo di Schiff. Ne ho preparato una certa quantità facendo agire direttamente l'acqua di bromo sul reattivo. Aggiungendo 50 cm^3 d'acqua di bromo, recentemente preparata, a 100 cm^3 di fucsina decolorata, ho ottenuto una bellissima colorazione violetta, e a poco a poco si depositò la materia colorante. Il bromo deve restare in lieve eccesso. In ogni operazione ottenni circa 0,2 di materia colorante, mentre la fucsina contenuta nei 100 cm^3 di reattivo era di circa 0,1. Da 1 gr. di fucsina decolorata col bisolfito e acido cloridrico in modo da avere 250 cm^3 di liquido,

ottenni circa 2 gr. di prodotto, ma dovetti impiegare 450 a 500 cm^3 di acqua di bromo. Molto bromo reagisce coll'acido solforoso. La stessa materia colorante ho ottenuto col reattivo preparato semplicemente decolorando la soluzione di fucsina colla corrente di gas solforoso.

Questa materia colorante si ha in polvere microcristallina, violetta, con riflesso metallico, quasi insolubile nell'acqua e nell'etere, solubile alquanto nell'alcol, nel benzene e nel cloroformio. L'alcol assoluto scioglie bene la materia colorante azzurro-violacea che è fissata alla cartina reattiva, mentre scioglie lentissimamente, o non scioglie affatto, la materia colorante fissata sulla cartina reattiva immersa nella soluzione di aldeide. Il cloroformio esporta l'una e l'altra.

Questa materia colorante contiene moltissimo bromo; si scioglie nell'acido solforico concentrato dando colore ranciato che con un granello di bicromato potassico dà una reazione alquanto analoga a quella data dalla stricnina; meno bene visibili però sono le striscie violette.

Non si scioglie che difficilmente nella potassa e nell'acido cloridrico. Si scolora con polvere di zinco ed ammoniaca.

Scaldata a temperatura elevata diventa di color giallo d'oro iridescente con splendore verde metallico bronzeo; poi passa al verde e finalmente si decompone.

Questa materia colorante tinge la seta, il cotone e la lana. Potrà essere utilizzata in tintura?

Probabilmente questo composto è identico col derivato bromurato ottenuto da Caro e Graebe (1) per l'azione del bromo sulla fucsina, e che nel Beilstein, *Handb. org. Chem.* 3ª ed. II p. 1091 è considerato come un *tetrabromoderivato* $C^{20}H^{17}Br^4N^3O$.

Il reattivo di Schiff per le aldeidi da me impiegato era stato preparato con soluzione di fucsina $C^{20}H^{24}N^3Cl.4H^2O$ al 1 ‰ decolorata con bisolfito di sodio ed acido cloridrico.

In una seconda nota farò vedere come questa reazione possa servire a svelare il bromo anche in minime quantità di materie organiche bromurate.

In queste ricerche sono stato aiutato con premura dal mio assistente Sig.ina D.r Maria Clotilde Bianchi, che ringrazio.

Torino. R. Università, 20 aprile 1912.

Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro [1].

Nota del Socio CAMILLO GUIDI

In una condotta forzata, costituita da un tubo a sezione retta circolare si suol riguardare la pressione idrostatica, da cui il tubo è cimentato, come una forza radiale distribuita uniformemente, supponendo trascurabile l'effetto derivante dal peso proprio del tubo e dalla differenza di *battente* d'acqua ai diversi livelli della sezione trasversale del medesimo. In tale ipotesi un anello elementare del tubo, *supposto di parete sottilissima*, si comporta notoriamente come la funicolare, curva delle successive risultanti, della forza ripartita suddetta, e la relativa curva delle forze è anch'essa un circolo, che in un'opportuna scala può farsi coincidere collo stesso circolo funicolare, sezione del tubo, rimanendo soltanto rotato di 90° rispetto ad esso. La sezione dell'anello si ritiene cimentata a tensione semplice, e lo sforzo unitario σ viene espresso dalla

$$(1) \qquad \sigma = p \frac{r}{s}$$

dove r ed s rappresentano rispettivamente il raggio interno e lo spessore del tubo, p la pressione interna unitaria.

Ma in realtà gli sforzi unitari interni da cui il tubo è cimentato, quand' esso sia di grande diametro, possono in taluni punti sorpassare notevolmente il valore dato dalla (1),

---

[1] Il presente studio era già ultimato quando venni a conoscenza dei seguenti altri scritti sull'argomento, i quali peraltro, se non erro, non tolgono del tutto l'opportunità di questa pubblicazione: Birault C., " Génie civil ", 1902-03; Forchheimer Ph., " Zeitschrift d. Oesterr. Ing. u. Arch. Vereines ", 1904; Alibrandi P., *Sul calcolo statico dei tubi*, " Annali della Società degli Ing. ed Arch. Ital. ", Roma, 1905.

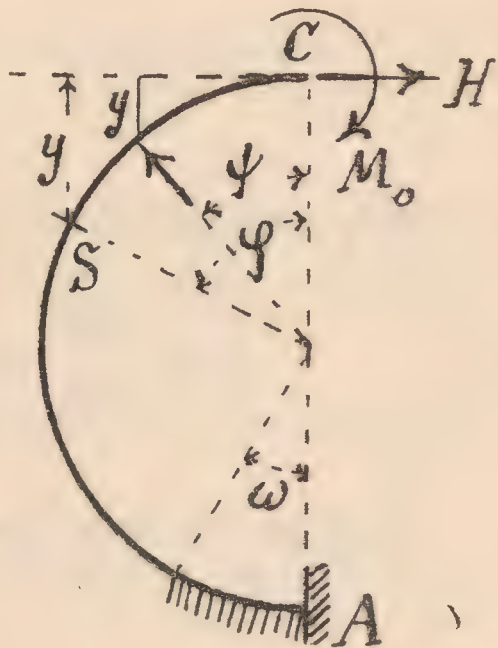
per effetto appunto del peso proprio del tubo e più ancora delle pressioni idrostatiche dovute esclusivamente alle differenze di battente d'acqua ai diversi livelli della sezione trasversale del tubo. Tali sforzi risultano talvolta così rilevanti che ne conseguirebbero deformazioni notevoli nel tubo se, quando la condotta è in carico, la stessa forte pressione idrostatica dovuta al battente al disopra della condotta, non contrastasse l'ovalizzazione del tubo. Ma nei periodi di riempimento o di vuotamento della condotta, quando sia nullo o piccolo il battente al disopra del tubo, quantunque le pressioni idrostatiche siano tanto minori, manca il suddetto contrasto, e possono allora più facilmente avverarsi deformazioni anormali non sconosciute ai tecnici.

Colla presente Nota vogliamo mettere in rilievo e dare la misura di questo fenomeno, che può causare talvolta gravi inconvenienti.

Consideriamo un tronco di tubo orizzontale lungo l' unità lineare, ed indichiamo con h l'altezza di carico d'acqua al disopra della generatrice più alta dell' intradosso; supponiamo il tubo appoggiato su tutta la sua lunghezza e per un arco di ampiezza $2\ \omega$. La pressione idrostatica elementare contro l'elemento $1.\ ds$ di superficie interna dell'anello, situato ad un livello y sotto quello della generatrice più alta dell'intradosso, è misurata da $(h + y)\ ds = hds + yds$, essendo eguale ad 1 la densità del liquido. Le pressioni elementari hds, tutte eguali, danno luogo, come si è detto, ad una *curva delle tensioni*, che può ritenersi coincidente colla fibra media dell'anello, stante il piccolo spessore del tubo, e la tensione sopportata dalla sezione dell'anello viene misurata notoriamente da hr.

Le pressioni idrostatiche elementari yds variabili invece da punto a punto danno luogo ad una curva delle successive risultanti che qui interessa determinare.

Fig. 1.

Tutto essendo simmetrico rispetto al piano verticale contenente l'asse longitudinale del tubo, si può limitare lo studio statico a mezzo anello (Fig. 1) che può essere riguardato come rigidamente incastrato

nella sezione infima A e sollecitato nella sezione al vertice da una tensione H e da un momento M_0, mentre, in grazia della simmetria, non si avrà sforzo di taglio nella detta sezione.

Le quantità H ed M_0, ambedue iperstatiche, possono essere ricavate dal *teorema delle derivate del lavoro*, il quale fornisce due equazioni di condizione esprimenti che la sezione al vertice, in grazia della simmetria, non subisce rotazione nè spostamento orizzontale; e cioè, indicando con L il lavoro di deformazione del semianello, dovrà aversi

$$(2) \qquad \frac{\partial L}{\partial M_0} = 0 , \qquad \frac{\partial L}{\partial H} = 0 .$$

E poichè, come si vedrà, la sollecitazione a flessione a cui rimane cimentato il semianello, è di un'importanza notevolmente maggiore di quelle a sforzo normale e taglio, si possono semplificare le suddette equazioni trascurando i lavori di deformazione a sforzo normale e taglio rispetto a quello a flessione.

Altra semplificazione concessa, in grazia del piccolo rapporto fra lo spessore ed il diametro del tubo, è quella di considerare l'elemento di anello come prismatico.

Con tali semplificazioni le (2) divengono notoriamente

$$\int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial M_0} ds = 0$$

$$\int \frac{M}{EJ} \frac{\partial M}{\partial H} ds = 0$$

od anche, trattandosi di un solido omogeneo e di sezione costante,

$$(3) \qquad \int M \frac{\partial M}{\partial M_0} ds = 0 ; \qquad \int M \frac{\partial M}{\partial H} ds = 0 .$$

Ora si ha per una sezione qualunque S

$$M = M_0 + Hy - \mathfrak{M}$$

dove $\mathfrak{M}$ è, in valore assoluto, il momento, rispetto alla sezione S, della pressione idrostatica che si esercita sulla porzione CS di anello. Determineremo, in seguito, separatamente i valori di M_0

ed H prodotti dalla reazione dell'appoggio, come pure l'effetto prodotto dal peso proprio del tubo dal quale per ora facciamo astrazione. Si ha pertanto:

$$\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1, \qquad \frac{\partial M}{\partial H} = y,$$

quindi le (3) possono scriversi

$$M_0 \int ds + H \int y\, ds = \int \mathfrak{M}\, ds$$

$$M_0 \int y\, ds + H \int y^2\, ds = \int \mathfrak{M}\, y\, ds$$

od anche

$$M_0 \int_0^\pi d\varphi + H \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)\, d\varphi = \int \mathfrak{M}\, d\varphi$$

$$M_0 \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)\, d\varphi + Hr \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^2\, d\varphi = \int_0^\pi \mathfrak{M}\, (1 - \cos\varphi)\, d\varphi$$

ed essendo

$$\int_0^\pi d\varphi = \pi, \qquad \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)\, d\varphi = \pi, \qquad \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^2\, d\varphi = \frac{3}{2}\pi$$

le due equazioni possono anche scriversi

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} M_0 + Hr &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathfrak{M}\, d\varphi \\ M_0 + \frac{3}{2} Hr &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathfrak{M}\, (1 - \cos\varphi)\, d\varphi \end{aligned} \right.$$

nelle quali

$$\mathfrak{M} = \int_0^\varphi y\, ds \,.\, r \operatorname{sen}(\varphi - \psi) = r^3 \int_0^\varphi (1 - \cos\psi) \operatorname{sen}(\varphi - \psi)\, d\psi$$

$$= r^3 \left[1 - \cos\varphi - \frac{1}{4} \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} 2\varphi - \frac{1}{2} \varphi \operatorname{sen}\varphi + \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\varphi \cos\varphi \right].$$

Sostituendo quest'espressione di $\mathfrak{M}$ nelle (4) ed effettuando le integrazioni si trova

$$\int_0^\pi \mathfrak{M}\, d\varphi = \frac{1}{2} \pi r^3$$

$$\int_0^\pi \mathfrak{M}\, (1 - \cos\varphi)\, d\varphi = \frac{7}{8} \pi r^3$$

quindi le (4) divengono

$$M_0 + Hr = \frac{1}{2} r^3$$

$$M_0 + \frac{3}{2} Hr = \frac{7}{8} r^3$$

dalle quali si ricava

$$(5) \qquad H = \frac{3}{4} r^2, \qquad M_0 = -\frac{1}{4} r^3.$$

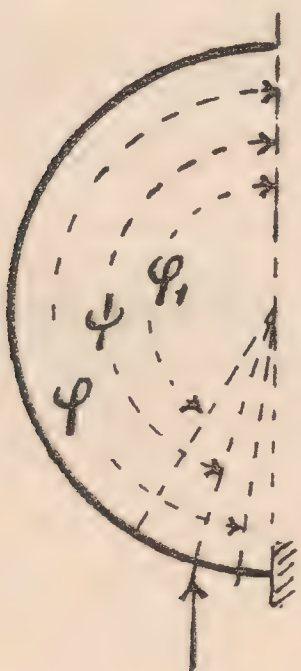
Queste espressioni semplicissime di H ed M_0 sarebbero quelle effettive se il tubo fosse *appoggiato soltanto lungo la generatrice infima* della superficie esterna.

Qualora invece l'appoggio avvenga su di una porzione finita della superficie esterna, ma di ampiezza angolare 2ω abbastanza piccola, potremo ammettere che la reazione sia una forza ripartita verticale, uniformemente distribuita lungo l'arco 2ω (qualsiasi altra ipotesi di distribuzione non altererebbe sensibilmente il risultato finale). Rappresentando per ora semplicemente con ds l'elemento di tale forza si ha (Fig. 2):

Fig. 2.

$$\mathfrak{M} = \int_{\varphi_1}^{\varphi} ds \,.\, r\,(\text{sen}\,\psi - \text{sen}\,\varphi) = r^2 \int_{\varphi_1}^{\varphi} (\text{sen}\,\psi - \text{sen}\,\varphi)\, d\psi$$

$$= r^2\,[\cos\varphi_1 - \cos\varphi - \text{sen}\,\varphi\,(\varphi - \varphi_1)]$$

e quindi

$$\int_{\varphi_1}^{\pi} \mathfrak{M}\, d\varphi = r^2\,[2\,\text{sen}\,\varphi_1 - (\pi - \varphi_1)(1 - \cos\varphi_1)].$$

Si ha poi

$$\mathfrak{M}\,(1 - \cos\varphi) = r^2\,[\cos\varphi_1 - \cos\varphi - \text{sen}\,\varphi\,(\varphi - \varphi_1)$$
$$+ \cos^2\varphi - \cos\varphi\cos\varphi_1 + \text{sen}\,\varphi\cos\varphi\,(\varphi - \varphi_1)]$$

e quindi

$$\int_{\varphi_1}^{\pi} \mathfrak{M} (1 - \cos\varphi)\, d\varphi = r^2 \Big[(\pi - \varphi_1) \cos\varphi_1 + 2 \operatorname{sen}\varphi_1 - \frac{3}{4}\pi$$

$$+ \frac{1}{2}\varphi_1 + \frac{1}{8} \operatorname{sen} 2\varphi_1 + \frac{1}{4}\varphi_1 \cos 2\varphi_1 + \frac{1}{2}\varphi_1 \operatorname{sen}^2\varphi_1\Big].$$

Supponendo $\omega = 20^\circ$, ossia $\varphi_1 = 160^\circ$, si ottiene

$$\int_{\varphi_1}^{\pi} \mathfrak{M}\, d\varphi = 0{,}00709\, r^2$$

$$\int_{\varphi_1}^{\pi} \mathfrak{M} (1 - \cos\varphi)\, d\varphi = 0{,}01388\, r^2$$

e però le (4), osservando che per la reazione il segno di $\mathfrak{M}$ è opposto a quello di prima, divengono

$$M_0 + Hr = -\, 0{,}002257\, r^2$$

$$M_0 + \frac{3}{2} Hr = -\, 0{,}004418\, r^2$$

da cui

$$(6) \qquad \begin{cases} H = -\, 0{,}004322\, r \\ M_0 = 0{,}002065\, r^2. \end{cases}$$

Ora la totalità della reazione per il semianello deve eguagliare evidentemente, in valore assoluto, il peso dell'acqua in esso contenuto, rappresentato da $\frac{1}{2}\pi r^2$, ed è distribuita su di un arco $\frac{1}{9}\pi r$, quindi la sua intensità sarà data da $\frac{1}{2}\pi r^2 : \frac{1}{9}\pi r = 4{,}5\, r$, e perciò i valori effettivi di H ed M_0 dovuti alla reazione sono

$$(7) \qquad \begin{cases} H = -\, 0{,}004322\, r \times 4{,}5\, r = -\, 0{,}019449\, r^2 \\ M_0 = 0{,}002065\, r^2 \times 4{,}5\, r = 0{,}009292\, r^3. \end{cases}$$

Sommando algebricamente le espressioni di H ed M_0 date dalle (5) e (7) si ha in definitiva

$$(8) \qquad \begin{cases} H = 0{,}73055\, r^2 \\ M_0 = -0{,}24071\, r^3. \end{cases}$$

Il rapporto

$$(9) \qquad \frac{M_0}{H} = -0{,}3294\, r$$

definisce il punto di passaggio della curva delle tensioni attraverso la sezione in chiave, che perciò resta perfettamente determinata. Volendo anche, per verifica, il punto di passaggio attraverso alla sezione infima, basta prendere, rispetto al baricentro di tale sezione, il momento M_1 di tutte le forze, e dividerlo per la corrispondente tensione orizzontale. Si ha:

$$M_1 = M_0 + H2r - \int_0^\pi y\, ds\, .\, r \operatorname{sen} \psi + \frac{1}{2} \pi r^2\, .\, r \operatorname{sen} \frac{\omega}{2},$$

ossia

$$M_1 = M_0 + H2r + r^3 \left[\frac{1}{2} \pi \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} - \int_0^\pi (1 - \cos\psi) \operatorname{sen}\psi\, d\psi \right]$$

od anche

$$M_1 = M_0 + H2r - r^3 \left[2 - \frac{1}{2} \pi \operatorname{sen} \frac{\omega}{2} \right]$$

e per $\omega = 20^\circ$

$$M_1 = M_0 + H2r - 1{,}7275\, r^3,$$

e finalmente, sostituendo ad M_0 ed H le loro espressioni,

$$M_1 = -0{,}5071\, r^3.$$

La tensione orizzontale H_1 corrispondente è data dalla H meno la proiezione orizzontale di tutte le forze, e cioè

$$H_1 = H - \int_0^\pi y\, ds \operatorname{sen} \psi = H - r^2 \int_0^\pi (1 - \cos \psi) \operatorname{sen} \psi\, d\psi.$$

Integrando e sostituendo ad H la sua espressione si ha

$$H_1 = - r^2 (2 - 0{,}73055) = - 1{,}26945\, r^2$$

e quindi

$$\frac{M_1}{H_1} = 0{,}3995\, r. \tag{10}$$

Curva funicolare dovuta al peso proprio del tubo. — Colle solite indicazioni, rappresentando per ora semplicemente con ds il peso dell' elemento di anello e facendo astrazione, per ora, dalla reazione, si ha:

$$\mathfrak{M} = \int_0^\varphi ds \,.\, r(\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\psi) = r^2 \int_0^\varphi (\operatorname{sen}\varphi - \operatorname{sen}\psi)\, d\psi$$
$$= r^2(\varphi \operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi - 1)$$
$$\mathfrak{M}(1 - \cos\varphi) = r^2[\varphi \operatorname{sen}\varphi + 2\cos\varphi - \varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi - \cos^2\varphi - 1]$$

e quindi

$$\int_0^\pi \mathfrak{M}\, d\varphi = 0, \qquad \int_0^\pi \mathfrak{M}(1 - \cos\varphi)\, d\varphi = -\frac{\pi}{4} r^2.$$

Le (4), notando che cambia il segno di $\mathfrak{M}$, divengono in tal caso

$$M_0 + Hr = 0$$
$$M_0 + \frac{3}{2} Hr = \frac{r^2}{4}$$

dalle quali si deduce

$$H = \frac{r}{2}, \qquad M_0 = -\frac{r^2}{2}$$

e quindi

$$\frac{M_0}{H} = - r.$$

Se il tubo *appoggiasse soltanto colla generatrice infima*, queste sarebbero le espressioni effettive di H ed M_0, dalle quali si vede che la curva delle successive risultanti per il peso proprio *passerebbe per il centro del circolo.* Le espressioni di H ed M_0 ven-

gono un poco modificate quando invece l'appoggio avvenga su di una porzione finita della superficie esterna, di limitata ampiezza angolare $2\,\omega$, ed ecco in quale misura. Supposto, come già si è fatto, che la reazione ripartita sia verticale, e fatto ancora $\omega = 20^0$, cioè $^1/_9$ della semicirconferenza, l' intensità di tale reazione sarà 9 volte quella del peso proprio distribuito su tutto il semianello, e perciò dalle (6) deduciamo

$$H = -\,0{,}038898\, r$$
$$M_0 = 0{,}018585\, r^2.$$

Si avrà quindi per effetto del peso proprio del tubo unitamente alla corrispondente reazione d'appoggio (rappresentando ancora il peso elementare con ds)

$$H = 0{,}461102\, r\,, \qquad M_0 = -\,0{,}48142\, r^2$$
$$\frac{M_0}{H} = -\,1{,}044\, r.$$

Si ha poi

$$M_1 = M_0 + H 2 r - \pi r\,.\,\frac{2r}{\pi} + \pi r\,.\, r \operatorname{sen} \frac{\omega}{2}$$

e per $\omega = 20^o$

$$M_1 = r^2\,(-\,0{,}48142 + 0{,}9222 - 2 + 0{,}54526)$$

ossia

$$M_1 = -\,1{,}01395\, r^2$$

e quindi

$$\frac{M_1}{H} = -\,2{,}1990\, r.$$

Nella Fig. 3 vedonsi disegnate la curva delle tensioni per la pressione idrostatica quando sia $h = 0$, e la funicolare per il peso proprio del tubo. La sezione più cimentata è quella infima, per la quale riassumiamo qui le sollecitazioni in valore assoluto:

per la pressione idrostatica $\begin{cases} H_1 = 1{,}26945\, r^2 \text{ (tensione)} \\ M_1 = 0{,}5071\, r^3 \end{cases}$

per il peso proprio del tubo indicandone con γ la densità $\begin{cases} H_1 = \gamma\, 0{,}46110\, r s \text{ (pressione)} \\ M_1 = \gamma\, 1{,}01396\, r^2 s. \end{cases}$

Esempio numerico:

Consideriamo un tubo in ferro omogeneo di m. 1,60 di diametro (r = cm. 80) che debba sopportare una pressione mas-

P O

—— funicolare della pressione idrostatica

- - - - corrispondente curva delle forze

—·—·— funicolare del peso proprio del tubo

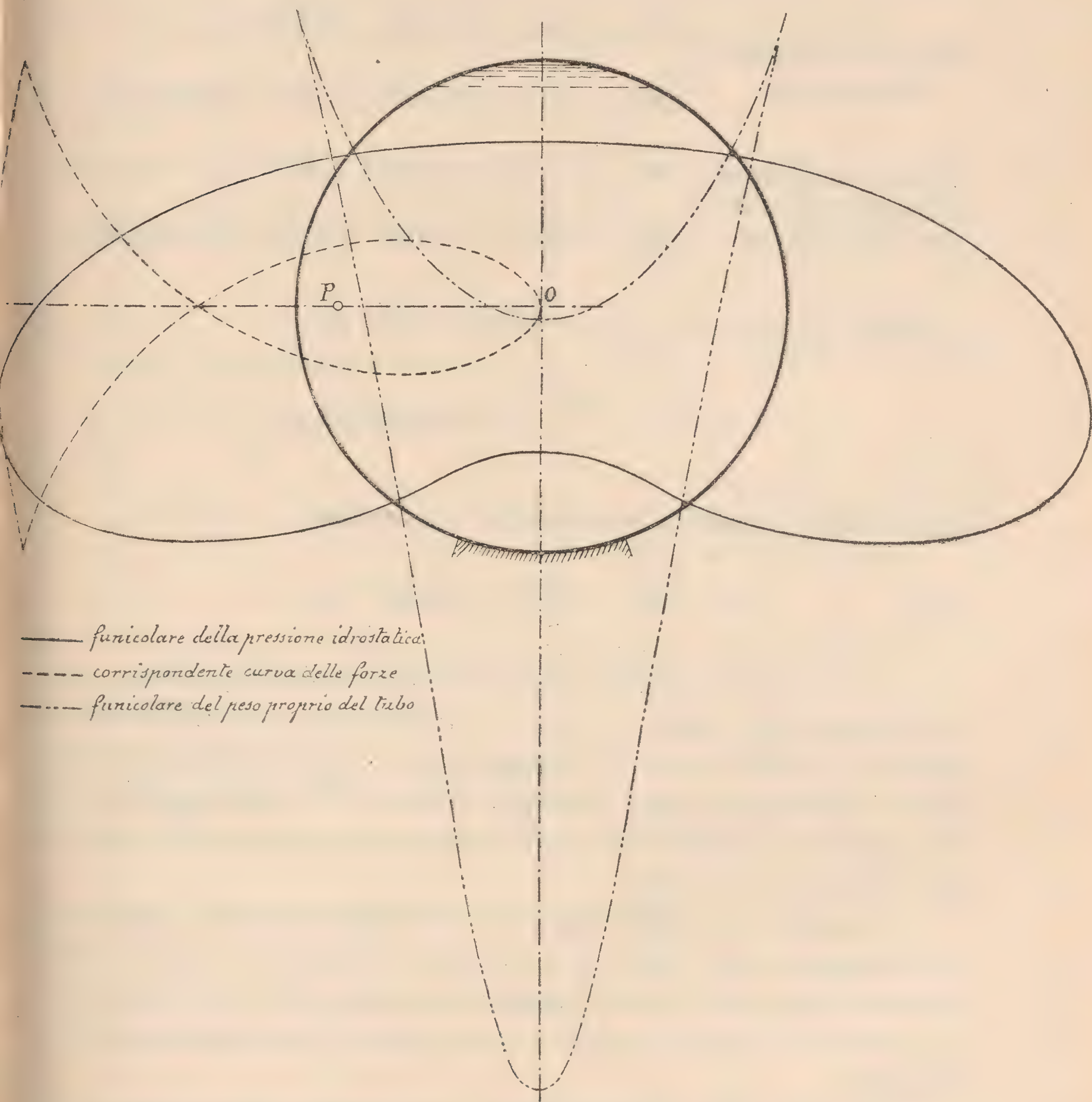



Fig. 3.

sima di 10 atmosfere; il suo spessore sia di cm. 1. Consideriamone un anello elementare lungo cm. 1. Lo sforzo unitario quando il tubo è in carico è secondo la (1)

$$\sigma = \frac{10 \times 80}{1} = 800 \, {}^{\mathrm{Kg}}/_{\mathrm{cm}^2}.$$

Ma per effetto delle pressioni idrostatiche dovute ai battenti y e del peso proprio del tubo si aggiungono nella sezione infima le seguenti altre sollecitazioni [1]:

per la pressione idrostatica
$$\begin{cases} H = 0{,}001 \times 1{,}269 \times 80^2 = \text{Kg. } 8 \sim \\ M_1 = 0{,}001 \times 0{,}5071 \times 80^3 = \text{Kgcm. } 260 \end{cases}$$

per il peso proprio del tubo supposto $\gamma = 0{,}0078\ ^{\text{Kg}}/_{\text{cm}^3}$
$$\begin{cases} H_1 = 0{,}0078 \times 0{,}4611 \times 80 \times 1 = \sim \text{Kg. } 0{,}3 \\ M_1 = 0{,}0078 \times 1{,}014 \times 80^2 \times 1 = \text{Kgcm. } 50 \end{cases}$$

e quindi un ulteriore sforzo unitario dato da

$$\sigma = 7{,}7 + \frac{310 \times 6}{1^2} = 1868\ ^{\text{Kg}}/_{\text{cm}^2}$$

ed in totale, quando la condotta è in carico,

$$\sigma = 800 + 1868 = \mathbf{2668}\ ^{\text{Kg}}/_{\text{cm}^2}. \tag{11}$$

Le condizioni statiche della condotta possono risultare ancora aggravate, quando, come frequentemente si verifica nella pratica, il tubo invece di appoggiare su tutta la sua lunghezza riposi soltanto su degli appoggi discontinui, aggiungendosi in tal caso alle sollecitazioni sopra contemplate anche quelle dovute alla flessione del tubo.

Il valore di σ dato dalla (11) (e si troverebbero valori ancora maggiori per tubi di più grande diametro) dimostra abbastanza che per tali tubi quando siano disposti orizzontalmente o pressochè orizzontalmente, il materiale è eccessivamente cimentato.

Per assicurare razionalmente la stabilità della condotta in tali condizioni, conviene eguagliare al carico di sicurezza k lo sforzo unitario massimo totale nella sezione infima dell'anello, pur semplificandone l'espressione col trascurare lo sforzo bari-

---

(1) Assumendosi come unità lineare il cm. e perciò come unità di volume il cm^3, il peso dell'unità di volume dell'acqua è espresso da Kg. 0,001.

centrico prodotto dalle due cause considerate nella presente Nota, e cioè ponendo

$$k = \frac{pr}{s} + \frac{0{,}000507 + \gamma\, 1{,}014 \frac{s}{r}}{\frac{1}{6} s^2} r^3$$

da cui

$$s = \frac{pr}{k}\left(\frac{1}{2} + 3{,}042\gamma \frac{r}{p}\right)\left[1 + \sqrt{1 + \frac{0{,}003042\, k}{\left(\frac{1}{2} + 3{,}042\gamma \frac{r}{p}\right)^2} \frac{r}{p^2}}\right];$$

ovvero, osservando che $p = \frac{1}{1000} h$ (se h è l'altezza di carico in cm.), si può anche scrivere

$$s = \frac{pr}{k}\left(\frac{1}{2} + 3042\gamma \frac{r}{h}\right)\left[1 + \sqrt{1 + \frac{3{,}042}{\left(\frac{1}{2} + 3042\gamma \frac{r}{h}\right)^2} \frac{k}{p} \frac{r}{h}}\right].$$

Per *tubi in ferro omogeneo*, facendo $\gamma = 0{,}0078$ Kg/cm³, si ottiene

$$s = \frac{pr}{k}\left(0{,}5 + 23{,}7 \frac{r}{h}\right)\left[1 + \sqrt{1 + \frac{3{,}042}{\left(0{,}5 + 23{,}7 \frac{r}{h}\right)^2} \frac{k}{p} \frac{r}{h}}\right]$$

e ponendo quest'equazione sotto la forma

$$s = \mu \frac{pr}{k},$$

il coefficiente numerico μ, maggiore dell'unità, rappresenta un coefficiente di correzione per cui bisogna moltiplicare lo spessore dedotto dalla formola pel calcolo dei tubi a parete sottile cimentati da pressione interna radiale uniformemente distribuita, per tener conto delle sollecitazioni addizionali prodotte dalle cause contemplate nella presente Nota.

Nella seguente tabella numerica abbiamo riportato i valori

di μ per alcuni valori di $\frac{k}{p}$ e di $\frac{r}{h}$ per tubi di 40, 60, 80, 100 cm. di raggio. Si è supposto $k = 1000$ $^{Kg}/_{cm^2}$.

p $^{Kg}/_{cm^2}$	$\frac{k}{p}$	$r = 40$		$r = 60$		$r = 80$		$r = 100$	
		$\frac{r}{h}$	μ	$\frac{r}{h}$	μ	$\frac{r}{h}$	μ	$\frac{r}{h}$	μ
5	200	0,008	**3,00**	0,012	**3,60**	0,016	**4,12**	0,020	**4,60**
10	100	0,004	**1,85**	0,006	**2,14**	0,008	**2,40**	0,010	**2,63**
20	50	0,002	**1,32**	0,003	**1,46**	0,004	**1,58**	0,005	**1,69**
40	25	0,001	**1,12**	0,0015	**1,17**	0,002	**1,22**	0,0025	**1,27**

Questa tabella mostra quanto rapidamente cresca il coefficiente μ col diminuire dell'altezza di carico e coll'aumentare del diametro del tubo. Per tubi di diametro molto grande, sottoposti ad una limitata pressione, la correzione, come vedesi, risulta notevolissima. Per un tubo di 2 metri di diametro, soggetto alla pressione di 5 atmosfere, lo spessore teorico

$$s = \frac{pr}{k} = \frac{5 \times 100}{1000} = \text{cm. } 0,5$$

dev'essere portato a

$$s = \mu \frac{pr}{k} = 4,60 \times 0,5 = \text{cm. } \mathbf{2,30}.$$

Ci riserviamo di ritornare sullo stesso argomento in una prossima Nota, nella quale tratteremo delle moderne grandi condotte in cemento armato.

Torino. Aprile 1912.

Sull'influenza climatica dell'elevazione media delle masse montagnose nella catena Alpina.

Nota di V. MONTI.

1. — L'influenza della elevazione media delle masse sui diversi fattori del clima alpino è, in buona parte, stata presa da tempo in considerazione.

Il primo elemento su cui si fissò naturalmente l'attenzione dei meteorologi è quello della circolazione atmosferica, la quale non può non incontrare un ostacolo o perturbazione da parte della detta elevazione. Riesce, per questa, più difficile il pareggiarsi delle densità degli strati atmosferici inferiori, onde si formano spesso dei forti gradienti barometrici, colle isobare strettamente affollate di contro all'asse della catena alpina, senza, come notava *Hann* nei suoi studî sulla pressione atmosferica nell'Europa centrale e meridionale, che sorgano dei venti di intensità proporzionale ai gradienti medesimi. Là dove però la media elevazione delle masse alpine è, come nelle Alpi Ticinesi, minore, la circolazione atmosferica ne è meno impedita, cosicchè troviamo quivi le vallate più frequentemente percorse dal föhn (cf. R. BILWILLER, *Der Bergeller Nordföhn*, negli " Annali dell'Ufficio meteorologico svizzero ", 1902). Sempre secondo i risultati di Bilwiller, all'altitudine di 2000 m. si stende sulla linea di displuvio delle Alpi svizzere, un'area di maggior pressione; la pressione stessa, a tale livello, decresce di qui tanto movendo verso N come verso S; una sola lacuna si presenta in siffatta area, e precisamente corrisponde al gruppo del Gottardo.

Un secondo elemento la cui relazione colla media elevazione delle masse montane si prestò meno facilmente ad essere rivelata è la temperatura. In seguito alle ricerche di DE QUERVAIN (" Beitr. z. Geophys. ", VI, 1904), si può ritenere come assodato che là dove è maggiore la media elevazione delle masse mon-

tagnose, le superficie isotermiche, nelle ore più calde del giorno e durante la bella stagione, cioè nel tempo più propizio alla fusione delle nevi, s'innalzano alquanto. Secondo l'A. le ragioni di questo contegno delle superficie isotermiche sono da ricercarsi:

a) nella circostanza già nota e spiegata che la diminuzione della temperatura coll'altitudine è tanto minore quanto più massiccie sono le montagne considerate;

b) nella radiazione termica. La radiazione solare *diretta* è, per vero, dipendente dall'altitudine assoluta del punto dove si opera, e non dalla media elevazione del gruppo a cui il punto appartiene; ma la radiazione *indiretta*, cioè il calore diffuso dalle pareti rocciose e dai nevai, deve necessariamente, a pari altitudine del punto d'osservazione, crescere col crescere della media elevazione delle masse del gruppo.

Per quanto riguarda la seconda causa di riscaldamento, e precisamente pel calore irradiato dagli alti nevai, ci si permetta però un'osservazione. Poichè la massima parte delle isoterme tracciate nelle carte di de Quervain si riferisce a temperature superiori a 0°, ci pare che l'arrecare a tal proposito in campo la radiazione dei nevai urti col secondo principio della termodinamica. Quanto invece alla radiazione emessa dalle pareti di roccia battute dal sole, niun dubbio può esservi sulla sua azione. I risultati di de Quervain trovano la loro più brillante conferma nel fatto che il limite climatico delle nevi e quello del bosco si sollevano alquanto là dove è maggiore la media elevazione delle masse. La quota più elevata (3250 m.) del limite delle nevi spetta infatti nelle Alpi settentrionali, secondo le ricerche di Jegerlehner (" Beitr. z. Geophys. ", V, 1903), al gruppo del Rosa, dove si ha pure la maggiore elevazione media delle masse; e la stessa quota discende o sale, dal monte Bianco fino alle Alpi orientali incluse, col discendere o salire dell'elevazione medesima.

2. — Nella penuria di dati climatici sull'alta montagna, penuria la quale non può naturalmente trovare un compenso sufficiente nella valorosa attività di alcune poche stazioni elevate, come per es. il *Sonnblick* e la *Zugspitze*, il limite climatico delle nevi diviene un elemento di primaria importanza climatologica; nessuna maraviglia quindi che, prima di proseguire e di

ricercare qualche altro effetto ancora inesplorato della media elevazione delle masse montane, ci fermiamo un altro momento su esso.

Ad una prima causa della maggiore o minore sua altitudine abbiamo già accennato. Una seconda causa, continuamente invocata nella climatologia alpina e notissima, va ricercata nel regime delle precipitazioni. Dove queste sono meno abbondanti è pure, in proporzione, meno abbondante la caduta della neve; l'opera dell'ablazione ne risulta, a parità di livello, meno ostacolata, e la quota della linea nivale s'innalza. Siffatta considerazione, d'ordine intuituivo, è stata recentemente confermata dalla circostanza che, in tutta l'estensione delle montagne svizzere, il rapporto tra la precipitazione nevosa, ridotta in mm. d'acqua liquida, e la precipitazione totale è, a un dipresso, funzione lineare della sola altitudine.

A questo punto è interessante notare come tutto porti a credere che in quella parte delle Alpi settentrionali che è in contatto più diretto coll'Italia, una maggiore o minore elevazione media della montagna si accompagni ad una minore o maggiore precipitazione. E pensatamente circoscriviamo così il campo di tale concordanza; perchè, p. e. sul versante settentrionale dell'Oberland bernese, una grande elevazione media si accompagna ad abbondante precipitazione. La ragione del divario apparirà in seguito.

Prendiamo a considerare le Alpi Pennine, dal Bianco al Rosa compreso, dove l'elevazione media raggiunge la quota massima assoluta di 2500 m. Le due lunghe vallate che si sprofondano ai piedi dei loro due versanti, e cioè l'alta valle d'Aosta e il Vallese, sono note per la scarsità delle loro precipitazioni. Per la prima, a monte di Aosta, il fatto è stato rilevato da Denza, da Millosevich e da noi, nè occorre ritornarvi più sopra. Quanto al Vallese, riporteremo le linee seguenti dalla grand'opera *Das Klima der Schweiz*, pubblicata nel 1909 sotto gli auspicî dell'Ufficio meteorologico svizzero.

" L'aumento delle precipitazioni coll'altitudine è, special-
" mente nelle valli laterali che sboccano da sinistra nel medio
" Vallese (1), molto piccolo, cosicchè esse, avuto riguardo all'al-

(1) Son queste appunto le valli che risalgono verso la catena spartiacque delle Pennine.

“ titudine, appaiono anche più povere di precipitazioni della
“ valle principale. Veramente la rete di stazioni pluviometriche
“ fu, in queste valli, fino a pochi anni or sono, assai rada; ma
“ i risultati che qui si citano permettono di riconoscere la cosa
“ con sufficiente sicurezza.

“ *Saas Grund*, nella valle di Saas, con 1560 m. d'altitudine,
“ ha solo 77 cm. di precipitazione annua; *Zermatt* a 1617 m.
“ non ne ha che 67, e *Grächen*, collocata in posizione libera, ad
“ un ingresso di valle e a 1630 m., solo 53 cm. . . . . Altre mi-
“ sure si hanno per *Evolène* (1380 m.) in *Val d'Hérens*: 88 cm.;
“ un gruppo interessante di osservazioni, distribuite tra il fondo
“ della valle del Rodano e il G. S. Bernardo, possiede da qualche
“ anno la valle d'*Entremont*: *Martigny* (480 m.) 72 cm.; *Or-*
“ *sières* (890 m.) 76 cm. circa; *Bourg St. Pierre* (1630 m.) 65 cm.
“ circa . . . . „.

L'unico osservatorio meteorico che si affacci ad un tempo sulle due vallate, e per cui si ha una lunga e regolare serie di osservazioni, è quello del *G. S. Bernardo*, a 2476 m. Esso dà una piovosità annua normale, calcolata *(D. Kl. d. Schw.)* sul periodo 1864-900, che ammonta al valore eccezionalmente basso di 1258 mm.

Passando a E del Rosa, e dirigendosi verso il Sempione ed il Gottardo, la media elevazione delle masse si deprime, discendendo sotto ai 2000 m. Intanto la precipitazione si accresce. Uno sguardo alle carte pluviometriche svizzera ed italiana mostra un massimo di precipitazione presso il lago di Costanza, da cui si distaccano due zone o rami di maggiore piovosità. Uno di essi arriva al versante settentrionale dell'Oberland bernese, e se ne perdono le tracce su pei dossi colossali di quella catena; l'altro scavalca le Alpi ticinesi, e, protendendosi sui bacini dei laghi di Lugano e Maggiore, penetra nel cuore della Lombardia.

Già per l'alto Vallese, disteso dietro al Sempione, non mancano i compilatori di *D. Kl. d. Schw.* di notare un più forte aumento della piovosità coll'altitudine: *Briga* (680 m.) ha 71 cm. d'acqua annui; *Fiesch* (1080 m.) 97 cm.; *Reckingen* (1350 m.) 110 cm.; *Oberwald* (1370 m.) 155 cm. Al *Gottardo* (anni 1885-89) (2100 m.) si hanno 2000 mm. circa d'acqua; al *S. Bernardino* (anni 1864-900) (2073 m.) 2254 mm., cioè 1000 mm. circa di più che al G. S. Bernardo, che è pure 400 m. più in alto; allo *Spluga* (anni 1864-900)

(1470 m.) 1464 mm. Perfino *Bellinzona* (235 m.), *Locarno* (239 m.) e *Lugano* (276 m.) hanno piovosità superiori a quella del Gran San Bernardo! Nella valle della Reuss, *Altdorf* (452 m.) ha una piovosità inferiore di appena 10 mm. inferiore a quella del Gran San Bernardo.

Così forte differenza tra le Alpi Ticinesi e Pennine si può, in via di prima approssimazione e *grosso modo*, spiegare colla maggior libertà di circolazione che l'atmosfera possiede, secondo quanto vedemmo risultare al Bilwiller, al di sopra del gruppo del Gottardo. Possono a questo modo avvenire più facilmente le mescolanze dell'aria calda ed umida del versante meridionale con quella fredda dell'altro versante e originarsene condensazioni più abbondanti e frequenti.

Ad E delle Alpi Ticinesi si entra nel dominio del Bernina. La media elevazione delle masse torna ad aumentare fino ad un massimo secondario di 2250 m., e tutto all'intorno si pronuncia una precipitazione più scarsa. La Valtellina è meno piovosa del Canton Ticino, *Sondrio* (anni 1880-905; Eredia, " Annali del R. Uff. di Met. „, XXV, p. I) (375 m.) ha 874 mm. cioè la metà circa di Lugano che siede 100 m. più basso; lo *Stelvio* (id. id.) (2543 m.) dà mm. 1119, cioè ancor meno del G. S. Bernardo, che pure è qualche poco meno alto. L'Engadina poi, dietro al Bernina, è, dopo il Vallese, la vallata più asciutta della Svizzera; dal *D. Kl. d. Schw.* ricaviamo: *Sils Maria* (anni 1864-903) (1811 m.): 973 mm.; *St. Moritz* (1900-03)(1841 m.): 817 mm.; *Bevers* (1864-900) (1713 m.): 838 mm.; *Zernetz* (1864-903) (1476 m.): 637 mm.

Per le Alpi Venete, O. Marinelli ci presenta (" Memorie Geografiche; Suppl. alla Riv. Geogr. It. „, 1910) quattro cartine molto perspicue, relative alla quota del limite delle nevi, a quelle delle cime più elevate, a quelle dell'elevazione media, e, finalmente, all'annua precipitazione media. Il limite delle nevi raggiunge la quota massima nella zona centrale delle *Dolomiti*, in coincidenza colla massima elevazione media e col minimo della precipitazione. Questa è infatti, nel gruppo della *Marmolada* e delle Dolomiti, suppergiù la metà di quanto è nel gruppo del *Canin*, poichè, mentre le stazioni meteoriche della prima regione segnano valori medî annui raramente più alti di 1200 mm., e talora più bassi di 1000, quelle della seconda ne indicano di oltre 2400 mm., non mai inferiori ai 2000.

Resta così dimostrato che nel tratto considerato della catena alpina, la maggiore elevazione delle masse coincide colla minor precipitazione e viceversa.

3. — Una tale coincidenza, prolungata attraverso tanto e così vario paese, non è probabilmente fortuita; la natura stessa, la forma e le dimensioni del rilievo alpino ci devono entrare per qualche cosa.

Una prima maniera di avvicinarci alla soluzione della questione può essere la seguente. Si sa che le valli longitudinali sono assai frequenti nel versante italiano della catena alpina, frequentissime e addirittura caratteristiche nel versante esterno. Ce ne offrono degli esempî in Italia l'alta valle della Dora Baltea e la Valtellina. Lungo il versante esterno corre, come è stato rilevato da tempo, un profondo avvallamento sotto allo spartiacque, che incomincia colle valli del *Drac*, dell'*Isère*, di *Arly*, a W del Monte Bianco, e continua col Vallese, coll'Engadina e coll'inferiore valle dell'*Inn*. È al di là di questo avvallamento che i venti carichi di vapore, provenienti dall'Atlantico, dalla Manica e dal mare del Nord e chiamati dalle depressioni Tirreniche e Adriatiche, scaricano la maggior parte delle loro acque, obbligati come sono a salire lungo le montagne del Delfinato e dell'Oberland bernese; essi determinano quindi delle zone più asciutte nell'avvallamento stesso e più in qua del medesimo. Ma dove le pareti di questo si abbassano, e sono tagliate da valli perpendicolari all'asse della catena, come avviene al Sempione, ove fanno capo quelle della *Toce* e dell'*Aar*, l'effetto è minore, e delle zone di maggior piovosità possono scavalcare lo spartiacque e invadere entrambi i versanti. Così l'influenza della media elevazione incomincia a rivelarsi in modo indiretto. Più direttamente ce la mostreranno le considerazioni che seguono.

4. — La totalità dell'acqua annualmente cadente su un paese di montagna si suole ripartire in quella dovuta a correnti convettive, quella d'origine ciclonica, e quella dovuta al rilievo.

a) Cominciamo col ricordare che le ricerche presenti si riferiscono all'alta montagna, dove le correnti ascensionali sono diminuite dalla presenza di nevai e di ghiacciai: il calor solare

che questi ricevono, più che andare impiegato nel riscaldamento dell'aria sovrastante, si spende nella fusione della neve. D'altra parte l'atmosfera montana, in grazia della sua secchezza considerevole, non si presta ad un grande effetto piovoso per le correnti convettive dovute al riscaldamento degli alti pascoli e delle pareti rocciose. I venti di valle potranno, in certe ore del giorno, produrre condensazioni locali sulle vette; ma chiunque ha qualche pratica dell'alta montagna sa che a queste condensazioni non sogliono seguire, di solito, precipitazioni dirotte, estese e durevoli. Pel nostro argomento le piogge convettive non hanno dunque una grande importanza.

b) Le piogge cicloniche, invece, non debbono essere piccola parte della precipitazione alpina. Se però si pensa che, quando una depressione si affaccia da N o da S alle Alpi, le isobare corrono presso a poco parallele alla linea di displuvio e stabiliscono una condizione di cose presso a poco uniforme in tutto il mondo alpino, si comprende che non vanno attribuite ad esse le differenze enormi di piovosità, dianzi trattate, fra parte e parte della catena.

c) Restano le piogge di rilievo, la cui teoria è stata formulata da Pockels (*Met. Zeitschr.*, 1901); un largo riassunto se ne trova in Oddone (*Ann. del R. Uff. di Met.*, 1908).

Fra le conclusioni, puramente teoriche, di Pockels, una è di maggiore importanza per noi. Sia una catena montuosa che si svolga in lunghezza regolarmente, per modo che la pendenza sia funzione della sola altitudine; il profilo sia tale da dar luogo superiormente ad un altipiano; la corrente carica di vapore sia normale alla direzione della catena, stazionaria, continua, e senza vortici; l'attrito interno e quello superficiale siano trascurabili. Allora la precipitazione cresce fino ad un massimo, pressochè coincidente colla massima pendenza del profilo; la diminuzione che prova, oltre tal massimo, la precipitazione è più lenta di quella della pendenza; ma se l'altipiano terminale è *molto elevato ed esteso*, essa tende su questo a zero.

C'è qui qualche elemento che era già prima acquisito alla meteorologia, e qualche cosa di nuovo. Noto era p. e. che la precipitazione raggiunge un massimo ad una certa altitudine; ma, poichè, al crescere di quest'ultima, cresce la proporzione della neve nella precipitazione totale, e poichè il livello a cui la pre-

cipitazione è tutta nevosa non è noto che in qualche caso particolare, restava un dubbio sul modo come la neve si comporta al di sopra del massimo della precipitazione totale. Le osservazioni di Vallot al M. Bianco davano veramente per quella eccelsa regione delle nevosità relativamente modeste; ma esse avevano durato un periodo d'anni disgraziatamente troppo breve per essere comparabili colle osservazioni delle stazioni inferiori.

Notiamo che il caso di una pendenza la quale ad una certa altitudine raggiunge un massimo è, così all'ingrosso, molto comune in montagna; le ardite piramidi tanto celebri nel mondo alpino sono una piccola parte di esso, e debbono la loro notorietà al fascino panoramico ed alpinistico più che all'entità del loro rapporto colla massa totale della catena.

Notiamo ancora che l'ipotesi d'un altipiano terminale elevato ed esteso coincide con quella d'una rilevante elevazione media della massa. In altre parole, la teoria di Pockels conduce a concludere che, dato il suesposto profilo, una forte elevazione media della massa si accompagna con la tendenza a zero della precipitazione di rilievo nella parte superiore.

Per le Alpi è però da osservare che le stazioni pianeggianti della Svizzera dànno come venti più umidi l' W e il SW che sono più paralleli alla catena che perpendicolari ad essa. Ma che non si tratti qui d'una difficoltà di primaria importanza risulta dal fatto che, se anche nel cuore delle Alpi fossero quelle le direzioni dominanti dei venti più piovosi, il Vallese e l'Engadina dovrebbero esserne battuti in pieno e non costituirebbero due zone relativamente asciutte. Si vede chiaramente che le correnti umide le quali penetrano in Svizzera dall'insenatura tra le Alpi e il Giura, vengono piegate dal giuoco del rilievo orografico e si fanno suppergiù perpendicolari alla catena alpina.

Per l'applicazione della teoria di Pockels alle Alpi la maggior difficoltà sta invece nella forma del rilievo alpino, il quale coi suoi avvallamenti longitudinali interni ed esterni non corrisponde affatto al semplice profilo immaginato da Pockels.

Questa difficoltà è già stata incontrata da altri. Oddone (loc. cit.), colpito dal fatto che la teoria di Pockels, universalmente accettata, non era stata ancora sottoposta ad una verifica sperimentale, volle provarsi a colmare questa lacuna. Ma, non potendo trovare nelle Alpi e nell'Appennino esempi di catene

aventi la forma eccessivamente schematica presupposta da Pockels, cercò se la teoria si verificasse anche con quelle catene che presentano *in alto avvallamenti ristretti*, i cui dorsi secondari osculino internamente un profilo analogo a quello ideato da Pockels. La parte principale della verifica fu da lui fatta per l'Appennino dove la rete delle stazioni pluviometriche è più serrata, e riuscì pienamente. Non fa quindi meraviglia che quadrasse colla teoria di Pockels anche l'unico esempio dall'Oddone considerato nelle Alpi, ove figura una sezione parallela all'asse del Garda, un po' ad occidente di esso, tra Monaco e Piacenza.

E qui si noti di nuovo che parlare di avvallamenti ristretti ed in alto, equivale sempre a considerare una ragguardevole elevazione media.

Profili analoghi a quello considerato da Oddone, sebbene meno larghi, non mancano nelle Alpi anche altrove, e forse l'A. li avrebbe considerati ove avesse potuto fin d'allora disporre della ricca miniera di dati che si ha in " *Das Klima der Schweiz* ". Degli avvallamenti longitudinali che corrono a W del Monte Bianco si è già fatto parola. Le Pennine e le Graie ci presentano nelle alte valli dell'Orco, della Dora Baltea e del Rodano un sistema di grandi solchi paralleli, compresi tra dossi giganteschi e orientati da W verso E. Le stesse condizioni sono presentate dal gruppo del Bernina o adiacenze, coll'alta Valcamonica, la Valtellina, l'Engadina, la valle di Davos e l'alta valle del Reno, parallele all'asse della catena. Anche questi profili rientrano perciò nella teoria di Pockels.

Tornando pertanto alla quota del limite climatico delle nevi, questa non è dunque influenzata nelle nostre Alpi dalla elevazione media delle masse soltanto per l'azione termica che ne deriva, come si ritiene generalmente. Accanto a siffatta azione che si esplica soltanto nel periodo della fusione delle nevi, e si accentua sopratutto nel campo d'ablazione dei ghiacciai, l'elevazione media delle masse reagisce anche in qualunque periodo dell'anno sull'alimentazione dei nevai, variando l'entità delle precipitazioni. Quale di queste due azioni prevalga sull'altra non è, al momento attuale, possibile dire con certezza.

Roma, R. Ufficio di Meteorologia, Aprile 1912.

Studi farmacologici sui soterii della digitale.

Nota di PIERO GIACOSA.

Una serie di indagini continuate per parecchi anni sui soterii (1) di digitale di diversa età — da quelli recentissimi a quelli conservati a lungo (fino a tre anni) — mi hanno persuaso che essi rappresentano una forma di farmaco costante nella sua azione se pure soggetto a variazioni quantitative, assai meno manifeste di quelle che si hanno nella droga ordinaria usata in farmacia. La digitale, come l'oppio, è un farmaco che se pure può contenere diversi elementi attivi di composizione diversa, tuttavia manifesta una azione singolarmente costante e definita la quale coincide quasi esattamente con quella di uno fra i componenti chimici, che rispetto agli altri prende la posizione di protagonista. La digitalina Nativelle (digitoxina Schmiedeberg) è il rappresentante chimico della digitale, a quel modo che la morfina è il rappresentante chimico dell'oppio. Ma dalla sostanziale coincidenza fra l'azione totale della droga e quella di uno dei suoi componenti, non può inferirsi in ogni caso la possibilità e la convenienza della sostituzione della droga con tale principio attivo.

Per l'oppio, per la belladonna sono ovvie le ragioni che suggeriscono in determinate circostanze l'impiego della droga, in altre quello del suo principio attivo. Sono altrettanto note quelle che consigliano al medico di ricorrere alla chinina anzichè alle antiche corteccie peruviane, alla pilocarpina anzichè al jaborandi;

(1) I soterii sono i succhi ottenuti delle piante fresche farmacologicamente attive, conservati in modo che la loro attività si mantenga inalterata. Per la storia dei componenti attivi della digitale e della loro sinonimia rimando al mio lavoro: *Studi sui farmaci del gruppo della digitale*, " Giorn. d. R. Acc. di Med. di Torino ", vol. XVII, anno 74°, serie IV (1912).

e quelle che rispetto alla digitale e alla segala cornuta giustificano la condotta opposta. Le quali ragioni per quanto concerne la digitale consistono da un lato nella difficoltà di ottenere il principio attivo allo stato di purezza (1), nella insolubilità del principio stesso che ne rende la dosatura difficile, nella imperfezione dei preparati che sono in commercio diversi di azione come sono di nome, spesso affatto inattivi; dall'altro nell'azione sicura e costante che si ottiene da un infuso di buone foglie di digitale.

Questo stato di cose che conduce a conservare alla foglia di digitale il primo posto nella terapia digitalica, quantunque sia a tutti nota l'incostanza di valore delle singole foglie secondo la stagione, il luogo d'origine e sopratutto lo stato di conservazione, fa risaltare meglio il valore dei soterii, rappresentanti genuini della foglia nella sua condizione di massima potenzialità farmacologica, non alterabili e uniformi di composizione. Per quanto accurati si sia nello sceglierle ed assortirle, per quanto diligenti nel farle seccare e conservarle, è impossibile che le singole foglie di una raccolta abbiano fra di loro quella identità di composizione che è la condizione naturale di un liquido spremuto dalle foglie stesse.

Numerose esperienze da me fatte dimostrano che il pannello che rimane dopo estratto il soterio è privo d'ogni azione farmacologica.

L'azione generale dei soterii di digitale venne da me studiata sulla rana, esculenta e temporaria, sui mammiferi (conigli, cavie); quella sul cuore sia sull'organo *in situ* che isolato. Sebbene, come è naturale, i risultati coincidano con quelli che si ottengono dai farmaci di questo gruppo, tuttavia nel corso delle mie esperienze mi sono dovuto convincere che alcuni particolari che si trovano nella letteratura non sono attendibili.

Così se pure esistono differenze nel comportarsi del cuore fra la rana temporaria e la esculenta io non potrei associarmi

---

(1) Anche i preparati che per la loro provenienza dovrebbero dare guarentigia di genuinità sono variabili; la digitalina pura di Nativelle che vale 40 lire il gramma e che dovrebbe avere i requisiti prescritti dalla Farmacopea francese, in un campione originale aveva per punto di fusione 200° C anzichè 243°. Essa era senza dubbio inquinata con altri principii digitalici, se pure conservava la sua azione caratteristica.

alla affermazione di Schmiedeberg (1) che il cuore di questa ultima non manifesti le caratteristiche contrazioni chiamate peristaltiche, parola che a parer mio non definisce bene la natura dei cambiamenti che subiscono le contrazioni per il fatto che il farmaco agisce diversamente sulle varie parti della musculatura ventricolare.

Il cuore della *Rana esculenta* sotto l'azione dei soterii di digitale o di convallaria, o della tintura di strofanto, o della soluzione di digitalina (francese) 1 per mille, o del digalene, si comporta sostanzialmente come il cuore della *temporaria*, con la sola differenza che in quest'ultima l'azione è più rapida e tumultuosa e si manifesta per dosi minori. Il metodo di Focke per la misura del valore farmacologico della digitale non è applicabile se non alla *temporaria*. Un altro fatto ho constatato che conferma quanto osservarono altri; che cioè non è costante un comportarsi diverso del cuore a seconda che il farmaco si applica sulla parete esterna o si fa giungere col sangue, come si dedurrebbe dalle esperienze note del Benedicenti (2) che fanno conchiudere allo Schmiedeberg ad un prevalere delle fibre superficiali sulle profonde. Ho in moltissime esperienze applicato i soterii direttamente sul cuore messo a nudo e nella grandissima maggioranza dei casi ho osservato prodursi un arresto sistolico; anche quando il ventricolo s'era arrestato in diastole per lungo tempo, eccitandolo si provocavano contrazioni e nell' animale morto si trovava il ventricolo contratto e pallido.

Talora ho osservato manifestamente un periodo di accelerazione dei battiti precedente il ritardo caratteristico digitalico.

I soterii recenti sono più attivi che quelli conservati, sebbene non esista una differenza qualitativa; 5 goccie lasciate cadere sul cuore della *R. esculenta* possono dare la morte in un periodo che varia da 6 a 12 ore. Il cuore, 10 minuti dopo applicato il farmaco, rallenta notevolmente i battiti, che possono raggiungere $^1/_3$ del normale; al rallentamento segue il disordine e il dissociarsi dei moti ventricolari e vestibolari. Sopravvengono periodi di pause in cui il cuore in semidiastole tenta indarno di dilatarsi abbozzando tenui contrazioni. Talora dopo

(1) *Grundriss der Pharmakologie*, 5ª ediz., p. 260.

(2) “ Archiv f. exp. Pathol. u. Pharmakologie „, vol. 47, p. 360.

una pausa il ventricolo le cui pulsazioni erano esattamente la metà di quelle degli atrii, riprende a battere sincronicamente. Dosi maggiori di 5 goccie danno arresto sistolico permanente in un tempo variabile, ma assai corto. Durante l'azione si scorgono quasi sempre sul ventricolo dei punti che non partecipano alla contrazione e perciò nella sistole si sfiancano e appaiono rossi sul fondo pallido del ventricolo contratto. Sono veri gavoccioli, talora fitti e grossi così da dare al cuore l'aspetto di un lampone, talora confluenti. Col progredire della intossicazione questi gavoccioli sogliono scomparire, finchè tutto il ventricolo si arresta in sistole.

Lauder-Brunton in un suo libro (1) dà una figura del cuore che presenta questi gavoccioli, che egli chiama col nome di borse di sfiancamento (*yielding pouches*); egli afferma che sono pulsatili, ma non posso associarmi a questa affermazione se non colla riserva che la pulsazione è puramente passiva, dovuta alla sistole che caccia il sangue in questi diverticoli. La formazione di questi gavoccioli non si ha in tutti i casi ed è in relazione colle condizioni generali del cuore, anzichè coll'azione del farmaco. Una rana robusta, nella stagione buona, può mostrare tutti i fenomeni digitalici (ritardo, aumento diametri, contrazioni vermicolari) senza che si producano gavoccioli. All'opposto nelle rane ibernanti essi sono facilissimi a prodursi, e molte volte si formano alla superficie del cuore non avvelenato, per il solo fatto di toccarlo leggermente con una bacchetta di vetro. Ho anche osservato qualche caso di preparati digitalici quasi privi di azione ritardatrice, che pure davano gavoccioli. Tutti i farmaci digitalici e lo strofanto in special modo producono gavoccioli.

I soterii conservati qualche mese sogliono essere meno attivi; dosi triple di quelle che avevano dato la morte non producono altro se non i soliti fenomeni caratteristici, che sono quanto mai intensi e si protraggono a lungo prima che l'arresto sistolico si faccia permanente. La maneggiabilità dei soterii vecchi è dunque assai maggiore. Ma l'applicazione diretta sul cuore dà effetti assai meno intensi che l'iniezione nei sacchi linfatici.

Nell'azione dei soterii sul cuore di rana ho già accennato al fugace periodo di accelerazione del ritmo che si osserva spesso

---

(1) *Therapeutics of the circulation*, p. 144, London, Murray, 1908, p. 144.

all'inizio dell'azione, e che può accrescere il numero dei battiti del 20 % circa.

L'allungamento del diametro verticale del ventricolo nella diastole è forse il più importante fra tutti i fenomeni cardiaci digitalici; esso si osserva già all'inizio allorchè il ritardo del polso è appena accentuato, e cessa nel periodo dell'aritmia; non ho constatato nessuna variazione nei diametri sistolici, il che del resto concorda colla legge del massimo rendimento del cuore. L'allungamento diastolico è massimo per l'azione del soterio recente. In quello più vecchio è alquanto minore.

Sebbene i tracciati ottenuti col metodo della sospensione di Engelmann rendano conto di questo fatto, essi tuttavia non lo rappresentano nelle sue integrità, perchè tendono ad esagerarlo. È facile vedere che la pinza che solleva il cuore esercita una trazione su quest'organo tanto più sensibile quanto più è afflosciato ed esagera l'estensione della linea relativa; la misura diretta del cuore *in situ* è priva d'ogni inconveniente, può eseguirsi rigorosamente e dà il valore esatto della modificazione dell'elasticità del cuore; in alcuni casi l'allungamento superava di un decimo la misura normale del diametro ventricolare diastolico.

Per ciò che riguarda l'azione *generale* dei soterii, le indagini fattesi in questo laboratorio e in parte pubblicate (1) dànno risultati che concordano quasi in ogni particolare con quelli del Piccinini, che ha pubblicato su quest'argomento un lavoro accurato (2). Egli si è valso di una digitalina tedesca, assai meno attiva della digitalina officinale francese e dei soterii; e perciò dovette ricorrere a dosi più alte (3). Il quadro è quello di una diminuzione progressiva delle attività nervose. L'animale è pigro, sonnolento; i moti volontarii prima, infine anche i riflessi, scompariscono. Talora ho osservato un fugace periodo di scosse

(1) Antonini, " Giornale della R. Acc. di med. di Torino „, vol. XVI, anno 73, fasc. 5° (1910).

(2) " Arch. di farmacologia sperim. e scienze affini „, vol. IX, p. 173 (1910). Il lavoro era già stato pubblicato nel 1908.

(3) Piccinini, l. c., p. 170, fissa la dose minima mortale da 5 a 0,5 milligrammi; per la digitalina Nativelle la dose è inferiore (0,3 milligr.) ed è costante. L'ampiezza della oscillazione della dose della digitalina tedesca prova la poca costanza di azione di questo preparato.

fibrillari, tremiti e contrazioni tetanoidi. La paralisi della placca terminale ora precede ora segue quella dei centri. Ultimo a paralizzarsi è il muscolo.

Fra le osservazioni mie e quelle di Piccinini, fatte entrambe sulla *esculenta*, la più comune fra noi, il divario consiste solo nella presenza dell'azione eccitante, che si manifesta coi tremiti e colle scosse tetaniche, che Piccinini (l. c., p. 181, 182) non menziona, anzi esclude. Questa azione è manifesta nei soterii recenti, e va via via scomparendo. I soterii del 1909 la manifestarono ancora nel giugno 1910, come si scorge dal lavoro della signorina Antonini già citato; ma oggidì (marzo 1912) l'hanno perduta. I soterii del 1911 hanno essi pure già perduta questa azione; ciò dimostra che essa è legata a un elemento del soterio estraneo ai glucosidi digitalici e che si distrugge facilmente colla conservazione.

Le cavie si comportano all'incirca come le rane; con questo che i soterii recenti producono contrazioni muscolari talora leggere, talora violente da scuotere tutto il corpo. Lo stesso soterio (del 1911) che induce questi effetti nelle cavie, non li determina più sulle rane. Il soterio del 1909 a dose mortale non manifesta oggidì altri effetti che quelli di una paralisi progressiva, con allentamento notevole del respiro.

All'autopsia si trova sempre il ventricolo destro del cuore fortemente dilatato, il sinistro ristretto e vuoto.

In nessun caso si produce un aumento dei riflessi, che invece accompagna costantemente l'azione del digalene, come Piccinini afferma, ed io posso pienamente confermare (1).

Gli effetti di dosi eguali ragguagliate al percento degli animali, variano per i soterii col variare del peso del corpo; gli animali di peso elevato sono più resistenti. Per le cavie il limite al di là del quale la dose minima mortale cresce è verso i 450 gr. Anche per le rane si osservano gli stessi fenomeni, ma

---

(1) Piccinini attribuisce alla glicerina che, come è noto, è un ingrediente principale del digalene, l'aumento della eccitabilità motoria diretta e riflessa. Per questa ragione io sebbene dapprima — a scopo di conservazione — avessi aggiunto ai soterii quantità eguali di glicerina, ora ho abbandonato questo sistema, che, al postutto, non è giustificato, visto che i soterii genuini si conservano benissimo.

assai meno spiccati. La dose minima mortale deve dunque riferirsi ad animali quanto più si può di peso uguale.

I soterii nell'invecchiare — le mie osservazioni vanno fino a tre anni — se conservano intatta l'attività specifica cardiaca, caratteristicamente digitalica e che basta da sè a provocare la morte, subiscono, come si è visto, dei cambiamenti di composizione per i quali mutano alcuni dei fenomeni concomitanti. Scema anzitutto l'azione irritante locale, che è manifesta nei soterii quanto più sono recenti. L'azione cardiaca sempre conservandosi costante, si svolge più lentamente, le singole fasi di essa si seguono a maggior distanza; quella che Paul Bert chiamava la zona di maneggiabilità del farmaco si è allargata non rispetto alla dose ma al tempo. Un soterio vecchio mantiene il ritardo caratteristico del battito cardiaco accompagnato dalle modificazioni del volume del cuore per un numero d'ore doppio di quello che si ha con uno recente. La dose minima mortale è uguale per i soterii del 1909 e del 1911, ma il primo, iniettato in animali (rane, cavie), sviluppa la sua azione assai più lentamente che non il secondo. Per la rana esculenta il divario può essere notevole: mentre il soterio di un anno dopo 8 minuti induce il cuore a lunghe pause sistoliche, che man mano vanno facendosi più lunghe, finchè in capo a 6 ore il cuore è permanentemente fermo, il soterio di tre anni alla stessa dose e nello stesso tempo induce le caratteristiche alterazioni della contrazione, il rallentamento e l'irregolarità del polso; ma le lunghe pause sistoliche mancano, e dopo sei ore circa il ritmo tende a regolarizzarsi se pure le singole contrazioni sono laboriose, e continuano a formarsi alla superficie quei caratteristici gavoccioli che indicano nelle pareti ventricolari l'esistenza di tratti in cui la musculatura o è paralizzata o è meno robusta; questo stato di cose persiste nel cuore per altre 18 ore.

Nelle cavie la differenza fra i due soterii è ancora più manifesta. Dosi forti, superiori alla minima mortale, di soterii del 1911 uccidono in un periodo di tempo che è da 4 a 12 ore più breve di quello che intercede prima della morte data dalla stessa dose di soterio del 1909 alla dose eguale in animali presso a poco dello stesso peso. Se si passa alla dose minima mortale che è eguale per i due soterii, si trovano analoghe differenze. Una cavia morì in 5 ore col soterio del 1911, e in 23 ore per

quello del 1909. A queste differenze di durata non corrisponde nessuna differenza qualitativa nell'azione farmacologica. Questo stato di cose indica che realmente l'azione tossica si attenua coll'invecchiare del soterio; si comprende come il prolungarsi di condizioni anomale del cuore possa finire col dare la morte, indipendente da un'azione immediata e diretta del farmaco. Meno probabile è che questa attenuazione sia dovuta ad una difficoltà di assorbimento del principio attivo, che sarebbe manifesta nel soterio più antico.

La dose minima mortale per le rane è difficile a fissarsi per le grandi differenze individuali, e più per il comportarsi diverso degli animali secondo le stagioni. Nelle cavie invece si arriva facilmente a cifre costanti. Ho potuto stabilire che in cavie di peso non superiore ai 450 gr. la morte avviene costantemente per dosi uguali o superiori a 0,5 cent. cub. di soterio per ogni 100 gr. dell'animale. Per avere un punto fisso di riferimento, vennero fatte contemporaneamente e nelle stesse condizioni delle esperienze colla soluzione officinale della digitalina Nativelle all'uno per mille. La dose minima mortale per questa è di 0,35 c. c. In tutte queste esperienze il veleno si è introdotto per iniezione sottocutanea.

Stando ai risultati della preparazione dei soterii e a quelli relativi alla perdita d'acqua che subiscono le foglie fresche per ridursi alla condizione in cui sono in commercio (1), si ha che 1 gr. di foglia secca (foglia di digitale della farmacopea) corrisponde a gr. 6 di foglia fresca. Infatti le foglie fresche per ridursi alla condizione di secchezza della droga officinale perdono circa 83 $^0/_0$ di peso cioè i $^5/_6$. Siccome 6 gr. di foglie fresche (= 1 gr. folia off.) dànno 3 c. c. soterio così 3 c. c. soterio = 1 gr. fol. offic. Di qui si ha un ragguaglio della concentrazione del soterio. Per avere un altro criterio ho incaricato il mio assistente dottore Soave di determinare il contenuto in digitossina nelle foglie di digitale del commercio e nel soterio del 1911, seguendo il metodo di Keller (2). Una prova qualitativa aveva mostrato che il soterio dà la reazione di Keller della digitossina, con questo

---

(1) Riferiti nel mio lavoro (" Giorn. Acc. di Med. di Torino ", vol. XVII, anno 74, 1912).

(2) Descritto in Schmidt, *Pharm. Chemie*, V Aufl., II Abth., p. 1880.

però che non apparisce bene il passaggio dalla stria del bruno-verde al color d'indaco; un infuso di foglie di digitale (del commercio) si comporta sotto questo aspetto come il soterio. Seguendo il procedimento di Keller si giunse al seguente risultato: 100 gr. di foglie (secche) di digitale contengono gr. 0,276 di digitossina; 100 gr. di soterio contengono gr. 0,082.

Anche con questo metodo si arriva dunque ad un ragguaglio per cui una parte di foglie secche corrisponde a tre di soterio; infatti la quantità trovata in 100 gr. di soterio è circa il terzo di quella ottenuta da egual peso di foglie secche. Farò ancora notare che la cifra di digitossina trovata nelle foglie secche è vicinissima a quella indicata dal Keller (0,26 %) e quella assegnata da Caesar e Loretz (0,28 %) (1); il che conferma la legittimità del ragguaglio.

Infine il rapporto trovato fra la dose minima mortale di soterio e quella di soluzioni di digitalina Nativelle 1 per mille corrisponde anche abbastanza bene a questi dati. Un mezzo cent. cub. di soterio corrisponde a circa un terzo di cent. cub. di soluzione.

Si può dunque stabilire l'equivalenza posologica del soterio su dati abbastanza concordi per poter dare affidamento del loro valore; 1 gr. di foglie secche di digitale corrisponde a 3 cent. cubici di soterio; un centimetro cubico di soterio corrisponde a circa nove decimi di milligramma di digitossina o digitalina Nativelle.

Debbo far notare che queste cifre (le quali, come ben si comprende, non possono avere una costanza assoluta) si riferiscono tutte ai soterii che hanno almeno qualche mese di preparazione. I soterii freschi, appena ottenuti dalla pianta verde prima che fermentino, sono molto più attivi; la determinazione della dose minima mortale non ho ancora potuto eseguirla per questi preparati.

Il singolare valore dei soterii viene dunque messo in luce da queste indagini. Notevole sopratutto è la loro capacità a mantenersi inalterati. Dopo tre anni il soterio di digitale contiene ancora le sue ossidasi, i suoi principii attivi, ed è esente da putrefazione. I principii permangono tutti attivi in questo

---

(1) Beckurts, " Jahresbericht der Pharmacie ", 35 Jahrg., 1900, p. 110.

liquido; nessuna azione può ottenersi dal pannello delle foglie torchiate. Neppure il deposito che si va formando nei recipienti in cui il soterio si conserva ha mai mostrato di possedere qualsiasi attività farmacologica. Il soterio è dunque il rappresentante genuino dell'elemento farmacologico delle foglie, come è il rappresentante più perfetto che possa ottenersi dal plasma che imbeve i tessuti viventi, che costituisce la parte liquida dei protoplasmi cellulari (1).

(1) È nota l'alterabilità degli infusi; per quello di digitale un lavoro recente di Hoger, pubblicato nel " Bulletin chimique du Sud-Est " (che non ho potuto consultare) e riassunto nel " Giornale di farmacia, di chimica, ecc. della Società di Farmacia di Torino ", vol. LXI, fasc. I, p. 19, dimostra che l'infuso non dura al di là di 3 a 4 giorni; che l'aggiunta di cloroformio vale a preservarlo dalla putrefazione, ma lo rende intollerabile in pratica; che l'aggiunta di alcool (5 %) lo fa conservare per parecchi giorni (da 11 a 35). Anche qui si osserva che l'alcool induce un precipitato che non contiene i principii attivi.

L'Accademico Segretario
CORRADO SEGRE.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 5 Maggio 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO S. E. PAOLO BOSELLI
PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: Manno, Direttore della Classe, Renier, Pizzi, Ruffini, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli e De Sanctis, Segretario. — Scusano l'assenza i Soci Stampini, D'Ercole e Brondi.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 21 aprile 1912.

Il Socio Renier presenta la Prolusione al corso di geografia letta nella R. Università di Bologna il 5 dicembre 1910 dal prof. Cosimo Bertacchi, e pubblicata col titolo *Bologna e la Geografia* dalla " Rivista geografica ital. ", a. XIX (Firenze, 1912), e il fasc. 1-2 del 3° vol. del periodico *Der Islam, Zeitschrift für Geschichte und Kultur des islamischen Orient* (Strassburg, Trübner, 1912) rilevando il valore scientifico di questa Rivista e l'importanza che essa ha per gli studiosi italiani, ora che per forza di cose diverranno più strette le nostre relazioni con l'Oriente mussulmano.

Il Socio Einaudi presenta con parole d'encomio due pubblicazioni del Dr. Giuseppe Prato, *Le Protectionnisme Ouvrier*, traduit de l'italien par Georges Bourgin (Paris, Rivière, 1912) e *L'espansione commerciale inglese nel primo settecento in una re-*

lazione di un inviato Sabaudo (Torino, Opes, 1911 estr. dalla " Miscellanea di Studii storici „ in onore di A. Manno).

Per l' inserzione negli *Atti* il Socio Ruffini presenta una nota del Socio corrispondente prof. Federico Patetta, intitolata: *L'esodo dall'Italia del* Codex Utinensis *e la sua rivendicabilità.*

Il Socio Sforza offre per le *Memorie* accademiche una sua monografia intorno ai *Viaggi di due gentiluomini lucchesi del secolo XVIII*. Parte I: *Viaggi di Francesco Maria Giuseppe Fiorentini [1724-1728]*. La Classe delibera con voto unanime che il lavoro dello Sforza sia inserito nei volumi delle *Memorie*.

Il Segretario legge la relazione del Socio Cipolla sullo studio del Dr. Francesco Cognasso, *Partiti politici e lotte politiche in Bisanzio alla morte di Manuele Comneno*, intorno a cui il Cipolla fu, insieme col Socio De Sanctis, incaricato di riferire ai Colleghi.

La Classe, approvata la relazione e presa cognizione del lavoro del Cognasso, con pienezza di voti segreti ne delibera la stampa nelle *Memorie* accademiche.

LETTURE

L'esodo dall'Italia del " Codex Utinensis " e la sua rivendicabilità.

Nota del Socio corrispondente FEDERICO PATETTA

1. Il breve scritto, presentato a codesta illustre Accademia nell'adunanza del 12 marzo 1911, nel quale esposi " come il ma-" noscritto udinese della così detta *Lex Romana Raetica Curiensis* " e un prezioso codice sessoriano siano emigrati dall'Italia „, ebbe tal fortuna qual io, certo, non avrei osato sperare.

Nell'Accademia, dopo un primo voto della Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche nella stessa seduta del 12 marzo e dopo il riassunto della questione fatto con chiarezza, acume e prudenza mirabili dal presidente S. E. Paolo Boselli, le Classi unite deliberarono a voti unanimi, il 23 aprile, di chiedere " al " Governo che procuri di ottenere in via diplomatica il ricupero " del codice udinese „ e di esprimere al Governo stesso " il voto " caldissimo affinchè con tutti i mezzi amministrativi e giudiziari, " e creando nuovi funzioni e nuove facoltà, sia per appositi or-" gani, sia per uffici e istituti che già esistano, si provveda ef-" ficacemente a prevenire e reprimere i trafugamenti e le vendite " all'estero dei nostri codici, e alla loro vigile ed acconcia con-" servazione nel nostro paese „.

Alla Camera dei Deputati, nella prima tornata del 18 maggio 1911, l'ex-ministro della Pubblica Istruzione onor. Rava prese occasione dal trafugamento del codice udinese e di altri cimeli per richiamar l'attenzione del Ministro di Grazia e Giustizia sull'argomento della necessaria tutela del nostro patrimonio storico, e il Ministro, on. Finocchiaro-Aprile, non solo diede ampie assicurazioni, ma mostrò subito l'intenzione di tradurle in fatti, emanando l'opportunissima circolare del 26 maggio 1911 " concernente la conservazione degli oggetti d'arte, libri

" e manoscritti di valore storico od artistico esistenti nelle " Chiese e negli Archivi ecclesiastici „ (1).

La storia del codice udinese parve abbastanza interessante anche a parecchi dei nostri più autorevoli giornali politici, e le questioni, che vi si connettono, vennero così a conoscenza di tutto un pubblico, il quale forse ignorava affatto, che oltre ad impedire i trafugamenti d'opere d'arte, pei quali, da un po' di tempo, si comincia fortunatamente a far grande scalpore, si dovesse pur pensare alla tutela d'un altro patrimonio nazionale non meno prezioso e non meno insidiato.

Potevo dunque dirmi compensato ad usura della modesta opera mia. Questa però ebbe ora una nuova fortuna, sia detto senz'ombra d'ironia, nella confutazione che tentò di farne il bibliotecario dell' Universitaria di Lipsia dott. R. Helssig (2). Questi infatti, cercando in tutti i modi di difendere l'operato dell'Haenel, pubblicò parecchi frammenti di lettere, finora sconosciute, scritte dall'Haenel (3) o dal canonico Banchieri e passate alla biblioteca di Lipsia colle carte Haeneliane; e mettendoci così in grado di rifare con più precisione la storia del trafugamento del codice udinese, ci dà preziosi argomenti, non solo per mostrare vie meglio la verità di quanto io avevo asserito in rapporto all'Haenel, ma anche per metter senz'altro la questione, se i diritti del Governo italiano sul codice siano o no caduti in prescrizione.

2. Prima però di venire a quello, che è lo scopo principale del presente scritto, voglio sgombrare, possibilmente, il campo da tutto ciò che potrebbe aver sapore di polemica personale e nuocere, almeno apparentemente, all'assoluta e serena oggettività che cercherò di mantenere.

Rispondere punto per punto alle osservazioni del dottor

---

(1) *Bollettino ufficiale del Ministero di Grazia e Giustizia e dei Culti*, 28 maggio 1911.

(2) *Der Erwerb des Codex Utinensis und einer anderen Julianhandschrift* durch GUSTAV HAENEL, in " Zentralblatt für Bibliothekswesen „, marzo 1912.

(3) I brani delle lettere dell'Haenel sono tolti dalle minute conservate insieme cogli originali del Banchieri. Va però osservato fin d'ora che, come si vedrà, alcune lettere del Banchieri, certamente di grandissima importanza, devono essere state distrutte dall'Haenel, e forse non senza ragione.

Helssig, reputo non difficile, ma inutile: nè sento affatto il bisogno di difendermi da ciò che leggo nel suo articolo, e da ciò che altri potrà forse leggere fra le linee. Sarà tuttavia di qualche utilità, non foss'altro come orientazione, accennare alle cose principali.

Il dottor Helssig deplora che io mi sia indotto a pubblicare, su materiali incompleti, un'accusa contro un morto, la quale non potrebbe attualmente aver altro scopo, all'infuori di quello di sfogare il malanimo verso i dotti tedeschi e d'eccitare contro di loro la diffidenza degli italiani e degli stranieri. Siffatta intenzione risulterebbe abbastanza chiaramente dall'inutile accenno ad una storiella raccontata da Olindo Guerrini; e non potrebbe, naturalmente, non far brutta impressione questa intromissione di tendenze ed antipatie nazionali in questioni d'interesse scientifico generale (1).

Codeste osservazioni del dottor Helssig, colle quali, insomma, si sostituisce alla persona di Gustavo Haenel l'intera classe dei *dotti tedeschi*, anzi l'intera nazione, si spiegherebbero forse in un'arringa defensionale davanti ai giurati; ma vederle scritte da uno studioso e in un giornale scientifico, fa stupire e fa pensare.

Nel 1888, quasi vent'anni dopo la morte di Guglielmo Libri, il Delisle pubblicò contro di lui una diffusa e spietata requisitoria (2), che toglie ogni speranza di riabilitazione per un Ita-

(1) Ho riassunto così la chiusa dell'articolo dell'Helssig: " Um so bedauerlicher ist es, dass er sich dazu entschlossen hat, auf Grund unvollständigen Materials eine Anklageschrift gegen einen längst Verstorbenen zu veröffentlichen, für die sich gegenwärtig kein Zweck erkennen lässt, wenn nicht der, einer Misstimmung gegen die deutschen Gelehrten Ausdruck zu geben und gegen sie bei seinen Landsleuten und im Auslande Misstrauen zu erregen. Für das Vorhandensein dieses Motivs möchte ziemlich deutlich die ganz überflüssige Hereinziehung der auf Seite 499 zu lesenden kleinen Geschichte sprechen, die Olindo Guerrini mitgeteilt hat, und deren nähere Umstände sich, da der betreffende deutsche Gelehrte nicht genannt wird, leider nicht untersuchen lassen. Welch unschönen Eindruck dieses Einmischen nationaler Stimmungen und Antipathien in Angelegenheiten von allgemeinem wissenschaftlichen Interesse macht, braucht nicht gesagt zu werden „.

(2) V. l'introduzione al *Catalogue des manuscrits Libri et Barrois*, Paris, Champion, 1888. Questo definitivo atto d'accusa contro il Libri era stato

liano, che avea nella sua vita alcune belle pagine, come patriota e come scienziato. Ora nessuno in Italia pensò che l'opera del Delisle non avesse e non potesse ormai avere alcun scopo, all'infuori di quello d'eccitare la diffidenza contro gli Italiani, perchè gran parte dei codici sottratti era ormai ritornata in Francia e agli altri il governo francese aveva, per esplicita convenzione, rinunciato; e perchè bastava, per la ricerca scientifica, accertare la provenienza dei singoli codici senza indagare il maggior o minor grado di colpa d'una persona *morta da molto tempo*. Le prove addotte dal Delisle, le sue ipotesi, le sue espressioni potrebbero, naturalmente, dar luogo a molte osservazioni perfettamente analoghe a quelle dell'Helssig; ma nessuno le fece nè le farà, perchè a nessun studioso italiano passa per la mente che gli si possa attribuire una solidarietà qualsiasi collo sciagurato, che abusò indegnamente della larga e generosa ospitalità d'una nazione straniera. Il Delisle dimostrò, che il Libri era un ladro, e fece bene a dimostrarlo ad ammaestramento dei bibliotecari troppo fiduciosi e ad esempio dei disonesti presenti e futuri. Di che avrebbero a lagnarsi gli studiosi italiani? Forse della scoperta che ci sono dei ladri anche fra gli Italiani e che la scienza non è sempre e necessariamente congiunta coll'onestà e colla correttezza?

E nello stesso modo, come mai la rispettabile classe dei *dotti tedeschi* dovrebbe sentirsi offesa dalla mia affermazione, che Gustavo Haenel fu poco scrupoloso e che avrebbe potuto addirittura incappare nelle nostre leggi e nel nostro codice penale, acquistando e trafugando codici, che non avrebbero dovuto uscir dall'Italia?

I complimenti, che l'Haenel e il Banchieri si scambiano nelle loro epistole latine, mi fecero ricordare e accennare di volo un aneddoto raccontato sul serio, molto sul serio (1), da Olindo

---

preceduto da una lunga serie di scritti del Delisle sullo stesso argomento, come si può vedere nella *Bibliografia* delle sue opere compilata dal Lacombe, Parigi, 1902.

(1) Brandelli, serie prima, Roma, 1883, pag. 40 e segg. (già cit. nella mia Nota precedente). Giova riportarne in parte le parole: " L'anno pas- " sato, mentre facevo il mio tirocinio in biblioteca..... capitarono due te- " deschi..... S'entra nella sala dei manoscritti e domandano di vedere quel " che c'è delle Epistole di Cicerone. Ne reco parecchi codici preziosi, quando

Guerrini, bibliotecario dell'Universitaria di Bologna, di un tedesco, il quale, " *parlando nella più pura lingua del Lazio* ", voleva farsi vendere un prezioso codice della biblioteca. L'Helssig fa di tal accenno un caposaldo per dimostrare il mio malanimo contro i *dotti tedeschi*, e lamenta che non sia possibile ristabilire il fatto con esattezza, essendo taciuto il nome del protagonista.

Se volessi usare con lui la sua stessa misura e interpretarne le parole e le intenzioni coi metodi ch'egli applica alle mie, direi, con frasi più o meno retoriche, che evidentemente per il dott. Helssig l'affermazione d'un bibliotecario italiano, sia pure Olindo Guerrini, non merita per sè stessa alcuna fede; ch'egli cioè deve trovare naturalissimo il sospetto che un italiano abbia inventato un'odiosa storiella col solo scopo di vantare la propria onestà e denigrare i *dotti tedeschi*.

" Così poco riguardoso e così schiavo di preconcetti, di " tendenze e d'antipatie nazionali si mostra il signor biblioteca" cario Helssig (*potrei conchiudere*) allorquando è in questione la " serietà e l'onoratezza d'un suo collega italiano! " (1).

Io però non ho punto voglia nè d'esercitarmi in vane logomachie nè di far il processo alle intenzioni del dott. Helssig. E tornando invece ai due tedeschi d'Olindo Guerrini, non posso ammettere che gli onesti di Germania, dotti o non dotti, si sentano solidali con loro, così come non debbono sentirsi solidali con Federico Lindenbrog (2), che, benemerito egli pure degli

---

" quello dagli occhiali mi strizza l'occhio e mostrandomi un codicetto in " pergamena mi dice nella più pura lingua del Lazio se glielo voglio ven" dere. *Mehercule!* dissi io: *an te pudet, Germane.....* S'intende che i due " tedeschi se ne andarono scornati e il codice è ancora là, nel suo scaffale ".

(1) Queste parole, che potrei dire, sono ispirate dalla conclusione già riportata dello scritto dell'Helssig e da una sua osservazione, alla quale risponderò fra poco: " So gewissenhaft zitiert Patetta da, wo es ihm darauf " ankommt, die Ehrlichkeit eines deutschen Gelehrten in Zweifel zu ziehen " (pag. 115).

(2) Le accuse contro il Lindenbrog, che insieme a Giovanni Wouwer s'era acquistato in Francia il bel nome di *corsaire de Hambourg*, sono già ricordate dal Jöcher, *Allgemeines Gelehrten-Lexicon*, vol. II, col. 2447, e furono confermate, colla testimonianza d'un contemporaneo, dallo Stobbe, *Storia delle origini* (!) *del diritto germanico*, trad. Bollati, Torino, 1868, vol. I, pag. 334.

studi sulle fonti giuridiche, non sapeva, a quanto pare, resistere alla tentazione d'impadronirsi dei codici antichi dove e come poteva; come non debbono sentirsi solidali con Gustavo Haenel, dato che sia provata, com'io credo, la sua poca scrupolosità e la sua indelicatezza nell'acquisto d'alcuni manoscritti ora posseduti dalla biblioteca di Lipsia.

Ristretta la controversia all'Haenel, credo d'aver già nello scritto precedente resa piena giustizia allo studioso, magnificando l'utilità, ch'ebbe in complesso l'opera sua, quantunque il valore intrinseco delle singole pubblicazioni sia molto scarso, perchè al *labor improbus* non s'accoppiano nè coscienziosa accuratezza nè acume d'ingegno.

Quanto all'uomo, il giudizio, che ne diedi, potrebbe anche essere troppo severo; ma non è certo tale per passione e per animosità, poichè l'Haenel era morto da molti anni quando ne intesi per la prima volta il nome.

Prima che l'Helssig me ne facesse addebito, deplorai di " *dover metter in dubbio la buona fede di chi non può difendersi* „ (p. 506), ma aggiunsi naturalmente " che è ufficio degli storici " giudicare dei morti secondo i fatti noti e le regole delle pro- " babilità „, dalle quali non mi pare davvero d'essermi dipartito.

Nè vale il rimprovero, ch'io abbia giudicato *su materiale incompleto*; poichè nessuno potrà mai lusingarsi d'aver *completo* il materiale per qualsiasi ricerca, e viceversa il materiale raccolto era più che sufficiente per legittimare il mio giudizio, tant'è vero che i nuovi documenti addotti dal mio avversario non fanno che confermarlo in tutto e per tutto, anzi peggiorano la posizione morale dell'Haenel e ne aggravano la responsabilità.

Del resto al dottor Helssig sarebbe stato assai agevole di rilevare, che il mio scritto aveva ben altro intento, che non quello di fare il processo ad un morto.

Di fatti, anche dopo i trafugamenti dell'Haenel, abbiamo in Italia biblioteche e archivi, abbiamo un patrimonio artistico e un patrimonio storico, che purtroppo furono fino ad oggi insufficientemente difesi e che debbono esserlo per l'avvenire con tutti i mezzi e a qualunque costo.

L'esperienza del passato deve servirci d'ammaestramento; e l'impressione fatta in tutta Italia dalla semplice narrazione

di un doloroso episodio, a cui troppi altri si potrebbero aggiungere, mi fa sperare che servirà; come servirà forse la lezione, che, senza volerlo, ci dà il bibliotecario dott. Helssig colle sue teorie, che non mancherò d'esporre fedelmente.

3. Nella mia prima Nota m'occupai pure d'un prezioso codice sessoriano, che l'Haenel acquistò in Roma dal libraio Petruzzi nel 1825 e che trafugò contro le disposizioni dell'editto Pacca pubblicato qualche anno prima. L'Helssig ci fa ora sapere che dallo stesso libraio l'Haenel acquistò circa trenta codici, quasi certamente in gran parte di provenienza non meno sospetta e in ogni modo ugualmente acquistati e trafugati violando apertamente l'editto Pacca.

La questione del codice sessoriano, che l'Helssig rende oscura con una profusione di particolari, si può riassumere molto in breve.

L'Haenel acquistò nel 1825 un manoscritto sottratto, con molti altri, alla biblioteca sessoriana.

Nel 1830 il Bluhme dimostrò chiaramente che il manoscritto era appunto stato sottratto alla biblioteca, e riferì ciò che i monaci narravano, cioè che la sottrazione dei manoscritti era avvenuta *per furto con scasso*.

L'Haenel riconobbe l'identità del codice; ma non si curò d'appurare come e quando fosse uscito dalla biblioteca, e si guardò bene dal restituirlo.

Invece molti anni dopo, in una prefazione che ha la data del 1° luglio 1872, affermò d'essersi ricreduto e che il suo codice non era l'antico sessoriano. E questo perchè una notizia dell'8 gennaio 1219 aggiunta in fine del codice fu trascritta in un catalogo del secolo XVII con leggerissime varianti, e perchè questo catalogo indicava il codice come di 72 fogli mentre ne restano solo 71! Si noti che il Bluhme, fin dal 1830, aveva osservato che il ladro, o chi mise il codice in commercio, aveva fatto scomparire il foglio di guardia contenente le solite indicazioni di provenienza: ma di quest'osservazione l'Haenel non fiatò. Il codice sessoriano aveva 72 fogli, il suo 71: dunque era diverso!

Lo stesso Helssig è costretto a confessare, che il suo difeso, non avendo altri argomenti, avrebbe fatto meglio a non

negare l'identità del codice già prima ammessa (1). Ma non si tratta qui di giudicare della maggior o minore probabilità d'una ipotesi o d'un'affermazione: si tratta di una questione ben più grave!

Infatti con argomenti spesso, apparentemente, più serî di quelli usati dall' Haenel per il codice sessoriano, si potrebbe sostenere che quasi tutti i codici descritti, non solo da lui, che è sempre inesattissimo, ma nella maggior parte dei cataloghi, non esistono più nelle biblioteche e sono stati sostituiti da altri " *germanis quidem, neque vero eisdem* „.

È dunque inutile far schermaglia di parole. L'Haenel, che aveva riconosciuto la provenienza illecita d'un codice da lui acquistato e non l'avea reso, sia pure reclamando il prezzo pagato, affermò d'essersi ricreduto fondandosi sopra dati di fatto, che agli occhi di lui, come a quelli di qualsiasi persona anche mediocremente competente, non potevano avere alcun valore. Ed è ovvio congetturare che le sue argomentazioni (che già, molti anni or sono, chiamai vane e futilissime (2)) fossero suggerite dal desiderio di sottrarsi all'obbligo, morale se non giuridico, della restituzione.

Si badi che l'Helssig, il quale, come dirò, crede di poter rimproverare a me la poca esattezza d'una citazione, non si peritò, in una questione così delicata e così importante, d'attenuare la responsabilità dell'Haenel, parlando di *dubbio* ch'egli avrebbe espresso sulla provenienza del suo codice dalla biblioteca di Santa Croce (3). L'Haenel non espresse dubbi: ostentò *certezza*: " ... nunc aliter sentio... meum codicem germanum " quidem illi S. Crucis esse arbitror, neque vero eundem „.

---

(1) " ..... und man wird zugeben dürfen, dass er in der Tat besser unterlassen hätte, die von ihm früher anerkannte Identität seiner Handschrift mit der im Katalog jener Bibliothek beschriebenen in Abrede zu stellen, wenn er dazu keine überzeugenderen Gründe hatte, als die, welche er angeführt hat „ (pag. 113).

(2) *Adnotationes codicum domini Iustiniani (Summa Perusina) edente* F. PATETTA, Romae, 1900, pag. XLVII, n. 4: " Codex Haenelii ... e Romana S. Crucis bibliotheca furto ablatus est; quod inanibus et futilissimis argumentis frustra denegavit Haenelius ... „.

(3) " auf den Zweifel, den Haenel 1872 gegen die Herkunft seiner " Handschrift aus Santa Croce ausgesprochen hat „..... " die von ihm früher " anerkannte Identität..... in Abrede zu stellen „ (pag. 113).

Il che è ben altro!

La citazione poco coscienziosa, che l'Helssig mi rimprovera, si riferisce ad un altro acquisto di codici rubati, fatto dall'Haenel.

Rinviando in nota allo Zachariae von Lingenthal, *Ius graeco-romanum*, parte V, pag. VII, avevo ricordato come l'Haenel " in un suo viaggio in Spagna, avesse comperato due preziosi " manoscritti greci sottratti alla biblioteca dell' Escuriale, e " dopo averli portati a Lipsia e fatti conoscere per suoi, " fosse poi costretto a restituirli quando ne fu svelata la pro- " venienza ".

L'Helssig (1) trascrive le parole dello Zachariae, alle quali io aveva rinviato, e crede che lo autorizzino a metter un punto d'esclamazione dopo la mia parola *costretto*, e a commentare poi colla proposizione, che ho riportato a pag. 742 n. 1.

Lo Zachariae, dando l'elenco dei manoscritti della *Synopsis Basilicorum*, scrive nella pagina citata: " 31-34. In Scorialensi " bibl. quatuor: IV - Ω - 19 (membr. saec. XI), III - X - 7 (membr. saec. XII)... " e aggiunge in nota " Hos Haenelius Valdoleti " reperit emtosque Lipsiam attulit, mox autem quum e Scoria- " lensi bibliotheca fraude sublatos cognovisset, huic bibliothecae " restituit. Hinc factum, ut Codices isti tamquam Haeneliani " aliquamdiu innotuerint ".

Mi duole di non aver nel mio primo lavoro riportato codesto passo invece di restringermi a citarlo. Quanto all'interpretazione del fatto, non ho da cambiarla in nulla e per nulla. Si può esser *costretti* a far una cosa contro la propria volontà per molte e molte ragioni. Quali ragioni abbiano indotto l'Haenel alla restituzione dei codici dell'Escuriale, non so; ma s'egli fosse stato tal uomo da restituire i codici solo per averli riconosciuti *fraude sublatos*, avrebbe, fin dal 1830, restituito il codice sessoriano, e non avrebbe poi comprato l'udinese.

Del resto così per i codici di Madrid come per il sessoriano e forse per molti altri acquistati dall'Haenel, resterebbe a vedere s'egli abbia usato quelle cautele, che usa nel dubbio

---

(1) Egli dice di dare le parole dello Zachariae alla lettera " wörtlich ". Viceversa non è del tutto esatto scrivendo: " In Scorialensi bibliotheca " quatuor codices Synopsis Basilicorum. — Duos Haenelius Valdoleti re- " perit..... ".

ogni galantuomo, o se non abbia invece chiuso gli occhi per non vedere.

Certi acquisti, dovunque e comunque fatti, sono riprovevoli anche quando non si sa con precisione la provenienza degli oggetti comperati; poichè non è una singolarità del codice penale italiano la disposizione dell'articolo 493 che punisce " chiunque, " senza aver prima accertato la legittima loro provenienza, " acquista oggetti, i quali per la loro qualità, o per la condi- " zione della persona che li offre, o per il prezzo chiesto o accet- " tato, appaiano provenienti da reato ".

4. Vengo finalmente alla questione principale, cioè al manoscritto udinese, e mi propongo di dimostrare, che l'acquisto ne fu fatto dall'Haenel pur sapendo di comprare da chi non avea facoltà di vendere; che l'Haenel, sapendo che le leggi italiane vietavano l'emigrazione del codice, diede il mandato o almeno il consiglio di trafugarlo, corrompendo eventualmente i doganieri con qualche piccola somma; che il suo possesso, oltre ad aver questo vizio d'origine, fu sempre clandestino, e perciò non potè, vivente l'Haenel, compiersi l'usucapione. Accennerò infine ad una questione difficile e delicata, ma che bisogna pur affrontare, se cioè il possesso del codice udinese da parte della biblioteca universitaria di Lipsia non sia stato originariamente viziato dal fatto, che non si doveva e non si poteva ignorare la provenienza del codice e l'impossibilità che esso fosse legalmente in mano dell'Haenel.

Come fu acquistato il codice udinese?

I brani di lettere del Banchieri e dell'Haenel pubblicati ora dall'Helssig ci permettono di ricostruire il corso delle trattative meglio che non si potesse colle due sole lettere dell'Haenel prima conosciute.

La proposta dev'esser partita dall'Haenel poco dopo la spedizione garibaldina contro Roma e il successivo intervento francese nel novembre del 1867. Come si ricava dalla risposta del canonico Banchieri, l'Haenel, citando non so che sentenza *del sommo De Thou* sulla rovina delle biblioteche in tempo di guerra civile, proponeva che si mettesse in salvo il codice udinese..... vendendolo a lui.

Rispondeva il Banchieri, in data dell' 8 dicembre, che la

sentenza del De Thou non cadeva a proposito, perchè, per grazia di Dio, la pace cittadina non era punto turbata e il Capitolo continuava a possedere tutti i suoi beni, compreso il famoso codice. Aggiungeva però, che questo, a suo avviso, sarebbe stato meglio custodito in una biblioteca pubblica tedesca, che non a Udine in un archivio privato: non esser perciò impossibile, che, col consenso dei canonici, il codice potesse, quandochessia, esser inviato all'Haenel (1).

Notiamo subito, a parziale discolpa del Banchieri, che, se è molto contestabile la sua opinione sul carattere di *privato* da lui attribuito all'archivio del Capitolo d'Udine, egli mostra per lo meno d'essersi subito preoccupato della conservazione del codice udinese e d'aver creduto possibile la cessione solo quando il codice fosse destinato ad una biblioteca pubblica.

L'Haenel rispose, in data 22 dicembre, colla lettera, che pubblicai già in gran parte, cominciando col rallegrarsi della falsità delle voci corse sulle gravi condizioni dell'Italia; ricopiando poi alla lettera le disgraziate dichiarazioni del Banchieri, quasi a scongiurare il pericolo che questi potesse dimenticarle; e osservando poi che da tali parole egli desumeva la possibilità di acquistare il codice (2), avendo già destinato di legare la sua biblioteca all'Università di Lipsia. Insisteva quindi perchè il codice gli fosse senz'altro venduto.

Il Banchieri accettò subito l'idea dell'Haenel e si pose all'opera per persuadere gli altri canonici, alcuni dei quali resistevano. Di ciò egli informò l'Haenel con lettera del 28 dicembre 1867 (3). In seguito c'è una lunga lacuna nell'epistolario e

(1) " Summi Thuani sententia de ruina thesauri litterarum esset quidem " vera in casu nostro si extarent civium armorumque tumultus, sed quum, " Deo disponente, civitas nostra in pace quiescat et Metropolitanum Capi- " tulum hactenus omnia bona sua possideat, Codex ille (lex Romana) qui " a sapientia Tua, Vir perillustris, tanti fit, adhuc apud nos retinetur. Certum " autem est, iuxta meam sententiam, Codicem illum melium (!) servatum " iri apud Vos in quadam publica Bibliotheca quam apud nos in privato " archivio. Quapropter extra aleam non esset, ut ego, ex consensu Colle- " garum meorum, ad Te librum illum mittere aliquando possem „.

(2) " Ex quibus verbis colligo desiderium meum possidendi huius co- " dicis expleri posse. Legavi enim bibliothecam meam etc..... Fac igitur, " quaeso, ut codex in dominium meum perveniat „.

(3) " Veniam tamen ad argumentum quod Tibi amoenissimum est, circa

quindi nella storia delle trattative. Alcune lettere andarono forse smarrite; altre giunsero a destinazione, ma l'Haenel non credette bene di conservarle. Che infatti alcune lettere siano state distrutte dall'Haenel appare dalla mancanza di quelle, in cui il Banchieri chiedeva o accettava il prezzo derisorio, per cui il codice fu venduto; il *pretium compromissum* ricordato dal l'Haenel nella lettera del 24 ottobre 1869.

La serie delle lettere del Banchieri si riapre con una del 18 ottobre 1869, nella quale si legge che, " essendo minacciata " la *dilapidazione* per opera del fisco dei beni ecclesiastici mobili " e immobili ", il Capitolo sarebbe disposto a dare al Banchieri facoltà d'alienare il codice Udinese, " salvo se il Regio Fisco " desse l'ordine, non ancora dato, di far il catalogo delle cose " mobili " (1).

Il passo è importantissimo. L'Helssig sostiene che, secondo le idee del Capitolo accolte dall'Haenel, il Capitolo stesso si sarebbe ritenuto non autorizzato a vendere solo quando il Governo italiano, coll'ordinare l'inventario, avesse messo le mani sugli immobili del Capitolo (2). Così tanto il Banchieri ed i suoi

---

" Codicem de quo confabulati sumus. Quidam ex Collegis meis mecum " probe sentiunt, nondum tamen omnes: sed duce patientia et persuasione " de victoria spem non abijciam. Et hoc praecipue argumento suffultus Te " magnificam Bibliothecam Tuam celeberrimae Tuae Universitati viventem " adhuc legasse... ". Che colle parole *confabulati sumus* il Banchieri potesse riferirsi a precedenti trattative verbali e non alla lettera già citata, è certamente da escludersi, benchè l'Helssig, a pag. 99, accenni a tale interpretazione e voglia far nascere il dubbio che le trattative possano esser state anteriori alla cessione della Venezia all'Italia. Egli, senza dirlo, vuol così rispondere alle mie osservazioni: " L'Haenel credette probabilmente " di poter tentare sotto il nostro Governo ciò che forse non avrebbe osato " durante la dominazione austriaca " (pag. 499).

(1) " Atqui hodiedum comminata Bonorum Ecclesiasticorum tam Mo- " bilium quam Immobilium fiscali prodigentia, Capitulum mihi, utpote prae- " sidi suo, de illo [*codice*] disponendi facultatem impertiret, dummodo " R. Fiscus Catalogum rerum Mobilium (nondum injunctum) fieri non iu- " beret. Unde si omne promissum de iure debitum est, ego ad implendum " Tecum fidem meam paratus essem ".

(2) " Dass es hierbei die Uebertragung der Dispositionsbefugnis an " Banchieri an die negative Bedingung knüpfte, das nicht von seiten des " Fiskus ein Inventar der Mobilien des Kapitels eingefordert werde, zeigt, " dass das Kapitel — mit Recht oder Unrecht — die Auffassung hatte, dass " es dann, aber auch nur dann zur Veräusserung nicht berechtigt sei, wenn

colleghi, dottori in teologia e in diritto canonico o magari *in iure utroque*, quanto l'Haenel, professore di diritto romano, avrebbero creduto, in perfetta buona fede, che i diritti del Governo italiano potessero dipendere, non da norme giuridiche generali e da precise disposizioni di legge, ma da un semplice provvedimento amministrativo, e cioè dall'aver o non aver ordinato un inventario! Prima dell'inventario, secondo il parere del Capitolo, accolto in buona fede dal giurista Gustavo Haenel, la vendita sarebbe stata permessa, dopo no.

L'assurdità di siffatte ipotesi appare evidente, quando si pensi che il Banchieri e i suoi colleghi non potevano certo non conoscere almeno le disposizioni del nostro codice civile, che vietavano la vendita del manoscritto, disposizioni, le quali, appunto perchè considerate contrarie alla libertà e ai diritti della Chiesa, appunto perchè molto discusse, erano e sono a conoscenza di tutti gli ecclesiastici. Come dunque avrebbe potuto venir loro in mente ciò che l'Helssig vuol leggere e far leggere dall'Haenel nella lettera del 18 ottobre 1869?

Questa lettera avrebbe invece dovuto svelare all'Haenel, se non lo avesse saputo, come doveva certamente saperlo fin da principio, che il progettato acquisto era vietato dalle nostre leggi. L'essere poi il codice registrato in un catalogo fatto per ordine del Governo avrebbe forse aggravato la responsabilità dell'archivista capitolare ma nulla più.

Che l'Haenel non conoscesse, almeno nella loro sostanza, le leggi italiane che vietavano la vendita e l'esportazione dei manoscritti, si può forse congetturare per artifizio di difesa; ma già *a priori* nessuno ci crederebbe. Che invece le conoscesse, e molto bene, è più che provato, come vedremo, dalla lettera già citata del 24 ottobre 1869.

È poi singolarissimo l'argomento dell'Helssig, che le leggi austriache le quali vietavano l'esportazione dei codici fossero

---

" der italienische Staat durch Einforderung des Inventars die Hand auf " den Mobiliarbesitz des Kapitels legen werde. Wenigstens war das die Auf- " fassung, welche Haenel aus dem Briefe herauslesen musste, und, wie sein " späterer Brief aus dem Jahre 1871 zeigt, in der Tat herausgelesen hat. " Und es kann ihm in keiner Weise zum Vorwurf gereichen, dass er die " Beurteilung der Rechtsfrage, ob die Veräusserung erlaubt sei, dem Ka- " pitel überliess..... " (pag. 101-102)..

cadute in desuetudine, perchè in caso diverso l'Haenel non avrebbe potuto, già molti anni prima, aver il codice Udinese in prestito a Lipsia.

Che un bibliotecario non distingua fra mandar un codice in prestito all'estero e esportarlo clandestinamente perchè non torni più, sarebbe certo cosa strana, se il bibliotecario non avesse in questo caso ceduto il passo all'avvocato difensore, il quale non suole guardare molto pel sottile nelle tesi giuridiche, ch'egli adduce.

Ed è così che l'Helssig può mettere innanzi una nuovissima teoria di diritto internazionale privato, secondo la quale l'Haenel, anche conoscendo le disposizioni del nostro codice civile le quali per la validità dell'alienazione dei beni ecclesiastici richiedono *l'autorizzazione del Governo*, non doveva preoccuparsene nè punto nè poco, perchè l'adempimento di questa condizione posta dalla nostra legge spettava al venditore e non al compratore straniero (1).

Se chiunque contratti con stranieri seguisse per poco le teorie giuridiche dell'Helssig, non tarderebbe a imparare a sue spese la necessità di ricorrere a qualche altro consulente legale un po' meno spregiudicato nelle sue idee.

Tornando alla lettera del Banchieri, questi vi espone anche la difficoltà di mandare il codice a Lipsia, perchè la posta italiana non poteva accettare, per l'estero come per l'interno, se non lettere o stampati sotto fascia. Ad impedimenti di dogana alla frontiera non s'accenna affatto, forse perchè, affermata l'assoluta impossibilità della spedizione, non era il caso di parlare d'altri ostacoli.

Rispose l'Haenel, nella lettera del 24 ottobre, col passo, che fece tanta impressione su tutti i lettori italiani, e che, non per mia iniziativa, si volle anche fissato da un *facsimile*.

Egli consiglia che, a sue spese, si mandi il codice a Gorizia o a Trieste per mezzo d'un uomo fedele e furbo nel trattare coi doganieri; che del resto l'oro fa cadere anche le fortezze più munite. A Gorizia o a Trieste si potrà poi, colle dovute cautele, affidare il codice alla posta. Se questo mezzo, a parere

---

(1) " Für die Erfüllung der Bedingung zu sorgen, an welche das ita-
" lienische Gesetz die Zulässigkeit des Verkaufs knüpfte, war nicht seine,
" des ausländischen Käufers, sondern des Verkäufers Sache „ (pag. 100).

dell'Haenel *semplicissimo*, non piace, si cercherà qualche mercante di Lipsia, che sia in relazioni commerciali coi setaiuoli d'Udine e di cui si possa fidarsi:

" Quae cum ita sint, existimo haud aliter negotium confici " posse, nisi ut mittatur homo fidus et, quod attinet ad milites " limitaneos versutus — auri vis expugnat munitissima quaeque " castra — sumptibus meis, modo hi non excedant summam " quindecim thalerorum Borussicorum, Goriziam aut Tergestum, " qui ibi rem quam in mente habemus .... cursui publico tradat " .....Gratum mihi feceris si scribas, an hoc consilium, quod mea " sententia simplicissimum est, Tibi placeat, ut, si Tibi displicuerit, " explorem mercatorum Lipsiensium commercium cum Utinen- " sibus sericariis exercentium aliquem, cui fides haberi possit „.

L'Helssig non vede in tutto ciò nulla di compromettente. Siccome non si poteva ricorrere alla posta italiana, niente di più naturale che si mandasse un uomo fidato a Gorizia o a Trieste e si facesse la spedizione per mezzo della posta austriaca. Ad un eccitamento a corrompere i doganieri italiani, non c'è neppur da pensare: si tratta invece dei doganieri austriaci e del desiderio, naturalissimo, dell'Haenel che il pacco non fosse aperto e il codice danneggiato da loro (1): e io stesso, secondo l'Helssig, avrei interpretato altrimenti le parole dell'Haenel, se avessi conosciuto la lettera, nella quale il Banchieri espone l'impossibilità di affidare il codice alla posta italiana.

Io credo invece che qualunque lettore spassionato abbia interpretato e interpreti il passo dell'Haenel in un modo molto diverso, e precisamente così: L'Haenel, il quale sapeva benissimo che l'esportazione dei codici dall'Italia era vietata e che perciò il manoscritto Udinese avrebbe dovuto esser sequestrato alla frontiera, voleva farlo passare per mezzo d'un uomo, che sapesse farla in barba ai doganieri, magari lasciando correre qualche scudo perchè chiudessero gli occhi.

---

(1) " Es ist natürlich, dass er dabei wünschte, dass der Codex, um ihn " vor jeder Verletzung unterwegs zu behüten, in Udine sicher eingepackt " und dann nicht bei Uebergang nach Oesterreich zum Zweck der Zollvi- " sitation durch die österreichischen (nicht die italienischen) Zollbeamten " wieder ausgepackt werde. Zu diesem Zwecke deutet er auf den — in " diesem Falle ziemlich unschuldigen — Ausweg eines kleinen Geldopfers " hin. Eine heimliche Ausführung ist dadurch nicht indiziert „ (pag. 103).

Se l'Haenel avesse creduto, che l'acquisto del codice fosse legittimo e che non esistesse alcun divieto alla sua esportazione, perchè avrebbe raccomandato la scelta d'un uomo " *quod attinet* " *ad milites limitaneos versutus* „? L'accenno alla forza dell'oro, che espugna le fortezze meglio munite, a che si riferirebbe, se non alla necessità di eludere quel po' di sorveglianza, che si esercitava e si esercita dai doganieri?

Ho parlato, nella prima Nota, di mandato di corrompere eventualmente i doganieri. Se l'espressione pare troppo forte, se ne sostituisca pure un'altra meno grave: " consiglio d'ingan- " nare i doganieri, oppure, eventualmente, di renderli meno esi- " genti e meno scrupolosi nell'esercizio delle loro funzioni lar- " gheggiando in mancie „.

Non ci saranno più gli estremi del reato di corruzione. Resta però sempre provato in modo irrefutabile, che l'Haenel conosceva benissimo il divieto d'esportazione dei codici dall'Italia e che trovava cosa *semplicissima* far trafugare il codice udinese.

Il Banchieri rispose, il 4 dicembre, ai buoni consigli dell'Haenel, dicendo che la trasmissione del codice era cosa molto pericolosa, tantopiù che la lettera dell'Haenel era stata senza dubbio aperta per infedeltà degli ufficiali postali: " Ad Codicis " transmissionem quod attinet, negotium aleae plenum hic et " nunc mihi videtur: nec quod mihi suggeris facere putarem " praesertim quum epistola Tua, gummi ablato disruptoque sigillo, " luce clarius reserata fuerit. Huius vero infidelitatis Vereda- " riorum testimonium alias expertus sum etc..... „.

Anche questo passo non ha suscitato alcun sospetto nel dott. Helssig: ed è nondimeno evidente che il Banchieri, conoscendo egli pure e l'illegalità della vendita e il divieto d'esportazione, temeva che la lettera dell'Haenel fosse stata letta, e che potesse quindi esser a conoscenza dell'autorità italiana, che qualche affare sospetto si stava tramando. Di che si trattasse con precisione non si sarebbe potuto sapere, perchè l'Haenel, più volte avvertito della possibile violazione del segreto epistolare, non parlava più del codice, ma bensì *del noto oggetto*, " *rem* " *quam in mente habemus* „; precauzione, che essa pure è gravissimo indizio di piena coscienza dell'illegalità, che si voleva commettere.

Il Banchieri, dichiarando di non conoscere nessuno a Gorizia o a Trieste, cui si potesse affidare la cosa, e di non volersi servire della ferrovia, " quae saepius in transmissione librorum " fefellit committentium expectationem „, conchiudeva, che avrebbe tenuto il libro presso di sè, fino a che qualche setaiuolo udinese a lui ben noto non dovesse far viaggio per Vienna o Berlino. Non si parlasse intanto del prezzo, dovendo esulare qualunque idea di lucro, e non dovendosi fare un *ὕστερον πρότερον*, cioè ricevere il denaro prima della consegna del codice (1). Pare veramente, che qui il Banchieri non avesse ben presente ciò che aveva scritto l'Haenel, il quale s'era accontentato di *promettere*, che avrebbe mandato il prezzo convenuto non appena ricevuto il codice (2).

A questo punto c'è senza dubbio una nuova lacuna nell'epistolario del Banchieri. L'Haenel cioè deve aver distrutto una lettera, nella quale il Banchieri ricusava di ricevere il denaro convenuto e manifestava qualche scrupolo.

Alla lettera perduta, e non, come crede l'Helssig, a quella del 4 dicembre, rispondeva l'Haenel in data del 1° gennaio 1870: " Recusas accipere quod inter nos pactum est; ab altera autem " parte urget me beneficii Tui memor et gratus animus, ut, quod " honesti viri est, impleam, quod promisi. Quid igitur mihi fa- " ciendum? (3). Sed mihi crede, Vir summe reverende, nunquam " me in animum induxisse, ut a Te petam quod non omnino " congruat cum sacris praeceptis. Quae cum ita se habeant, " sinas me, enixe Te rogo, honeste agere et officii mei auctori- " tati obtemperare. Mittam igitur Tibi suo tempore pecuniam " promissam; reliqua non curo; utrum ea impendantur in com- " modum ecclesiae sive pauperum an aliorum mea non refert. " Utinam Tu mecum consentias; alias enim vereor, ne res de

---

(1) " Sed ne verbum quidem de illius pretio proferas precor: in hac " enim re longe a nobis sit quilibet indecus [!] pecuniae quaestus: eo " magis quo, prout grammatici dicunt, *ὕστερον πρότερον* faciendum non sit „.

(2) " Nec restat quicquam, quod addam, nisi sit ut promittam, me " Tibi pretium compromissum illico soluturum esse, simulac res mihi " tradita erit „.

(3) Parrebbe che qui ci sia una lacuna, che non sarebbe difficile spiegare, conoscendosi di questa lettera la sola minuta rimasta fra le carte dell'Haenel.

" qua agitur, peritura sit. Causam non ignoras. Hic secura est
" ab omni periculo, praesertim quum omnem meam supellectilem
" litterariam quam possideo, Lipsiensi Litterarum Universitati
" ultima voluntate legaverim „.

L'Helssig, non so proprio come, trova in questo brano una prova della buona fede dell'Haenel, al quale non sarebbe neppur passato per la mente l'idea d'un acquisto illegale: " deutlich " zeigt, wie ihm jeder Gedanke an einen unrechtmässigen " Erwerb des Codex fern lag „ (pag. 104).

Io credo invece che ogni lettore imparziale non vedrà nelle parole dell'Haenel se non la paura che la preda agognata gli sfuggisse. Non so poi come possa non balzar agli occhi di tutti la strana insistenza dell'Haenel per mandar il prezzo promesso per il codice, mentre d'altra parte non nasconde il timore che il codice non gli sia più mandato e *perisca.* La motivazione ancor più strana e involuta, secondo la quale sembrerebbe che Haenel, professore di diritto, si senta obbligato a pagare il prezzo indipendentemente dalla consegna della cosa venduta (*quod honesti viri est, impleam quod promisi..... sinas me, enixe Te rogo, honeste agere et officii mei auctoritati obtemperare*), si spiega forse, quando si riavvicinino le espressioni usate dall'Haenel con una frase del sempre disgraziato Banchieri, nella sua lettera del 18 ottobre 1869. Il Banchieri, il quale evidentemente s'era impegnato per parte sua a cedere il codice all'Haenel se i suoi colleghi non lo vietavano, dopo aver annunciato che aveva ormai la desiderata autorizzazione a vendere, aggiungeva che sarebbe perciò disposto a mantenere la promessa: " Unde si omne pro- " missum de jure debitum est, ego ad implendum Tecum fidem " meam paratus essem „.

Ora l'Haenel non osa dire addirittura al Banchieri: " Hai " promesso, e ogni promessa è debito „: inverte invece, colla solita arte, i termini, e dice: " Ho promesso, e ogni uomo onesto " mantiene la sua promessa: perciò debbo pagare il prezzo del " codice „. E canta poi la vecchia canzone, colla quale aveva fin da principio cercato di giustificare la *sfacciata proposta* (1) d'acquistare il codice. Il manoscritto a Udine perirà: a Lipsia sarà sicuro, tanto più perchè passerà alla biblioteca dell'Uni-

(1) Questa espressione, già usata nella mia prima Nota, non piacque all'Helssig. Ma a me pare così giusta, che non posso mutarla.

versità: “ vereor, ne res de qua agitur, peritura sit. Causam “ non ignoras. Hic secura est ab omni periculo etc. „

Perchè il codice avrebbe dovuto *perire* là dove era stato conservato per secoli? Qual'è la *causa,* che l'Haenel e il Banchieri conoscevano?

Evidentemente il dubbio ingiurioso di Gustavo Haenel è diretto contro il Governo italiano. Come il Banchieri aveva parlato di *minacciata dilapidazione* dei beni ecclesiastici da parte del fisco, così l'Haenel prospetta l'incameramento delle biblioteche e degli archivi capitolari, al quale del resto il Governo italiano non pensava affatto, come un pericolo per la loro conservazione, anzi addirittura come prossima rovina. Dunque, si salvi, per amor del Cielo, il codice Udinese..... mandandolo a Lipsia.

E l'Helssig si scandalizza ch'io abbia parlato di *raggiri* dell'Haenel, ch'io abbia detto che abusò dell'ignoranza, della debolezza o fors'anche della vanità altrui? Ma a me pare d'aver ragione di compiacermi d'aver perfettamente resa la psicologia dell'uomo e della sua vittima (più che complice), il canonico Banchieri. Chi infatti potrebbe non riscontrare tutti gli estremi del *raggiro* nello spauracchio della guerra civile e della conseguente rovina delle biblioteche italiane agitato nel novembre del 1867; nel timore, ostentato nel 1869, che il codice Udinese stesse per *perire*; nel preteso scrupolo di coscienza per cui l'Haenel si sarebbe creduto in obbligo di pagare una cosa contrattata proprio quando temeva di non poterla più avere? Evidentemente Gustavo Haenel speculava sulla credulità, sulla dabbenaggine, sui sentimenti d'ostilità e di sospetto, ben naturali e, fino ad un certo punto, scusabili, del Banchieri e dei suoi colleghi contro il Governo italiano, contro coloro “ penes quos “ (*secondo le benevole espressioni dello stesso Haenel*) rerum pu“ blice in Italia administrandarum potestas est aut potius rerum “ ecclesiasticarum per fas nefasque auferendarum summa „. Ci sono, lo ripeto, ragioni di scusa e attenuanti per il Banchieri e i suoi colleghi. Non ne vedo invece per l'Haenel, se non forse nell'avidità del raccoglitore, che sta per fare un buon colpo, e nel pensiero che i codici acquistati “ *per fas nefasque* „ avrebbero finito coll'arricchire una biblioteca pubblica.

Dalla lettera del 4 dicembre 1869 si passa, nella corrispon-

denza del Banchieri, ad una lettera del 29 gennaio 1870; essendo stata evidentemente distrutta, non solo la lettera, alla quale l'Haenel aveva risposto il 1° gennaio 1870, ma anche la successiva risposta del Banchieri, che sarebbe molto interessante conoscere.

Nella lettera del 29 gennaio 1870 il Banchieri annuncia senz'altro che il codice è stato spedito per mezzo d'una *compagnia assicuratrice*, che s'incaricava della trasmissione di qualsiasi pacco per tutta l'Europa (" pro cuiusque generis involucris per " totam Europam „). L'invio avvenne infatti nel giorno indicato, e siccome il pacco fu aperto solo alla dogana di Lipsia, l'Haenel potè finalmente entrare in possesso del codice.

Ma con ciò non erano finiti, nè per i canonici nè per lui i timori e le preoccupazioni.

Nel gennaio del 1871 pareva imminente l'ordine di fare l'inventario della biblioteca e dell'archivio capitolare udinese, e il Banchieri scrive all'Haenel, appunto in data del 25 gennaio, una lettera, nella quale non capisco come l'Helssig non abbia ravvisato la più ampia prova della clandestinità e della illegalità della vendita ben conosciute tanto dai canonici quanto dall'Haenel. Si trattava semplicemente di rendere il prezzo e riavere il codice:

" ..... Praeterea iam diu ab elapso Septembri, postquam " Itali Romam ingressi sunt, mussitatum est, compingendum " esse a Capitulis Cathedralibus Elencum bonorum mobilium, puta " archivia, bibliothecas, cimelia etc. si quae sunt. Haec altera " expoliatio nondum pro nobis ad effectum deducta est; ast " quemadmodum in Collegiata nostra Civitatensi jam inde ab " Octobri 1869 complebatur, ita nobis quoque probabiliter im- " minet (1). Quomodo igitur in hoc novo nostro infortunio se " gerant Canonici et praesertim Archivii Custos [*cioè precisa-* " *mente il Banchieri*], quum codex (Lex Romana) ad Te iam " transmissus desit, in Cathalogo (2) aliunde fere ubique notus? " Bonum mihi quod denariorum Tuorum depositum a me receptum, " quando iam vox de apprehensione nostrorum bonorum personare

(1) L'Helssig stampa *imminent*.

(2) Così stampa l'Helssig. Forse si deve trasportare la virgola dopo la parola *Cathalogo*.

" coeperat, intactum reservavi (1) Tibi remittendum, casu quo
" Superiorum necessitas nos urgeat ut codicem illum (quod Deus
" avertat) consignemus. Si ergo, iuxta antiquum adagium: 'contra
" Potentes nemo est munitus satis', Tu, Clarissime Vir, probe
" noveris non a voluntate nostra sed ab improviso infortunio
" hoc negotium pendere. In hac igitur ambage quid suggerat
" sapientia Tua anxie expectabo „.

Non si potrebbe desiderare una più esplicita confessione della piena coscienza d'aver violato le leggi italiane, confessione che dimostra quanto poco fondamento abbia ciò, che l'Helssig congettura sulle idee del Banchieri e dell'Haenel, secondo le quali i diritti del Governo italiano sarebbero dipesi esclusivamente dalla confezione o no dell'inventario, e quindi la vendita anteriore sarebbe stata perfettamente legale (2).

L'Haenel rispose subito, dichiarandosi disposto a rimandare il codice, ma ponendo esplicitamente la condizione, che il Banchieri avrebbe potuto ritenere ingiuriosa, di riavere prima il suo denaro. Anche questa lettera è preziosissima:

" . . . . . ab altera autem parte gravis et serioris argumenti.
" Video enim Te vereri ne ii penes quos rerum publice in Italia
" administrandarum potestas est aut potius rerum ecclesiasti-
" carum per fas nefasque auferendarum summa, cum reliquis
" ecclesiae Cathedralis Utinensis cimeliis dedendis codicem quoque
" Juliani petituri sint a capitulo, Teque suspensum cogitatione
" quid futurum sit magnam animo molestiam cepisse quae (3)
" valde me dolet. Attamen bono animo sis, Vir summe reve-
" rende, adhuc codex intra manus est meas, rescindi igitur
" contractus potest. Nunquam enim librum novum bibliothecae
" meae adieci, quem non bona fide a me acquisitum fuisse exi-
" stimaverim; *jam vero, an idem, postquam accurate et repetita*
" *vice epistolam Tuam legi, de codice Juliani contendere possim,*
" *dubitare coepi*. Quae cum ita sint, non obloquor, si codicem
" restitui cupias, modo res agatur, uti inter bonos agier oportet.
" Itaque meum igitur consilium hoc est, ut mihi pretium, quod
" solvi, restituas. Ipse scripsisti: Bonum mihi, quod denariorum

---

(1) L'Helssig stampa *reservari*.

(2) Vedi sopra pag. 749-750.

(3) L'Helssig vuol aggiungere un *res*, che non è per nulla necessario.

“ Tuorum depositum a me receptum — intactum reservavi, Tibi
“ remittendum; equidem vero solemniter promitto, me pretio
“ restituto confestim codicem per cursum publicum remissurum
“ esse; nec dubites quaeso de mea fide *etc.* „.

L'Helssig dà all'Haenel le più ampie lodi per questa lettera; ma, in sostanza, l'Haenel era disposto a fare ciò che qualunque altro avrebbe fatto al suo posto, poichè la restituzione volontaria appariva come l'unico mezzo per evitare la restituzione forzata, accompagnata da danno e vergogna.

La vendita, indipendentemente da qualsiasi altra considerazione, era evidentemente nulla, perchè mancava nel venditore la capacità d'alienare: il trafugamento del codice esponeva per sè solo ad un'azione penale, nella quale l'Haenel avrebbe potuto assai facilmente esser coinvolto come mandante o complice.

Sarebbe poi far ingiuria gratuita ai giudici di Lipsia supporre possibile, che essi non avessero immediatamente accolta l'azione di rivendicazione che fosse stata intentata nel 1871 contro l'Haenel, anche semplicemente in base all'art. 434 del nostro Codice civile.

C'era dunque poco da fare: restituire il codice e ringraziar Dio di non dover rimettere anche il prezzo.

Prendiamo intanto nota della dichiarazione dell'Haenel, che aveva cominciato a dubitare di poter in buona fede far entrare il codice udinese nella sua biblioteca. Disgraziatamente, collo scomparire del pericolo d'intervento dell'autorità italiana scomparvero anche gli onesti dubbi di Gustavo Haenel.

La dolorosa istoria si chiude con una lettera del 7 febbraio 1871, nella quale il Banchieri annunzia che s'era pensato di non recedere dalla vendita, e di sostenere eventualmente che il codice era stato venduto per urgenti bisogni della Chiesa (1). Forse si pensò, nascondendo la data della vendita, di farla credere anteriore all'annessione e quindi all'introduzione del nostro Codice civile: oppure parve opportuno far eventualmente atto di protesta, contrapponendo alle leggi italiane il diritto cano-

(1) “ Ubi vero urgeat praesentia Turni bona quoque mobilia nostra
“ expoliantis, respondebimus cum Salviano, ad sublevandos Christi pauperes
“ vasa quoque aurea et argentea divendere licuisse semper et licere „
(L'Helssig stampa *turni*, colla minuscola. Si tratta d'una reminiscenza Virgiliana, *Eneide*, IX, 73 “ *urget praesentia Turni* „).

nico e le sentenze dei Santi Padri. Comunque sia, era evidente che l'Haenel si trovava nell'assoluta necessità di non divulgare l'acquisto fatto del codice udinese, e specialmente di tenerne nascosta la data e le modalità. Perciò egli nell'edizione dell'*Epitome* di Giuliano, pubblicata nel 1873, afferma che il codice appartiene ai canonici di Udine; perciò l'acquisto fattone dall'Haenel è taciuto ancora nell'edizione del codice di Giustiniano pubblicata dal Krüger nel 1877, affermando il Krüger d'avere nel 1875, “ *beneficio G. Haenelii* „, usato in Lipsia il *codice della biblioteca capitolare d'Udine*; perciò, ancora nel 1894, il Kroll potè credere che il manoscritto appartenesse sempre alla chiesa d'Udine.

Che cosa si ricava da tutto questo? Evidentemente, che il possesso dell'Haenel, oltre ad esser viziato per la sua origine, fu sempre clandestino; e questo sarebbe bastato, indipendentemente da ogni altra ragione, per impedire che egli usucapisse il codice, anche se avesse vissuto gli anni di Matusalem.

L'Helssig (pag. 110) crede di dovermi far sapere che il Codice sassone del 1865 ammette, per le cose mobili, l'usucapione triennale, e domanda poi se io sia rimasto all'antico: “ adversus hostes aeterna auctoritas esto „. Ma egli ha scelto male il testo. Lasci stare gli *hostes*: cerchi invece i passi che concernono i possessori di mala fede e il possesso clandestino, esamini bene la fattispecie e si convincerà che, nella miglior ipotesi, di possesso *ad usucapionem* non si può parlare se non dal momento, in cui il codice udinese entrò nella biblioteca di Lipsia; e che perciò, almeno durante i primi tre anni dopo la morte dell'Haenel, esisteva incontestabilmente il diritto di rivendicazione da parte dell'Italia.

Ma qui sorge una questione, alla quale accennò già prudentemente il Boselli affermando “ che qualche buona ragione “ giuridica si potrebbe additare [*per la rivendicazione del codice* “ *udinese*] se non riuscisse malagevole l'esperirla in paese stra- “ niero, per le peculiari circostanze del caso „.

Il Governo italiano ha certo gravi colpe per ciò che riguarda la conservazione degli archivi e delle biblioteche ecclesiastiche in genere (1) e del codice udinese in ispecie. Non esercitò la

(1) Non voglio tacere che l'opera del Governo, pur sempre necessaria, fu ora in parte prevenuta e resa meno urgente dalle sapienti norme sulla

dovuta sorveglianza, non fece compilare gl'inventari, non pensò a rivendicare il codice udinese, per via diplomatica o per via giudiziaria, quando, nel 1892, iniziato il procedimento penale, si dovette lasciarlo cadere per essere i principali colpevoli già morti. Ma queste colpe, che l'Helssig in parte ci rinfaccia, possono esser invocate dagli attuali possessori del codice? Hanno esse prodotto un effetto giuridico qualunque?

Evidentemente sì, se la biblioteca di Lipsia ha potuto, dopo la morte d'Haenel, usucapire il codice. Ma perchè ciò avvenisse, sarebbe stata necessaria una buona fede iniziale, la quale (sia detto senz'offesa) non potrebbe non recare qualche meraviglia. Il codice udinese era noto a tutti gli studiosi, e tutti sapevano che apparteneva alla chiesa di Udine. Lo aveva del resto dichiarato l'Haenel anche posteriormente al preteso illegale e immorale acquisto, sul quale le carte Haeneliane, passate alla biblioteca di Lipsia, mettevano i bibliotecari in grado di sapere e giudicare.

C'è dunque colpa solo da parte del Governo italiano? Non si dovrebbe, fra istituti pubblici e nazioni civili, pretendere un trattamento reciproco, che s'ispirasse un po' più all'equità e un po' meno a cavilli giuridici e eventualmente a quel *summum ius*, che è spesso *summa iniuria*? E anche rimanendo nel campo dello stretto diritto, non deve forse il codice udinese (per la sua notorietà, se non per l'importanza) esser posto in quella categoria di codici e oggetti d'arte e d'antichità, pei quali non dovrebbe esser lecito invocare la buona fede e parlare di prescrizione?

Se infatti, per un caso disgraziato, il *Virgilio* Vaticano o il manoscritto fiorentino delle *Pandette* fossero alienati da custodi infedeli, e ricomparissero, anche dopo molti anni, in una pubblica biblioteca, qual giudice oserebbe sentenziare ammissibile l'ignoranza dei bibliotecari? Se la *Gioconda* fosse, tra qualche anno, lasciata in legato ad una pubblica Galleria, qual direttore,

---

custodia e conservazione degli archivi ecclesiastici pubblicate per ordine o per ispirazione di Leone XIII, tanto benemerito degli studi e della cultura del clero. Ricordo specialmente come degna, per ogni riguardo, delle più ampie lodi la *Forma di regolamento per la custodia e l'uso degli archivi e delle biblioteche ecclesiastiche* stampata a Roma, dalla Tipografia Vaticana, nel 1902.

qual Governo civile oserebbe chiedere conto alla Francia della insufficiente custodia, o esigere da lei la prova che il quadro fu rubato e non smarrito o venduto o ceduto per errore o pazzia di custodi? Chi vorrebbe scartabellare codici e opere di giureconsulti per provare il buon diritto del benemerito testatore e, difendendone l'onore, salvarsi anche dall'obbligo della restituzione?

È quasi superfluo osservare, che confrontando il manoscritto udinese col *Virgilio* Vaticano o colle *Pandette* fiorentine o addirittura colla *Gioconda*, non mi riferisco punto al pregio e tanto meno al prezzo commerciale, elementi che nella fattispecie sono giuridicamente insignificanti; poichè il vero punto della questione sta nella notorietà, che esclude la buona fede del possesso, o per lo meno ne fa dubitare.

C'è ancora un'osservazione e una domanda del dott. Helssig, che non si può passar sotto silenzio, ma sulla quale è pur bene non insistere troppo.

L'Helssig osserva che tutti possono studiare il codice udinese a tutto loro agio nella biblioteca di Lipsia, dove la possibilità di usarlo per scopi scientifici è curata *per lo meno quanto* lo sarebbe in una biblioteca italiana (1): e crede che ciò lo autorizzi a chiedere, perchè se ne faccia in Italia tanto chiasso: " Wozu also jetzt, so darf man fragen, der ganze Lärm? „.

Alla domanda aveva risposto, in anticipazione, l'on. Rava alla Camera dei Deputati: " Per la coltura (*il codice*) non è " perduto; sta bene; ma non è più italiano; e non è più a casa " nostra, ed è cosa nostra „.

Gli Italiani non potranno dunque non meravigliarsi dell'ingenua meraviglia del dott. Helssig, ed eventualmente pregarlo di leggere, o rileggere, l'opera d'un suo connazionale, intitolata *La lotta per il diritto*: " *Der Kampf um's Recht* „.

---

(1) " Kurz, für die Möglichkeit wissenschaftlicher Ausnutzung des Codex " ist hier mindestens ebenso vollständig gesorgt, als der Fall sein würde " wenn der Codex dem Archiv in Udine entführt worden wäre, um einer " italienischen Staatsbibliothek einverleibt zu werden. Wozu also jetzt, so " darf man fragen, der ganze Lärm? „ (pag. 110).

Relazione intorno al lavoro del Dr. Francesco Cognasso, intitolato: *Partiti politici e lotte politiche in Bisanzio alla morte di Manuele Comneno.*

In questi anni l'attenzione degli storici occidentali si rivolge assai volentieri all'Oriente Bizantino, la cui storia così intimamente si intreccia colla nostra. Il Dr. Cognasso studiò un periodo, non lungo, ma notevole, perchè caratteristico, sì per la politica interna che per la politica esterna.

Dalla nascita di Alessio II, 1171, figlio di Manuele Comneno, e dalla sua ascesa al trono mentre era appena dodicenne, 1183, fino alla morte di Andronico figlio di Isacco Comneno, 1185, la storia dell'impero bizantino non è che la narrazione di lotte, di congiure, di tumulti, di delitti: tutti questi fatti acquistano importanza per noi, specialmente per questo che gli interessi dell'Occidente vi sono compromessi.

Il Cognasso parla di quanto toccò ai Veneziani e ai loro commerci in Bisanzio. La conclusione è che i Bizantini trattavano ingiustamente i Latini in gravissime circostanze. Ma sulla fine di questo periodo le relazioni divennero ostili addirittura, specialmente coi Normanni, al tempo di Guglielmo II di Sicilia.

Il ricordo dell'antico splendore anima ancora, anche in questi dolorosi periodi, la vita Bizantina; ma la luce che di là sprizza non serve quasi ad altro che ad illuminare di tinta sanguigna, tragici fatti. Lo si sente nell'aria, ci accostiamo alla IV Crociata. La morte tragica di Andronico profetizza il futuro.

La Memoria del Cognasso è scritta eruditamente e condotta sempre sulle fonti. Al parere dei sottoscritti questo lavoro, per il suo contenuto come per il suo interesse critico, merita di esser letto alla Classe.

G. De Sanctis,
C. Cipolla, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLVII, Disp. **13ª**. **1911-1912**.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 12 Maggio 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO SENATORE PROF. LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, SALVADORI, D'OVIDIO, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, FILETI, PARONA, MATTIROLO, SOMIGLIANA, FUSARI, BALBIANO e SEGRE Segretario. — Scusa l'assenza il Socio GRASSI.

Si legge e si approva il verbale dell'adunanza precedente.

La Société royale de Botanique de Belgique invita l'Accademia a farsi rappresentare alle feste pel cinquantesimo anniversario della sua fondazione (22-27 giugno 1912).

Sono giunti in omaggio i seguenti opuscoli: *Die Erfahrungsgrundlagen der Lehre vom allgemeinen Gleichgewichtszustande der Massen der Erdkruste,* del Socio straniero HELMERT; *Sulle valli sommerse del Golfo Ligure,* del Socio corrispondente TARAMELLI.

Pure in omaggio vengono presentate, dai rispettivi Autori:

MATTIROLO, *Nuova Stazione sarda del " Colus hirudinosus „* Caval. e Séch.;

GUARESCHI, *Discorso inaugurale del II Congresso nazionale di Chimica applicata*; e *Biografia di Carlo Guglielmo Scheele*;

e dal Socio FOÀ il volume dei *Lavori dell'Istituto di Anatomia patologica dell'Università di Torino,* da lui diretto, anni 1909-1911.

Il Socio PARONA legge la *Commemorazione di Giorgio Spezia.* Essa verrà inserita nel volume delle *Memorie.*

Vengono accolte per gli *Atti* le Note:

G. Colonnetti, *Sulle deformazioni elastiche delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro*, presentata dal Socio Guidi;

A. Roccati, *Ricerche lito-mineralogiche sopra alcuni pozzi profondi della pianura padana. I. Pozzo di Alessandria*, presentata dal Socio Parona.

Il Socio Mattirolo ha ritirato, per farvi alcune aggiunte, il lavoro *Jaczewskia* da lui presentato nell'adunanza precedente per la stampa negli *Atti*; e chiede ora che sia invece pubblicato fra le *Memorie*. La Classe con voto unanime si dichiara favorevole.

E pure ad unanimità essa accoglie, pel volume delle *Memorie*, il lavoro offerto dal Socio Jadanza, *Determinazione geodetica di alcuni punti nella Valle del Sangone*.

Infine il Socio Fusari presenta la Memoria di Luigi Mejneri, *Sui muscoli dorsali del piede*. Vengono incaricati di riferire su di essa i Soci Camerano e Fusari.

Raccoltasi quindi la Classe in seduta privata procede alla nomina di un Socio delegato dalla Classe presso il Consiglio di Amministrazione e riesce rieletto per un nuovo triennio il Socio Salvadori.

LETTURE

Sulle deformazioni elastiche delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro.

Nota del Dott. Ing. GUSTAVO COLONNETTI.

(Con una Tavola).

Il problema delle deformazioni elastiche dei tubi di grande diametro resistenti a pressione idraulica variabile, sul quale hanno attirata l'attenzione degli studiosi e dei tecnici i noti fenomeni di schiacciamento che accompagnano ogni operazione di riempimento e di vuotamento delle condotte forzate, e del quale si è recentissimamente occupato con successo il Prof. C. Guidi in questi medesimi *Atti* (*), mi dà occasione ad esporre alcune brevi e semplicissime considerazioni sulla possibilità di dedurre per via grafica dal diagramma di influenza di una qualsiasi caratteristica della deformazione la legge secondo la quale quella medesima caratteristica varia al variare dell'altezza di carico disponibile.

Supporrò, per ragioni ovvie, che il problema possa ridursi in due sole dimensioni, e riterrò (come è d'uso nelle applicazioni) le forze di massa trascurabili a fronte delle pressioni in superficie, senza escludere del resto la possibilità di apprezzare a parte, volendolo, l'effetto di coteste forze.

Detto P un punto generico del contorno s dell'area piana che rappresenta, in disegno, il sistema elastico dato, indicherò con p l' intensità della pressione agente in P normalmente al contorno stesso.

Denoterò poi con η l'influenza della pressione stessa sulla funzione da studiarsi, cioè il valore che tale funzione assume-

(*) *Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro*, adunanza del 28 aprile 1912.

rebbe per effetto di una pressione unitaria applicata in P normalmente ad s, limitandomi a rilevare che questo valore può sempre considerarsi come la misura dello spostamento che il punto P subirebbe in direzione normale al contorno s in una conveniente deformazione ideale del sistema (*).

Il valore effettivamente spettante alla funzione cercata può, nelle ipotesi fatte, porsi in ogni caso sotto la forma:

$$\int \eta \, . \, p\, ds$$

l'integrale intendendosi esteso, in generale, all'intiero contorno.

Ma nel caso particolare della pressione idraulica tale contorno si presenta, d'ordinario, spontaneamente composto di due parti fra loro ben distinte, sull' una delle quali la pressione è ovunque nulla, mentre che sull'altra la pressione varia proporzionalmente alla distanza dell'elemento generico, su cui si esercita, da una certa retta orizzontale del piano, linea reale od ideale di pelo libero.

Detta pertanto y la profondità del punto generico P del contorno sotto l'accennata orizzontale di pelo libero, il valore sopra enunciato della nostra funzione può anche scriversi, a meno di un fattor costante che, riferendoci al caso dell'acqua, assumeremo eguale all'unità:

$$\int \eta \, . \, y\, ds$$

l'integrale dovendosi questa volta intendere esteso alla sola seconda parte del contorno, parte che vien di solito brevemente designata col nome di contorno bagnato.

Ma questo integrale può ovviamente essere interpretato come il momento statico, rispetto alla orizzontale di pelo libero, del contorno bagnato, quando lungo di esso si immagini distribuita una massa la cui intensità in ogni punto come P sia misurata dal corrispondente valore di η.

Rappresentate pertanto le masse elementari $\eta\, ds$ con opportune forze orizzontali, e collegate tali forze fittizie, ordinatamente ed a partire dal basso, con un poligono funicolare,

(*) G. Colonnetti, *Sul principio di reciprocità*, “ Rendiconti della R. Accademia dei Lincei „, Serie 5ª, vol. XXI (1° semestre 1912), pag. 393.

riesce agevole dimostrare, in base ai più noti ed elementari procedimenti del calcolo grafico, che il valore che la funzione proposta assume per una data posizione della orizzontale di pelo libero è misurato, in una base di riduzione nota, dal segmento intercetto sulla orizzontale stessa fra il detto poligono ed il primo suo lato.

Tale poligono può adunque senz'altro riguardarsi come la espressione grafica della legge di variazione della proposta caratteristica della deformazione in funzione dell'altezza del pelo libero.

Un'applicazione del procedimento esposto allo studio di quel fenomeno di schiacciamento a cui accennavo da principio trovasi riprodotta, almeno nei suoi tratti essenziali, nell' unita tavola. In essa il tubo cilindrico a sezione retta circolare, di diametro abbastanza grande, a fronte dello spessore costante delle pareti, perchè si possa legittimamente prescindere dalla influenza della curvatura sulla distribuzione delle tensioni elastiche interne, venne per semplicità supposto semplicemente appoggiato su di un suolo piano, orizzontale ed incomprensibile.

Nella porzione sinistra della figura venne tracciata la deformata della sezione retta del tubo relativa ad una sollecitazione ideale $F=1$ agente secondo il diametro verticale (0)-(12). Gli spostamenti dei singoli punti del contorno dato, misurati radialmente, vennero, in virtù del principio di reciprocità, interpretati come spostamenti verticali del vertice (12), prodotti da forze unitarie applicate radialmente nei punti stessi. Da essi venne pertanto dedotto, sotto forma di poligono funicolare, il diagramma degli abbassamenti del vertice (12) che occupa la parte destra della figura; diagramma il quale determina, in una scala conveniente, per ogni posizione mn della linea di pelo libero del liquido pesante che occupa il tubo, il valore uv dell'abbassamento corrispondente del punto (12).

Esso rende conto con espressiva semplicità del progressivo decremento che si produce nel diametro verticale (0)-(12) per l'innalzarsi del livello dell'acqua nel tubo, e mostra come lo schiacciamento raggiunga il massimo suo valore quando l'acqua sta per riempire completamente il tubo, e decresca poi assai lentamente al crescere ulteriore del battente disponibile. Nell'esempio trattato il detto diametro verticale non può riacqui-

stare la sua primitiva lunghezza se non per un'altezza di carico di oltre 25 diametri.

Pur non volendo pertanto annettere alla figura che un significato puramente dimostrativo, sembra lecito indurre da essa una completa conferma delle considerazioni che, sull'andamento del fenomeno in questione, erano state svolte dal prof. C. Guidi nella citata sua Nota.

Genova, Maggio 1912.

Ricerche lito-mineralogiche sopra alcuni pozzi profondi della pianura padana.

I. *Pozzo di Alessandria.*

Nota di ALESSANDRO ROCCATI.

In questi ultimi anni il Museo Geo-Mineralogico del R° Politecnico di Torino si è venuto arricchendo di numerose serie (oltre un centinaio) di campioni dei materiali estratti nelle trivellazioni, che, a scopo specialmente di ricerca di acqua potabile, furono praticate, spingendosi anche a notevole profondità, in molteplici punti della pianura padana.

Di queste trivellazioni già si è occupato il Prof. F. Sacco, però sotto l'aspetto essenzialmente geo-idrologico, facendo rilevare l'importanza dei materiali di terebrazione per la conoscenza geologica dei depositi profondi, ancora molto imperfetta, e della idrologia sotterranea, dedicandovi un lungo e minuto studio (1), in cui gran copia di dati vengono portati all'argomento già da lui trattato nel 1900 con la sua Memoria *La Valle padana* (2).

Ora io ho creduto interessante, quasi a complemento del lavoro del Prof. Sacco, di intraprendere ricerche lito-mineralogiche sopra queste alluvioni profonde, almeno per i pozzi principali e dei quali esiste nel nostro Museo maggior quantità di materiale, poichè, come già ben giustamente fece osservare

---

(1) *Geo-idrologia dei pozzi profondi della Valle Padana*, " Annali R. Acc. Agricol. di Torino ", vol. LIV, 1912.

(2) " Annali R. Acc. Agricol. di Torino ", 1900.

l'Artini (1), è grande il concorso che può essere così offerto dalla Mineralogia alla Geologia, specialmente come contribuzione all'argomento della provenienza di questi materiali alluvionali e per conseguenza, nel caso nostro, alla conoscenza dell'andamento degli antichi corsi d'acqua della regione padana, conoscenza che può pure avere utilità per opportuni confronti con l'andamento dei corsi attuali.

Del resto con questo intendimento i materiali profondi della pianura padana già furono oggetto di studio per parte di parecchi autori: Artini, Baratta, Chelussi, Mariani, Pantanelli, Squinabol, Stella, Taramelli, ecc. ed io pure vi concorsi lo scorso anno con la mia Nota sul *Pozzo trivellato di Carmagnola* (2).

Nell'iniziare le ricerche, che mi propongo di proseguire con successivi lavori, mi trovava ad avere un vero imbarazzo di scelta, tanto sono numerose, ripeto, le serie che furono raccolte nel Museo del Politecnico; ho creduto però bene di incominciare dal pozzo di Alessandria non soltanto perchè fu uno di quelli spinti a maggior profondità, ma anche perchè si è quello di cui finora, per circostanze speciali, ci fu fornita maggior copia di sostanza; basti dire che la serie comprende abbondantissimo materiale raccolto ad ogni metro di profondità.

Il pozzo di Alessandria, che fu già argomento di una breve Nota del Prof. F. Sacco nel 1898 (3), fu trivellato dalla Ditta Bonariva di Bologna per incarico del Municipio della città, tra gli anni 1895 e 1898, allo scopo di risolvere il grave problema dell'alimentazione idrica del Comune.

Il risultato fu però negativo, poichè si spinse la terebrazione fin ad oltre 200 metri senza incontrare acqua che risponpesse allo scopo; si cessò quindi la perforazione, tanto più che si era arrivato alle marne argillose del Pliocene superiore (*Villafranchiano*), che si sarebbe dovuto oltrepassare per aver probabilità di trovare acqua nei terreni del Pliocene inferiore o *Placenziano*.

---

(1) *Intorno alla composizione mineralogica delle sabbie di alcuni fiumi del Veneto, con applicazioni della ricerca microscopica allo studio dei terreni di trasporto*, " Riv. It. di Min. e Cristallog. ", vol. XIX, 1898.

(2) " Riv. di Ingegneria Sanitaria ", 1911.

(3) *Il pozzo trivellato di Alessandria*, Torino, Gerbone, 1898.

Infatti dopo aver incontrato l'acqua al solito livello dei pozzi di Alessandria, cioè a circa 7 metri sotto il suolo, si attraversarono circa 100 metri di terreni poco o niente acquiferi per arrivare ad una falda alquanto abbondante, che per due giorni fece alzare il livello dell'acqua nel pozzo a m. 3,90 sotto il piano di campagna; ma in seguito il livello tornò ad abbassarsi sino a raggiungere la solita quota. Economicamente parlando la trivellazione di Alessandria non ha quindi raggiunto lo scopo, ma, come opportunamente rileva il Sacco (1), essa non mancò di notevole interesse dal lato scientifico.

Il materiale dei differenti livelli fu sempre da me sottoposto ai seguenti trattamenti:

1° Levigazioni e decantazioni ripetute, per asportare le parti argillose e terrose.

2° Separazione con la calamita dei minerali magnetici.

3° Trattamento prima con acido cloridrico molto diluito e poscia con lo stesso acido concentrato, per la ricerca dei carbonati e loro determinazione.

4° Trattamento con acido nitrico, per la ricerca dell'acido fosforico.

5° Trattamento con acido fluoridrico, per la separazione dei minerali, generalmente poco abbondanti, resistenti all'azione di tale acido, quali zircone, rutilo, tormalina, granato, ecc. (2).

6° Arricchimento della sabbia nei suoi minerali più densi, valendomi di liquidi pesanti e più particolarmente di quelli di Thoulet e di Klein.

Per i feldspati, in mancanza di altri caratteri, la distinzione fu effettuata non solo in base al peso specifico mediante i liquidi densi, ma anche in base all'indice di rifrazione, adoperando all'uopo il balsamo del Canadà e, seguendo il suggeri-

---

(1) *Il pozzo trivellato*, ecc., loc. cit.

(2) Faccio rilevare qui il fatto già indicato in altro lavoro consimile (*Ricerche Mineralogiche sulla sabbia della Grotta del Bandito*, " Boll. Soc. Geol. It. ", 1901) che nel trattamento delle sabbie con acido fluoridrico il granato resta per lo più inalterato, il che ritengo dovuto alla presenza nel materiale di gran quantità di altri minerali (specialmente quarzo) più facilmente decomponibili.

mento di Artini (1) e di Salmoiraghi (2), l'essenza di garofano, che permette abbastanza facilmente la distinzione del quarzo, dell'ortosio e dei plagioclasi acidi dai plagioclasi basici.

Per i ciottoli e le ghiaie, quand'era necessario, furono fatti preparati microscopici allo scopo di determinarne l'esatta natura litologica.

L'abbondanza del materiale mi permise pure di non limitare le mie ricerche ai semplici livelli in cui il campione era rappresentato da sabbia o ghiaia, ma di estenderle anche a quelli, e sono i prevalenti, in cui la trivellazione aveva incontrato marne ed argille.

Sottoponendo questi materiali argillosi e marnosi all'azione dell'acido cloridrico diluito ed a ripetute levigazioni e decantazioni ho potuto riconoscere in essi la presenza di più o meno abbondanti minerali e di avanzi fossili, gli uni e gli altri sovente caratteristici, giungendo così a risultati interessanti sia dal lato mineralogico che paleontologico.

***

Metri 0-2.

Terriccio vegetale.

Metri 2-4.

Sabbia marnosa-terrosa, di color grigio-giallognolo, contenente frequenti grumi grigiastri di natura marnosa, il cui diametro raggiunge 3-4 cm.

Il materiale trattato con acido cloridrico dà forte effervescenza e dalla soluzione precipita poi alquanto ferro, abbondante calce e poca magnesia; si ottiene distintamente la reazione dell'acido fosforico.

Mediante ripetute levigazioni si separa tutta la parte argillosa, la quale, unita ad abbondanti e minutissimi frustuli di *mica* bianca, costituisce una buona metà del materiale; la parte rimanente è rappresentata da sabbia finissima (diametro medio dei granuli $^1/_2$ mm.) associata a ghiaiette (diametro 2-3 mm.) ed a ciottolini, il cui diametro arriva ad 1 cm.

---

(1) Loc. cit.

(2) *Sullo studio mineralogico delle sabbie e sopra un modo di rappresentarne i risultati*, " Atti Soc. It. Sc. Nat. ", vol. XLIII, 1904.

La sabbia liberata dalla parte argillosa è giallognola; trattata con acido cloridrico diventa grigia e nel trattamento si ha forte effervescenza, con separazione di argilla, che proviene da granuli di *calcare argilloso*. Dalla soluzione precipitano poi abbondantemente ferro e calce, pochissima magnesia; il saggio dell'ac. fosforico è negativo.

I ciottolini e le ghiaiette hanno sempre abito di materiale fortemente fluitato; sono o di *quarzo* (ialino, latteo e giallognolo) o di *serpentino*, con due varietà destinate a ritrovarsi, si può dire, in tutto il materiale del pozzo: una verde scura-nera, l'altra verde chiara subtrasparente.

Anche i componenti della sabbia dimostrano di aver subìto una prolungata fluitazione; fanno eccezione pochi minerali, alcuni dei quali si ritrovano con gli stessi caratteri fino in fondo alla trivellazione, e che hanno una freschezza contrastante affatto con il rimanente del materiale. Sono cioè piccoli cristalli completi o frammenti brecciati o piccoli solidi di sfaldatura.

I componenti della sabbia, oltre agli abbondanti granuli di *calcare argilloso* già indicati, disposti per ordine di frequenza sono:

Quarzo: ialino (prevalente), bianco latteo, rossastro, giallognolo, verde chiaro.

Serpentino, con parecchie varietà riguardo alla tinta ed alla struttura e che rivelano quindi la provenienza da diversi tipi di roccie: compatto, nero, a tipo alpino; verde chiaro, subtrasparente; verde giallognolo; scaglioso, proveniente da serpentinoschisto; fibroso. Nel serpentino è sempre caratteristica l'abbondanza della magnetite, per cui molti granuli sono attirati dalla calamita.

Miche: *Biotite* e *Muscovite*. Prevalente in modo assoluto è la muscovite, in esili laminette perlacee, incolori, ben distinte, oppure in lamine maggiori più irregolari, con i margini sfrangiati e frequentemente con il color giallo oro, dovuto ad incipiente alterazione, così comune nella muscovite delle sabbie, ma che però scompare del tutto nel trattamento con HCl. Alcune lamine contengono inclusioni aghiformi di *rutilo*, altre di *magnetite*.

Nel residuo della parte di materiale trattato con HFl trovai poche lamine di una mica incolora, perfettamente conservata,

in cui, oltre alla resistenza all'azione dell'acido, è notevole il comportamento come di minerale uniasse od almeno ad angolo degli assi ottici molto piccolo.

Feldspato. Fra i feldspati, abbondanti sia come *ortosio* che come *plagioclasi* (acidi e basici), è interessante la presenza di *albite*, in piccoli cristalli incolori, limpidi, senza traccia di corrosione o fluitazione; presentano ampio sviluppo della faccia 010, associata al prisma 110 e traccie di sfaldatura 001.

La freschezza di questi piccoli cristalli m'induce a credere che fossero inizialmente inclusi in qualche calcare e che quindi non abbiano subìto fluitazione, essendo stati messi in libertà semplicemente dalla scomparsa del frammento di roccia includente.

Magnetite, in granuli o piccoli cristalli 111 perfetti; la frequenza del minerale è evidentemente in relazione con l'abbondanza del serpentino.

Anfiboli: *Tremolite, Attinoto, Glaucofane, Orneblenda.*

L'anfibolo è o in grani (*orneblenda*) o in masserelle fibrose (*tremolite*), oppure in frammenti di cristalli (*orneblenda*, *attinoto* e *glaucofane*), con faccie di sfaldatura ben visibili.

Nella sabbia arricchita con il liquido di Thoulet sono abbastanza comuni piccoli solidi di sfaldatura di *attinoto*; sono limpidi, trasparenti, con color verde più o meno carico (talora tendente al verde smeraldo). Vi sono individui dalle faccie splendenti, altri con le faccie striate longitudinalmente secondo l'allungamento per la sfaldatura 110; talvolta con accenno a divisione 001.

Con forme analoghe a quelle dell'attinoto, ma più raro, è un anfibolo incoloro con estinzione $= 15^{\circ}$ e che potrebbe essere quindi *tremolite* od *edenite*.

La presenza di questi anfiboli non rotolati, parecchi dei quali si ritrovano costantemente a tutti i livelli della trivellazione sino al fondo, ritengo possa provenire dall'essere stati inclusi in roccie calcaree, oppure dal disfacimento, durante la fluitazione, di ciottoli e ghiaie di roccie anfiboliche, che vedremo sovente presenti; la glaucofane deve derivare in buona parte dal disfacimento di schisti micacei.

Granato, generalmente in grani sferoidali, rosei splendenti, subtrasparenti; più rara è una varietà in grani maggiori, con lucentezza grassa e color rosso bruno.

Non sono rari gli individui in cui è perfetta la forma 110.

Clorite, freschissima, in laminette a contorno più o meno distinto e con viva lucentezza perlacea.

Epidoto, comunemente verde-giallo.

Pirosseno in grani (*augite*) o in frammenti brecciati con faccie distinte (*augite* e *diopside*); *diallagio* e *bronzite*.

Talco, in masserelle o in laminette bianche perlacee.

Tormalina, con due varietà, generalmente in cristalli: una incolora, l'altra bruna, fortemente dicroica; la forma predominante è quella di prismi con terminazioni emimorfiche.

Rutilo e *Zircone*, specialmente comune quest'ultimo in cristallini incolori, prismatici allungati, con terminazione di ottaedri molto acuti.

La presenza dei cristalli perfetti di tormalina, zircone e rutilo può spiegarsi bene ammettendo la loro esistenza, sotto forma di inclusioni, in minerali preesistenti stati disgregati ed alterati.

Pirite, *Pirrotina*, *Cromite*.

Fossili. Rarissimi e rappresentati da frammenti di conchiglie di Molluschi terrestri (*Helix*).

Metri 5-7.

Sabbia ghiaiosa. La parte sabbiosa del materiale (che è ancora mescolato ad abbondante sostanza argillosa) corrisponde a quella sopra descritta, prevalendo ancora assolutamente il *quarzo*. I granuli sono però alquanto maggiori, raggiungendo un diametro medio di circa 1 mm.

Alla sabbia sono associate numerose ghiaiette e ciottolini che arrivano al diametro di fin 2 cm. ed appartengono alle roccie seguenti:

Quarzo ialino o bianco latteo; più di rado rossiccio, giallognolo o violaceo.

Serpentino, con le varietà sopra indicate, essendo comune quella verde erba subtrasparente, ricca in magnetite. In alcuni ciottolini si distinguono lamine di bronzite, che rivelano l'origine metamorfica della roccia.

Serpentinoschisto, ricco in magnetite.

Quarzite micacea a grana più o meno fina; una varietà ha schistosità netta e ricorda la *bargiolina*; un'altra, di color verde

chiaro, corrisponde bene a certe quarziti del Permo-Trias delle Alpi Marittime.

Gneiss minuto a muscovite; *Gneiss a due miche.*

Calcare cristallino, grigio, finamente granulare, corrispondente al tipo molto comune in diversi punti delle formazioni mesozoiche delle Alpi Marittime (dintorni di Cuneo, Mondovì, ecc.).

Argilloschisto metamorfico, verde, del tipo “ Pietra della Roia „, caratteristico quindi del Permo-Trias delle Alpi Marittime.

Talcoschisto con magnetite; *Cloritoschisto*; *Argilloschisto* nero a tipo ardesiaco, corrispondente a quello della regione dei Giovi.

Roccia feldspatica, cataclastica, con clorite (*Appenninite*?).

Anageniti, fra cui il tipo minuto rossastro comune in alcuni punti del Permo-Trias delle Alpi Marittime.

Arenaria minuta, con cemento calcareo, che ricorda i tipi delle formazioni mioceniche delle Langhe.

Anfibolite granatifera; *Microdiorite*; *Prasinite*; *Eufotide.*

Clorite e *Muscovite* in grandi lamine.

Fossili: Frammenti conchigliari di *Helix* e piccole valve di *Lucina.*

Metri 7.

Materiale corrispondente al precedente, ma con la parte ghiaiosa alquanto più abbondante.

Nella sabbia, in cui prevale ancora il *quarzo*, è notevole l'abbondanza della *magnetite* e la presenza (riconosciuta nel residuo dopo trattamento con HFl) di *spinello*, in minuti ottaedri rosei.

Alle roccie già indicate come costituenti la ghiaia sono da aggiungere:

Micaschisto; *Schisto micaceo* con *glaucofane* e *granato*; *Anfiboloschisto*, *Anfibolite* con *epidoto* e *glaucofane.*

Metri 8-12.

Ghiaia costituita da ciottolini del diametro medio di circa 1 cm., alcuni arrivando però fin a 4 e 5 cm.

Alla ghiaia è associata alquanta sabbia corrispondente a quella dei livelli precedenti ed in cui ho notata ancora la presenza dello *spinello* roseo. Tutto il materiale è fortemente inquinato da argilla calcarea.

A costituire la ghiaia entrano le roccie sopra indicate, essendo quindi ancora comuni quelle con glaucofane e granato. Predomina però il *quarzo*, che forma i ciottoli maggiori, mentre il *serpentino*, abbondante, è fra le ghiaiette più piccole.

Nuova roccia osservata a questo livello è *diaspro rosso.*

Metri 13-18.

Ghiaia sabbiosa, con alcuni ciottoli che raggiungono fin 8-10 cm. diametro; altri anzi dovevano avere dimensioni ancora maggiori, poichè si dovettero rompere per procedere innanzi nella trivellazione.

La composizione del materiale (sempre alquanto inquinato da argilla calcarea) è nell'insieme quella del livello precedente, ma predomina il *serpentino*, che forma i ciottoli maggiori; uno di questi contiene grandi lamine di *bronzite.*

La parte sabbiosa è ricca di *granato* e di *glaucofane*; contiene poi abbondante *magnetite*, in rapporto evidentemente con l'aumento delle roccie serpentinose.

Metri 19-23.

Sabbia con ghiaiette, i cui individui normalmente non oltrepassano 1 cm. di diametro, essendo eccezionali quelli che arrivano a 3-4 cm. Il materiale, poco inquinato da argilla, non dà che pochissima effervescenza con HCl, anche concentrato, segno quindi della scarsezza dei carbonati.

La sabbia è essenzialmente costituita da *quarzo* e *serpentino* con molta *magnetite*; negli altri componenti ricorda quella dei livelli precedenti. Diminuiscono però di frequenza i *feldspati* e la *glaucofane*, che diventa alquanto rara, mentre continuano gli altri caratteristici *anfiboli* ed il *granato*. È da ricordare la presenza di *diallagio*, *cianite* azzurrognola, *pirosseno* quasi incoloro con forte dispersione, *crisotilo* in bellissime fibre lunghe fin 2-3 mm. e frammenti, non fluitati, di *quarzo* bipiramidato.

La parte ghiaiosa continua nell'identica composizione, sempre con prevalenza del *serpentino* e del *quarzo.*

Metri 24-27.

Sabbia finissima, di color giallognolo, più o meno inquinata da argilla, con abbondanti ghiaiette e ciottolini, che arrivano fin al diametro di 5-6 cm.

La natura del materiale corrisponde nell'insieme a quella dei livelli superiori; è però notevole la mancanza quasi assoluta di carbonati, non avendosi che debolissima effervescenza nel trattamento con HCl.

Metri 28-29.

Sabbia giallognola, alquanto più grossolana della precedente, con argilla che rappresenta circa metà del materiale.

Si torna ad avere effervescenza alquanto viva, specialmente con HCl concentrato; dalla soluzione precipita notevole quantità di magnesia, il che lascia supporre nella sabbia l'esistenza di granuli non solo calcarei, ma fors'anche di dolomite od almeno di calcare dolomitico. La sabbia continua ad essere costituita, con i *carbonati*, essenzialmente da *quarzo* e *serpentino* con abbondanza di *mica* (*muscovite* e *biotite*), di *clorite* e di *magnetite*; scarsa è invece la *glaucofane*.

Metri 30-35.

Sabbia ghiaiosa, fortemente argillosa-calcarea, con grumi arenaceo-calcarei e ciottolini, che raggiungono anche un diametro di 5-6 cm.

Questo livello sabbioso, a cui, come vedremo, fanno seguito si può dire sino in fondo alla trivellazione depositi essenzialmente argillosi e marnosi, deve rappresentare il limite inferiore dei terreni quaternari, a cui sottostanno le formazioni del Pliocene superiore fluvio-lacustre o *Villafranchiano* (1).

Credo quindi opportuna una descrizione alquanto particolareggiata del materiale di questo livello, poichè ci dimostra come non vi siano differenze sensibili tra la parte più recente e la più antica delle alluvioni quaternarie venute a colmare la primitiva depressione lacustre, come del resto non vi sembrano essere con i materiali pliocenici che vedremo in seguito.

Infatti le ghiaie ed i ciottolini sono sempre in prevalenza costituiti da *quarzo* (ialino o latteo, giallognolo, ecc.); *quarzite* micacea, cloritosa o granulare e *serpentino* con le solite varietà: nera, verde azzurra scura, verde gialla subtrasparente, fibrosa e schistosa. A queste si associano le seguenti roccie: *calcari*

---

(1) F. Sacco, *Geoidrologia dei pozzi profondi della Valle padana*, loc. cit.

(dolomitico, grigio alberesiforme, grigio scuro finamente granulare, nero, arenaceo, ecc.); *gneiss a muscovite* od *a due miche*; *schisto micaceo* con *glaucofane* e *granato*; *anfibolite* con *glaucofane* e *granato*; *anfibolite* con *granato* ed *epidoto*; *epidosite*; *talcoschisto* con *attinoto* o con *magnetite*; *diaspro rosso*; *arenaria minuta rossa*; *prasinite*; *eufotide*.

La parte sabbiosa del materiale può, per le dimensioni dei granuli, distinguersi in tre tipi (che in generale si riscontrano del resto anche agli altri livelli sabbiosi): uno grossolano, meno abbondante, con diam. di mm. $1 \frac{1}{2}$ - 2; medio (diam. circa 1 mm.); fino (diam. meno di 1 mm.). I diversi tipi sono identici in quanto alla costituzione, salvo per la *magnetite*, che è abbondantissima nel tipo fino, mentre invece, il che spiega bene l'origine del minerale, negli altri due tipi sono più particolarmente frammenti serpentinosi che sono attratti dalla calamita, e che devono quindi contenere la magnetite inclusa.

La composizione mineralogica corrisponde perfettamente a quella delle sabbie dei livelli superiori; ho ritrovato i limpidi cristallini di *albite* ed inoltre ho notato l'esistenza di minuti cristalli di *quarzo* bipiramidato, perfettamente terminati alle due estremità, i quali, ritengo, dovevano essere inizialmente inclusi entro a qualche calcare.

Fossili. Il materiale contiene frammenti di *legno silicizzato*, frustuli di *lignite* e frammenti di conchiglie di *Molluschi* terrestri.

Metri 36-43.

Argilla calcarea, in strati alternati di color grigio e grigio-giallognolo, contenente frequenti grumi marnosi e concrezioni di limonite. oppure di carbonato di calcio alquanto magnesifero (*calcarelli*) e che dànno per lo più distintamente la reazione dell'acido fosforico. I *calcarelli* hanno forma più o meno tondeggiante od irregolare e dimensioni variabili da quelle di un grano di miglio a quelle di una noce.

Mediante ripetute levigazioni e decantazioni potei separare dall'argilla alquanta sabbia e parecchie ghiaiette con diametro fin di 4 cm.; eccezionalmente un ciottolo di serpentino, proveniente dalla profondità di 40 m., misurava un diametro di 7 cm. Le ghiaie sono delle seguenti roccie: *Quarzo* e *quarzite micacea*; *serpentino* e *serpentinoschisto*; *calcari* vari (arenaceo, grigio a tipo alberese

con vene spatiche, nero cristallino, bigio dolomitico); *diaspro rosso*; *gneiss a muscovite*; *anfibolite granatifera*; *eufotide*; inoltre lamine di *muscovite* e di *clorite*, larghe fin 3 mm. Della clorite è affatto notevole la freschezza e lo stato di conservazione.

La parte sabbiosa è costituita essenzialmente da *quarzo*, fra cui qualche granulo violaceo, *carbonati, serpentino*, molto subordinato rispetto al quarzo e quasi esclusivamente della varietà verde subtrasparente. Seguono in ordine di frequenza: *Granato, mica bianca* e *verde chiara*, *clorite*, *feldspato*, *attinoto* in frammenti di sfaldatura limpidi e splendenti, *anfibolo* bianco fibroso, *diallagio*, *tormalina* bruna e incolora (quest'ultima perfettamente terminata), *zircone* e *spinello* roseo; la *magnetite* è alquanto scarsa.

Fossili. Frammenti ed opercoli di *Molluschi* continentali.

Levigando e decantando il materiale argilloso della quota 35 m. trovai la prima di un certo numero di sferette metalliche, la cui esistenza verificai in seguito, essenzialmente nei livelli argillosi, sino in fondo alla trivellazione.

Si tratta di sferette, alcune perfette di forma, altre alquanto bitorzolute o mamillonate, di color nero o giallognolo per alterazione esterna, con superficie liscia e lucente o rugosa come di materiale fuso, parecchie allungate in un piccolo collo; internamente cave o ripiene. Le loro dimensioni vanno da mm. 0,2 fino a mm. 1-1 $^1/_2$; alcune sono fortemente magnetiche, altre no; tutte sono solubili nell'acido cloridrico a caldo e nell'acido nitrico e dànno le reazioni del ferro.

Non sapendo darmi ragione dell'esistenza di queste curiose sferette, pensai che potessero essere di origine cosmica, analogamente a quelle che s' incontrano nei sedimenti attuali di mari profondi (1), o come quelle che furono riscontrate in formazioni sedimentarie di varia età geologica (2). Tuttavia il fatto

(1) *Report on the Scientific results of the voyage of H. M. S. Challenger during the years 1873-1876. Deep sea deposits*, Londra, 1891. — L. W. Collet, *Les Dépôts marins*, " Bibl. d'Océanographie physique ", Paris, Doin, 1908.

(2) G. Tissandier, *Sur l'existence de corpuscules ferrugineux et magnétiques dans les poussières atmosphériques*, " C. R. de l'Acad. Sc. ", Paris, 1875, 81, 2° sem. — S. Meunier et G. Tissandier, *Présence de sphérules magnétiques analogues à ceux des poussières atmosphériques dans des roches appartenant aux anciennes périodes géologiques*, " C. R. ", 1878, 1° sem.

che queste sferette di origine meteorica, per quanto analoghe, seppur non identiche di forma, hanno sempre dimensioni molto minori (ad esempio mm. 0,0007 a 0,020 per quelle osservate nel materiale del pozzo di Grenelle) e contengono sempre nichelio (1), mentre quelle del pozzo di Alessandria mi davano risultati negativi a quel riguardo, mi lasciava dubbioso.

In queste condizioni d'incertezza credetti bene di inviare una parte del materiale al Prof. F. Berwerth di Vienna, la cui competenza in materia è a tutti nota, perchè lo volesse esaminare e darmi il suo autorevole giudizio.

Il Prof. Berwerth, che sento il dovere di ringraziare sentitamente, dopo esame delle sferette, mi rispose che la sua opinione è per l'esclusione assoluta che si tratti di materiale di origine cosmica. Credo quindi che si possa ammettere (ed è questo pure il pensiero del Prof. Berwerth) che l'origine delle sferette debba ricercarsi nella fusione di particelle di ferro al momento della lavorazione ad alta temperatura delle lamiere che si impiegano nella preparazione dei tubi. Tali particelle restate aderenti alle pareti interne dei tubi stessi sarebbero state staccate dallo sfregare della trivella durante la perforazione del suolo, cadendo quindi nel materiale da questo estratto.

Ad ogni modo ho ritenuto conveniente il menzionare l'esistenza di queste sferette, che non ho ritrovato in nessuno dei molti materiali di terebrazione studiati.

Metri 44-49.

Sabbia argillosa-calcarea giallognola, ricca in *calcarelli*, analoghi a quelli del livello precedente, ed in ghiaiette del diametro medio di $^1/_2$ cm., con pochi ciottoli che arrivano al diam. di 4-5 cm.

Ghiaiette e ciottoli sono costituite al solito prevalentemente di *quarzo* (ialino, latteo, roseo, giallognolo, violaceo), *quarzite micacea*, *quarzite* granulare, *quarzo* con *clorite*; il *serpentino* è invece scarso e rappresentato per lo più da *serpentinoschisto* ricco

(1) G. Tissandier, *Sur la présence du nickel dans les poussières ferrugineuses atmosphériques*, “ C. R. „, 1876, 2° sem. — Id., *Analyse micrographique comparative de corpuscules ferrugineux atmosphériques et de fragments détachés de la surface des météorites*, “ C. R. „, 1876, 2° sem.

in *magnetite*. Notati pure *calcari* (magnesifero, arenaceo, alberese), *schisto micaceo-anfibolico*; *anfibolite granatifera*; *gneiss* minuto.

La parte sabbiosa comprende essenzialmente *quarzo* e *carbonati*; seguono *mica* bianca, *granato* roseo, *serpentino*, *anfiboli*, *epidoto*, *diallagio*, *tormalina* incolora, *zircone*. La *magnetite* è scarsa, evidentemente in rapporto con la diminuzione del serpentino.

Fossili. Frammenti rotolati di conchiglie marine.

Metri 50-55.

Sabbia grossolana, inquinata da argilla calcarea, con abbondanti i soliti *calcarelli* e le ghiaiette e ciottolini, oltre a numerose concrezioni limonitiche della grossezza di un grano di miglio.

Liberato il materiale dall'argilla che lo inquina, si può mediante setacciatura separare una sabbia finissima, bianca, costituita quasi esclusivamente di *quarzo* con pochi grani di *serpentino* (della varietà verde chiara subtrasparente) e dei soliti minerali: *anfiboli* in frammenti di sfaldatura, *feldspato*, *granato* roseo, *mica* bianca e verde chiara, *pirosseno*, *tormalina* bruna, *diallagio*, *zircone*; la *magnetite* è quasi mancante.

Il rimanente del materiale comprende ghiaiette (diametro fin 1 $^1/_2$ cm.) e pochi ciottolini (diam. 3-4 cm.), costituiti ancora essenzialmente da *quarzo* (fra cui roseo e violaceo) e *calcari*, mentre sono eccezionali: *serpentinoschisto*; *micaschisto anfibolico*; *anfibolite a granato ed epidoto*; *cloritoschisto* e *diaspro rosso*. Vi sono inoltre rappresentate roccie non comparse antecedentemente, come *granito* bianco e *porfido* rossastro; o soltanto raramente, come *anageniti* minute a cemento micaceo metamorfico, analoghe alle caratteristiche del Permo-Trias delle Alpi Marittime. Queste anageniti con il loro disfacimento possono spiegare la presenza del quarzo roseo e violaceo, che abbiam già visto abbastanza comune.

Ho infine osservato alcuni cristallini di *quarzo*, perfettamente terminati e limpidissimi, della lunghezza fin di 3 mm.

Fossili. Oltre a frustuli di *lignite*, sono comuni avanzi rotolati di *Foraminiferi*, di *Molluschi* terrestri e marini dei generi *Pecten*, *Ostrea*, *Cardium* e *Dentalium*.

Metri 56-100.

Argilla calcarea, in banchi alternati a color grigio, giallognolo, grigio-giallognolo, grigio-verdognolo, azzurrastro.

Costante vi è la presenza, talora molto abbondante, delle concrezioni calcaree (*calcarelli*) sempre fortemente argillose, con color biancastro o grigio e forma e dimensioni molto variabili. La loro composizione si mantiene però abbastanza costante, poichè ho infatti trovato ai differenti livelli le seguenti percentuali di carbonato di calcio e di magnesio:

Metri	62	$CaCO_3$	60,90	$MgCO_3$	2,54
"	74	"	56,42	"	2,70
"	87	"	61,60	"	2,32
"	89	"	60,43	"	2,56
"	91	"	55,89	"	1,74
"	94	"	56,50	"	1,96
"	97	"	63,22	"	2,60
"	98	"	60,65	"	2,20
"	100	"	61,74	"	2,50

Nei diversi punti di questa potente zona argillosa, si può separare, mediante ripetute levigazioni, alquanto materiale sabbioso, costituito essenzialmente da *quarzo*, meno da *calcari* e molto subordinatamente da *serpentino* (che manca anzi in parecchi livelli) e dai soliti minerali, fra cui caratteristici il *granato* roseo, la *tormalina* nera e gli *anfiboli*, ad esclusione però della glaucofane.

In rapporto con la scarsezza del serpentino è la rarità della *magnetite*, poichè questa appare ovunque strettamente connessa alla presenza di quello; abbondante è invece la *mica*, talora anzi abbondantissima, specialmente in minuti frustuli sparsi nell'argilla.

La levigazione del materiale rivela pure l'esistenza di pochi ciottolini delle solite roccie già incontrate ai livelli superiori con prevalenza del *quarzo*, mentre continua affatto scarso il *serpentino*.

Fossili. È questa la zona della trivellazione in cui sono più abbondanti i fossili, con frammenti di conchiglie marine e terrestri sempre fortemente rotolati; resti di *Planorbis, Valvata* e numerosi opercoli di *Bithynia.* Comuni pure sono i frustuli lignitici.

Metri 101-107.

Argilla grigio-verdastra, fortemente calcarea; continua l'abbondanza dei *calcarelli* che raggiungono fin 4-5 cm. di diametro ed hanno composizione analoga a quelli dei livelli precedenti; ho trovato infatti:

Metri 104	$CaCO_3$ 62,50	$MgCO_3$ 2,45
„ 107	„ 59,78	„ 2,22

La parte sabbiosa isolata con la levigazione è scarsa e costituita essenzialmente da *quarzo*, con subordinatamente i soliti minerali; va però ricordata l'esistenza di frammenti di una *granatite* compatta, rosso bruna, destinata a ritrovarsi in molti dei livelli successivi.

Poche ghiaiette di *quarzo*; *quarzite micacea*; *anfibolite granatifera* e di *serpentino* del tipo nero compatto.

Metri 108.

Argilla brunastra, con abbondantissimi frustuli lignitici; una zona simile era già stata incontrata alla profondità di m. 72.

Fossili. Frammenti di *Helix* con resti di *Valvata*, *Unio*, *Neritina* e opercoli di *Bithynia.*

Metri 109-115.

Argilla grigia-verdastra, calcarea, con numerosi *calcarelli.*

Il materiale è identico a quello incontrato al livello 101-107; è però da notare nella poca parte ghiaiosa l'esistenza di *granatite* compatta e di uno *schisto violaceo*, corrispondente all'analoga roccia del Permo-Trias delle Alpi Marittime (1).

---

(1) *Sopra alcuni schisti della Valle della Roia (Alpi Marittime)*, " Boll. Soc. Geol. It. „, IV, 1909.

Fossili. Pochi frustuli di *lignite*; frammenti rotolati di conchiglie marine e terrestri; opercoli di *Bithynia*.

Metri 116-119.

Argilla grigia-verdastra, calcarea, con relativamente pochi *calcarelli*, la cui composizione si sposta di poco da quella trovata agli altri livelli: infatti a 124 metri si ha $CaCO_3 = 77,82$ e $MgCO_3 = 3,29$.

Malgrado quest'apparente somiglianza con il materiale dei livelli superiori, in realtà abbiamo una profonda differenza, che si rivela nello studio della parte ghiaiosa-sabbiosa.

Infatti mentre abbiam visto sinora la sabbia esser rappresentata essenzialmente da quarzo con gran scarsità e talora mancanza di serpentino, improvvisamente questo prende a predominare fino a raggiungere verso 118 m. non meno dei $^4/_5$ del materiale, a cui imparte una caratteristica tinta nera. Questa abbondanza del serpentino, che viene a sovrapporsi agli elementi prima dominanti, si continua per alcuni metri, cessando poi improvvisamente come si era manifestato, indicando quindi un fenomeno affatto temporaneo.

Tale invasione, che così si può davvero chiamare, serpentinosa, dovette corrispondere, come giustamente fa osservare il Sacco (1), ad una speciale fluitazione di materiale proveniente molto probabilmente dal “ Gruppo di Voltri „ in cui si sanno essere frequenti le *roccie verdi*.

Del resto anche i minerali, che, molto subordinatamente, accompagnano il *serpentino*, accennano a tale origine; infatti insieme al *serpentino*: nero, verde azzurro cupo, verde chiaro subtrasparente, verde giallognolo, schistoso, fibroso (osservai fibre freschissime di *crisotilo* della lunghezza di $^1/_2$ cm.) troviamo poco *quarzo*; *feldspato*, specialmente basico; *anfiboli: orneblenda*, *attinoto* (fra cui i già indicati solidi di sfaldatura) e *glaucofane* che torna comparire con una certa frequenza; *clorite*; *augite* e *diopside*; *diallagio*; *bronzite*; *iperstene*; *granato* roseo e bruno; *epidoto*; *tormalina* bruna ed incolora. Data poi l'abbondanza

---

(1) *Geoidrologia dei pozzi profondi della Valle padana*, loc. cit.

del serpentino si capisce che del pari sia molto abbondante la *magnetite*, accompagnata da alquanta *cromite*.

Anche le ghiaiette ed i pochi ciottolini sono, in assoluta prevalenza, di *serpentino* con le sue parecchie varietà; vi si associano: *quarzo, quarzite micacea* e *cloritica*, *calcari* (fra cui un tipo fortemente magnesifero), *eufotide*, *anfibolite granatifera*, *talcoschisto con magnetite*, *schisto micaceo-anfibolico*.

Fossili. Sono relativamente scarsi con pochi frammenti di conchiglie continentali e marine e qualche opercolo di *Bithynia*; abbonda invece la *lignite* in frustuli.

Metri 120-121.

Sabbia argillosa. La composizione del materiale corrisponde a quella del livello precedente, salvo una forte diminuzione della parte argillosa.

Metri 122-128.

Argilla grigia-verdognola, calcarea, con numerosi *calcarelli*.

Questa zona, in cui la composizione del materiale corrisponde perfettamente a quella dei livelli 101-107 ed antecedenti, segna quasi una interruzione o pausa nell'invasione serpentinosa, che però ripiglia immediatamente per cessare poi del tutto con il livello inferiore.

Metri 129.

Sabbia argillosa, a cui si aveva già passaggio fin dalla parte inferiore del precedente livello con l'abbondanza del residuo sabbioso.

Il materiale corrisponde bene a quello della quota 120-121; il serpentino rappresenta oltre $^2/_3$ della massa totale, con abbondante *granato* e abbondantissima *magnetite*.

Fossili. Non frequenti, con frammenti di conchiglie rotolati, resti di *Planorbis* ed i soliti opercoli di *Bithynia*.

Metri 130-133.

Argilla giallognola, poco calcarea; contiene ghiaiette serpentinose e sabbia divisibile in due parti. Una, con grani a

dimensioni maggiori, è essenzialmente costituita da *serpentino* con gli altri soliti minerali colorati; l'altra, finissima, quasi esclusivamente di *quarzo*.

Questo livello si può dire che segna il limite inferiore della zona serpentinosa.

Fossili. Abbondanti frammenti di conchiglie, essenzialmente lacustri; opercoli di *Bithynia* e resti di *Planorbis*.

Metri 134-142.

Argilla verdognola, fortemente calcarea, con grossi *calcarelli* tondeggianti, i quali raggiungono le dimensioni fin di una noce.

Il residuo sabbioso è scarsissimo, ma complesso, con *serpentino, quarzo, mica, clorite* (di freschezza straordinaria), *anfiboli* (con i soliti solidi di sfaldatura), *diallagio, augite* e *magnetite*.

Fossili. Continuano i frammenti di conchiglie lacustri e gli opercoli di *Bithynia*; comuni i frustuli di *lignite*.

Metri 143-145.

Sabbia finissima, poco argillosa, di color grigio-bianco, essendo nella sua quasi totalità costituita da *quarzo* (essenzialmente ialino, meno roseo, giallognolo, verdiccio, violaceo) con pochi altri dei soliti minerali. Il *serpentino* è affatto eccezionale, quindi anche la quantità di *magnetite* è trascurabile.

Alla quota 144 m. si osservano, associate alla sabbia, ghiaiette di *serpentino, anfibolite epidotica-granatifera, diaspro rosso*, ma essenzialmente di *quarzo*, che per il colore roseo o violacescente ricorda bene quello delle anageniti.

Metri 146-174.

Argilla verdognola, che trattata con HCl dà effervescenza variabile, generalmente però poco intensa.

Il residuo ottenuto mediante levigazione è per lo più affatto trascurabile, eccetto verso i 150-156 m., quota alla quale si ottiene discreta quantità di sabbia, essenzialmente costituita da *quarzo*, con scarso *serpentino* e quindi pochissima *magnetite*. Questa è talora in piccoli ottaedri, che devono provenire da minerale inizialmente incluso nel talcoschisto, che s' incontra a formare alcune delle ghiaiette.

Oltre a *calcarelli*, il materiale contiene poche ghiaiette ordinariamente di *quarzo*, meno comuni di *serpentino*, *granatite* compatta, *schisto nero*, *calcare grigio*, *diaspro rosso*, *anfibolite granatifera*, *talcoschisto*. Esistono pure poche ma ampie lamine di *muscovite* e di *clorite*.

Fossili. Abbondanti resti di organismi marini con *Cristelleria*, *Nodosaria*, *Ditrupa*, *Balanus* negli strati superiori, mentre verso la parte inferiore del livello sono più comuni i resti di Molluschi terrestri (*Helix*). Non mancano neppure i soliti frustuli di *lignite*.

Metri 175-180.

Argilla giallognola, fortemente calcarea, con abbondantissimi *calcarelli* variabili per forma e dimensioni, e poche ghiaiette di *quarzo*, *schisto nero*, *granatite* compatta.

La parte sabbiosa è scarsissima e costituita da *quarzo* con appena pochi grani di *serpentino*.

Fossili. I soliti frammenti di conchiglie terrestri con opercoli di *Bithynia* e frustuli di *lignite*.

Metri 181-192.

Argilla verdognola, in generale molto fortemente calcarea; il residuo della levigazione è invece debole, talora affatto trascurabile, e costituito da concrezioni calcaree con poca sabbia di *quarzo*, accompagnato da *granato* e da frammenti non rotolati di *attinoto*.

Alla quota 186-188 m. il residuo sabbioso è alquanto più abbondante, ma costituito esclusivamente da *quarzo*.

Alla quota 191 è interessante che il residuo contiene alcuni granuli di *pirite*, minerale che non avevo osservato che nei livelli affatto superficiali della trivellazione.

Fossili. Frammenti rotolati di conchiglie continentali (*Helix*); di Foraminiferi con *Amphystegina*, *Vaginulina legumen*, ecc., oltre ad abbondanti frustuli di *lignite*.

Metri 193.

Sabbia finissima, argillosa, calcarea. Dopo essere stata liberata dalla parte argillosa la sabbia è bianca, conseguentemente alla sua composizione che è essenzialmente di *quarzo*.

Poche ghiaiette vi sono contenute, non mai voluminose (3 mm. al massimo di diametro) e rappresentate da *quarzo* (predominante), *quarzite micacea*, *calcare grigio*, *calcare nero*, *schisto cloritoso*, *gneiss minuto*, *anfibolite granatifera-epidotica* e raro *serpentino* nero.

La sabbia, come ho detto, comprende essenzialmente *quarzo* (ialino, latteo, roseo, giallognolo), *carbonati*; *feldspato*, tra cui frammenti di *albite* che ricordano il minerale incontrato nei primi livelli della trivellazione; *attinoto* in frammenti e piccoli solidi di sfaldatura; *orneblenda*; *epidoto*; *pirosseno* nero e verde chiaro, quasi incoloro; *granato* roseo e rosso bruno; *mica* bianca e verde chiara; *cianite* azzurrognola; *clorite* in frustuli, senza però più le splendide lamine dei livelli precedenti; *diallagio*; *bronzite*; *tormalina* bruna e incolora in cristallini perfettamente terminati; *zircone*; *magnetite* discretamente abbondante, per quanto il *serpentino* sia affatto raro.

Fossili. Opercoli di *Bithynia* e Foraminiferi rotolati (*Vaginulina legumen*).

Il materiale che ho avuto a mia disposizione cessa con la quota 193 m.; la trivellazione fu però continuata fin oltre i 200 m., incontrando al disotto della zona sabbiosa nuovamente **argilla calcarea**, alla quale si arrestò la perforazione senza aver incontrato l'acqua ricercata (1).

* * *

L'esame del materiale studiato nelle pagine che precedono ci indica chiaramente come il territorio di Alessandria costituì già una ampia depressione lacustre, indubbiamente di profondità rilevante, la quale si venne man mano ricolmando durante il Pliocene superiore e gran parte del Quaternario.

Infatti mentre i fossili di origine lacustre sono sempre abbastanza ben conservati, si nota invece che quelli di origine marina e terrestre sono in frammenti fortemente fluitati e rotolati, tanto da renderne difficile od anche impossibile la esatta determinazione. Tali fossili, data la loro natura marina, devono provenire dalla abrasione dei terreni del Pliocene marino (*Astiano*),

(1) F. Sacco, *Il pozzo trivellato di Alessandria*, Torino, Gerbone, 1898.

che già dovevano essere emersi e sopra i quali potevano quindi esercitare la loro azione erosiva le grandi fiumane provenienti dalla cerchia appenninico-alpina, le quali anzi poterono trarre anche una parte del materiale fluitato dai conglomerati oligocenici (1).

Un altro fatto interessante ci rivela la natura del materiale del pozzo di Alessandria; cioè che esso è, si può dire, dal principio al fine della trivellazione di uguale provenienza, poichè sono sempre gli stessi elementi rocciosi e minerali che vediamo ripetersi, più o meno abbondantemente, ai differenti livelli. Chè se abbiamo alternanza fra il prevalere ora del quarzo ora del serpentino, sempre però questi minerali sono associati ed accompagnati da altri caratteristici di ogni livello come il granato roseo, la glaucofane, gli anfiboli e pirosseni, la clorite, ecc. Quindi queste alternanze non devono rappresentare che il prevalere momentaneo, per condizioni speciali, dell'uno o dell'altro dei corsi fluviali, che operavano il trasporto del materiale di colmataggio.

Questa stessa prevalenza momentanea va pure evidentemente ammessa per l' invasione serpentinosa corrispondente al livello 116-134 metri.

Circa l'origine dei materiali lito-mineralogici che abbiam incontrati, se per alcuni (calcare alberese, arenarie, schisti neri, diaspri, ecc.) si deve ritenere una provenienza appenninica, la maggior parte però dimostra di essere di provenienza alpina e più particolarmente delle Alpi Marittime; così il gneiss, la diorite, l'aplite, le anageniti, gli schisti verdi e violacei, la maggior parte dei calcari, ecc. In quanto alle roccie serpentinose o contenenti granato, anfibolo, glaucofane, pirosseno, ecc., esse possono provenire dalle Alpi Cozie, ma più particolarmente dal Gruppo di Voltri, ove le *roccie verdi* sono appunto caratteristiche per la loro abbondanza e moltiplicità.

Torino, Gabinetto Geo-mineralogico del R° Politecnico
Maggio, 1912.

---

(1) F. Sacco, *Geoidrologia dei pozzi profondi*, ecc., loc. cit.

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE

DI

SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 19 Maggio 1912.

PRESIDENZA DEL PROF. COMM. RODOLFO RENIER
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: Pizzi, Chironi, Ruffini, Stampini, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza del Presidente Boselli, del Direttore della Classe Manno e dei Soci Carle e D'Ercole.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 5 maggio 1912.

Il Socio Sforza presenta per la inserzione nelle *Memorie* una sua Monografia intitolata: *Viaggi di due gentiluomini lucchesi del secolo XVIII.* Parte seconda: *Viaggio a Parigi del marchese Cesare Lucchesini (1781-1782).*

La Classe, presa cognizione del lavoro dello Sforza, ne delibera a scrutinio segreto la stampa nei volumi delle *Memorie* con voto unanime, astenendosi dalla votazione l'Autore.

Il Socio De Sanctis presenta per gli *Atti* un suo saggio intitolato: *Contributi alla storia dell'impero seleucidico.* I. *Eritre e Antioco Sotere.* II. *Il papiro di Gurob e la guerra laodicea.*

LETTURE

Contributi alla storia dell'impero seleucidico.

Nota del Socio GAETANO DE SANCTIS.

I.

Eritre ed Antioco Sotere.

Eritre era circa il 275 sotto il dominio tolemaico. È questa opinione comune dei cultori di storia ellenistica, che la sostengono in generale con la sicurezza della cosa giudicata. Eppure la Ionia fu senza alcun dubbio signoreggiata dai Seleucidi fino agli ultimi anni di Antioco Sotere; la Ionia di cui tace Teocrito nel XVII idillio enumerando non senza poetica amplificazione i possessi di Tolemeo Filadelfo. Seleucidiche infatti erano allora Efeso (Dittenberger *OGI.* I 222) e Mileto (Haussoullier *Études sur l'histoire de Milet* p. 60) e Lebedo (*OGI.* l. c.) e Teo (Dittenberger *Sylloge* 218) e certo anche Smirne; e ad Antioco Sotere, riconoscendone la sovranità, ma chiedendone in compenso riconoscimento d'autonomia, si rivolgeva il koinon degli Ioni. In tal condizione di cose la signoria tolemaica in una città ionica a settentrione d' Efeso e di Mileto, quale è Eritre, che implicherebbe poi anche il dominio di Chio, come mostra uno sguardo alla carta geografica, non è certo assurda; ma dovrebbe essere assodata sul fondamento di testimonianze sicure. Ed invece il solo fondamento della opinione comune è questo: che in una iscrizione di Eritre spettante al 275 circa (Dittenberger *Sylloge* 210, cfr. Wilamowitz " Abhandl. der Berl. Akad. „ Philos.-hist. Kl. 1909 II p. 23) si parla di denari dovuti a certi (soldati, pare) che si designano col nome rimasto frammentario di *...μαϊκοί*. Sebbene il numero delle lettere mancanti sia incerto, il Dittenberger (" Hermes „ XV p. 609) ha supplito con acutezza pari all'audacia [*Πτολε*]*μαϊκοί*. Questo supplemento, in-

certissimo com'esso è, è stato da tutti accolto senza un dubbio al mondo; e quasi tutti ne hanno ricavato che, se Eritre doveva pagar contribuzioni a soldati *[Πτολε]μαϊκοί,* conveniva che fosse sotto il dominio tolemaico. Solo, ch'io sappia, il Bouché-Leclercq (*Histoire des Lagides* I p. 169 n. 1) (1) ha avvertito che la seconda cosa non scende punto, necessariamente, dalla prima. Ora basta, io credo, enunciare con chiarezza queste premesse per vedere quanto sia lontana dall'essere provata la signoria tolemaica in Eritre (2). La sicurezza con cui la si afferma procede dalla tendenza, cui tutti, anche gli spiriti più critici, talora indulgono, a ripetere senza discussione le affermazioni altrui.

Ciò è, parmi, evidente. Ma può venire anche meglio documentato mercè l'esame minuto della epigrafe. In essa son lodati gli strateghi eritrei perchè (v. 8)

. . . . . . ἄνδρες ἀγαθοὶ καὶ φιλότιμοι γεγόνα[σι περὶ]
τὸν δῆμον καὶ καλῶς μὲν καὶ συμφερόντως τ[ῆς τε φυλα]-
10 *κῆς καὶ τῶν ἐξοπλασιῶν ἐπεμελήθησαν, πο[λλῶν δὲ φό]-*
βων καὶ κινδύνων περιστάντων καὶ δαπ[άνης πρὸς]
εἰρήνην οὐκ ὀλίγης, ἐν ἅπασιν διετ[ήρησαν τὴν πό]-
λιν καὶ τὴν χώραν ἀκέραιον, ἐπιμεληθέν[τες μὲν τῶν χρή]-
μάτων συναγωγῆς τε καὶ ἀποστ[ολῆς τοῖς περὶ Λεον]-
15 *νόριον βαρβάροις ἃ συνετάξατο ἡ π[όλις, φροντίσαντες]*
δὲ τῶν τοῖς παρ' Ἑρμοκράτει τατ[τομένοις δια]-
γραφέντων χρημάτων ὑπ' Ἀθη[ναίου καὶ τῶν τοῖς Πτολε]-
μαϊκοῖς προσοφειλομένων ε[ἰς σιτηρέσιον, τοῖς δὲ μισθο]-
φόροις τῶν ὀψονίων ἐκ πλεί[ονος λειπόντων, ἔδοσαν εἰσε]-
20 *νείκαντες ἐκ τῶν ἰδίων κτλ.*

---

(1) Non molto diversamente giudicava, se intendo bene, il Beloch " Hist. Zeitschrift „ LX 1888 p. 509 n. 2. Egli errava però quanto alla cronologia della epigrafe, ed ha lasciato poi cadere, con la sua cronologia, anche il suo commentario.

(2) È del resto evidente che questa signoria tolemaica mal si concilia con *OGI.* 223, se l'Antioco autore del rescritto contenuto nella epigrafe è il Sotere, come non ostante le ragioni addotte dal Beloch *Gr. G.* III 2 p. 274, parmi quasi sicuro. Cfr. Wilamowitz l. c.

Ho allegato qui la iscrizione coi supplementi del Dittenberger. I quali sono insufficienti al v. 16, come ha già notato H. Gaebler (*Erythrae*, Berlin 1892, Diss., p. 59). Dovremo inserirvi dunque, dopo *ταττομένοις*, *ἱππεῦσι* o *τοξόταις* o *στρατιώταις* o qualcosa di simile, sottintendendo poi lo stesso sostantivo all'epiteto di cui rimane *μαϊκοῖς*. Ora queste milizie agli ordini d'Ermocrate non son cittadine perchè la città non le stipendia di propria iniziativa, ma per ordine d'un Ateneo che, certo, non appare qui in veste di magistrato d'Eritre. E non essendo cittadine, debbono appartenere verisimilmente alla stessa potenza cui appartengono i .....*μαϊκοί*; il che val quanto dire che il supplemento [*Πτολε*]*μαϊκοί* è poco felice, essendo assurdo che il presidio egiziano si designi con la frase: " le milizie d' Ermocrate e i Tolemaici ". Che se vuolsi a ogni costo tener fermo a quel supplemento, dovrà ritenersi che in una occasione determinata, p. e. per assicurare il territorio da un assalto di Galli, gli Eritrei, d'accordo coi funzionari aventi in Eritre la suprema autorità a nome di un principe il quale, non essendo un Tolemeo, non poteva non essere Antioco I, chiesero ed ottennero la cooperazione d'un distaccamento di milizie tolemaiche, stanziate in qualche punto non remoto del dominio egiziano, p. e. a Samo. Questo, in un momento in cui regnava la pace tra l'Egitto e la Siria e in cui le devastazioni dei Galli facevano sentire a tutti i Greci, anche se discordi o nemici, la solidarietà nazionale contro il barbaro, non avrebbe in fondo nulla di troppo singolare.

Ma è per lo meno altrettanto possibile che i .....*μαϊκοί* non abbiano niente a fare con Tolemeo. Già del termine *Πτολεμαϊκοί* per indicare senz'altro milizie agli ordini d'uno dei primi Tolemei non credo che s'abbia alcun esempio; e non ho visto citato dell'uso di questa parola in questo senso altro documento che la nostra epigrafe, la quale non può dirsi davvero che la documenti, poichè essa non vi è. Può dirsi solo che .....*μαϊκοί* (a cui deve sottintendersi *ἱππεῖς* o *τοξόται* o altro sostantivo desunto dalla linea innanzi) è il nome tratto dal comandante, dal luogo di stanza o da quello d'origine d'un distaccamento che presidiava Eritre o che l'aveva soccorsa. D'integrare quel nome con sicurezza non dobbiamo avere la pretesa: tanto poco siamo informati circa le istituzioni militari ellenistiche. Non avremmo mai saputo p. e., se non si scopriva il decreto per-

gameno *OGI.* I 338 e alcune liste di nomi, che erano in Pergamo dei *Μασδυηνοί.* E se (in mancanza delle liste ov'è più di una volta ricordo *τῶν ἀπὸ Μασδύης*) ne avessimo dovuto integrare il nome, posto che fosse rimasta solo la desinenza *ηνοί*, può dirsi con sicurezza che nessuno, a meno d'essere indovino, vi sarebbe riuscito. Ma se, per riconoscere che il supplemento *Πτολεμαϊκοί* è incertissimo, si pretende (ed è pretesa ingiusta) che ne venga proposto un altro di pari incertezza, può pensarsi ad *'Ελυμαϊκοί* (*ἱππεῖς*), sapendosi che gli *ἱπποτοξόται* della Elimea ricorrono anche altrove come facenti parte delle milizie seleucidiche (Appian. *Syr.* 22): sono integrazioni tanto a buon mercato quanto n'è mediocre il valore; delle quali sarebbe facile, volendo, accrescere il numero.

Dobbiamo dunque prescindere dal supplemento *Πτολεμαϊκοί* e cercar di determinare per altra via le condizioni di Eritre quando il decreto fu promulgato. Che la città fosse sotto il dominio d'altri già desumemmo dal modo della menzione di quell'Ateneo che obbligò la città a stipendiare i soldati agli ordini d'Ermocrate; ma risulta anche più chiaramente dal silenzio che si serba, lodando con tanta verbosità gli strateghi, intorno a opera da loro prestata a difesa della libertà, dell'autonomia e della democrazia. Più circa il padrone d'Eritre apparirebbe subito se sapessimo a chi ubbidiva Ateneo. Ora, precisamente, questo ci è noto dalle lettere di Antioco Sotere a Meleagro, governatore della satrapia ellespontica (*OGI.* I 221). Un tale Aristodicide (stando a queste lettere) aveva chiesto che gli fossero donati cinquanta pletri di terreno di proprietà regia comprendenti una terricciuola detta *Πέτρα.* E il re glie li aveva concessi con la riserva che Petra non fosse stata ancora attribuita a nessuno: *Καὶ ἡμεῖς τήν τε Πέτραν δεδώκαμεν αὐτῷ, εἰ μὴ δέδοται ἄλλῳ πρότερον καὶ τὴγ χώραν τὴν πρὸς τῆι Πέτραι. Σὺ οὖν*, così soggiungeva Antioco scrivendo al governatore, *ἐπισκεψάμενος εἰ μὴ δέδοται ἄλλωι πρότερον αὕτη ἡ μερίς, παράδειξον αὐτὴν καὶ τὴν πρὸς αὐτῆι χώραν 'Αριστοδικίδηι .....οἱ δὲ βασιλικοὶ λαοὶ οἱ ἐκ τοῦ τόπου ἐν ὧι ἐστιν ἡ Πέτρα, ἐὰμ βούλωνται οἰκεῖν ἐν τῆι Πέτραι ἀσφαλείας ἕνεκε, συντετάχαμεν 'Αριστοδικίδηι ἐᾶν αὐτοὺς οἰκεῖν.* Come si vede, Petra non solo apparteneva all'impero seleucidico, ma faceva parte di quel che noi diremmo i beni della Corona; solo re Antioco non è sicuro se sia stata

o no alienata. Ciò si spiega agevolmente, anche senza accusare di troppa trascuratezza il Ministero seleucidico della Real Casa. In pochi anni i beni della Corona nell'Asia Minore erano passati da Lisimaco a Seleuco e da Seleuco ad Antioco; e Antioco avendo dovuto pensare ne' primi tempi più a combattere che a far conti, non poteva sapere ancora ben chiaro quali impegni i suoi predecessori avevano preso sul patrimonio regio e fino a qual segno questi impegni vincolavano anche lui. Per l'appunto Antioco, come par che sospettasse, non poteva più disporre liberamente del territorio di Petra, sicchè, com'egli riferisce, Aristodicide ebbe a dichiarargli di non aver potuto prenderne possesso: *Πέτραν τὸ χωρίον καὶ τὴ(ν) χώραν τὴν συγκύρουσαν περὶ ἧς πρότερον ἐγράψαμεν διδόντες αὐτῶι οὐδ' ἔτι καὶ νῦν παρειληφέναι διὰ τὸ Ἀθηναίωι τῶι ἐπὶ τοῦ ναυστάθμου ἐπικεχωρῆσθαι.* Ho riportato integralmente questi passi perchè basta la loro lettura accurata per dimostrare la inanità delle ipotesi che vi fabbrica su H. Gaebler (p. 29). Ateneo sarebbe cioè secondo il critico un ammiraglio dell'armata tolemaica che, impadronendosi del territorio di Petra durante la prima guerra di Siria, avrebbe fatto rimanere Aristodicide a mani vuote. In realtà un *Ἀθήναιος ὁ ἐπὶ τοῦ ναυστάθμου* menzionato così senz'altro in una lettera regia non può essere che un funzionario del re stesso che scrive la lettera. Si tratta evidentemente del comandante la stazione navale seleucidica della regione ellespontica: stazione di cui, sapendo che all'Ellesponto giungeva il regno d'Antioco, dovremmo postulare *a priori* l'esistenza quando non fosse documentata dalla lettera appunto del Re. A questo Ateneo dunque era stato ceduto, e sia pure non in piena proprietà, con la formula stessa (*ἐπιχωρέω*) che è adoperata anche altrove per l'assegnamento di lotti a coloni militari, quel terreno che Antioco, pur non essendo con piena esattezza informato, supponeva non esser più a libera disposizione della Corona; e non c'è neppure bisogno di dire che sarebbe tanto strano l'uso del verbo *ἐπιχωρέω* per mascherare l'abbandono forzoso avvenuto per la conquista quanto ridicola sarebbe la confessione che s'attribuisce in questa ipotesi al re: egli riconoscerebbe cioè d'aver saputo da un privato come Aristodicide i termini de territorio che gli era stato carpito dai Tolemaici.

Questa dimostrazione può parere superflua. Ed è di fatto

tale in un certo senso, perchè già il Beloch (" Historische Zeitschrift „ l. c.) e l'Holleaux (" Revue des études anciennes „ III 1901 p. 119) avevano giustamente ravvisato nell'Ateneo *ὁ ἐπὶ τοῦ ναυστάθμου* un funzionario seleucidico. Ma importava ribadire ciò; perchè l'Ateneo della lettera a Meleagro è probabilmente lo stesso funzionario che dà ordini agli Eritrei intorno al pagamento del soldo alle milizie, come bene ha visto, errando intorno al rimanente, H. Gaebler; e anzi, tenuto conto della coincidenza dei tempi e della vicinanza dei luoghi, può dirsi che la probabilità rasenta la certezza. Dunque imparte ordini agli Eritrei nel decreto in onore degli strateghi, per quel che pare, un funzionario di re Antioco. E può aggiungersi, ma senza pretendere, ben inteso, ad alcuna certezza, la congettura che l'Ateneo *ὁ ἐπὶ τοῦ ναυστάθμου* sia il padre di quell' *Ἱππόμαχος Ἀθηναίου* il quale da Antioco II Teo ottenne la liberazione di Mileto dal tiranno Timarco: *κατήγ[α]γε* (dice un documento del tempio di Apollo Didimeo, *OGI.* I 226) *τ[ή]ν τ[ε ἐλ]ευθερίαν καὶ δημοκρατίαν παρ[ὰ β]ασ[ιλέως Ἀντι]όχου το[ῦ] Θεοῦ [σ]υν(ερ)[γοῦντος Ἱππομάχου τοῦ Ἱππο]μάχου ὃς ἦν τοῦ π[ατρὸς αὐτοῦ ἀδελφός].*

Anche un altro dei personaggi che compaiono nel decreto di Eritre ci è ora ben conosciuto mercè un documento pubblicato da poco (1), il proponente Policrito figlio di Iatrocle. Questi ebbe più volte uffici pubblici in Eritre, *εἴς τε τὴν φυλακὴν τῆς πόλεως καὶ τὴν ἄλλην διοίκησιν καὶ εἰς τὰ τῶι βασιλεῖ συμφέροντα πολλάκις χρήμασιν εἰσευπορῶ[ν ἀπρ]οφασίστως, οὐκ ὀλίγων ἀγαθῶν αἴτιος ἐγενήθη* (v. 30-33). Il re nominato qui senza alcuna specificazione è fuor di dubbio lo stesso re Antioco a cui, secondo ciò che è detto pochi versi più oltre, gli Eritrei inviarono un'ambasceria (v. 42-49): *τοῦ τε ναυάρχου τοῖς ἀφράκτοις τὴμ πρὸς βασιλέα Ἀντίοχον πρεσβείαν παραπέμποντος καὶ τῶν ὀψωνίων τοῖς πλέουσιν ὑπολιπόντων διὰ τὸ πλείους αὐτοὺς ἡμέρας ὑπὸ χειμῶνος πρὸς τῆι χώραι κατασχεθῆναι καὶ τοῦ τε δήμου καὶ τῶν [ἀρχ]όντων διὰ τὴν ἐν τοῖς κοινοῖς ἀπορίαν παρακαλούντων [ἕκ]αστον προχρῆσαι εἰς τὰ ὀψώνια, μόνος* (Policrito) *ὑπέσχετο τῶι δήμ[ω]ι τὰ χρήματα.* E per l'opera da lui prestata in questa occasione e per l'aiuto che diede al popolo d'Eritre durante una carestia, a Policrito venne decretata una statua di

(1) Zolotas *Ἀθηνᾶ* XX (1908) p. 195 sgg.

bronzo da collocarsi accanto alla stele concessagli per i suoi antichi benefizî, la cui enumerazione si chiudeva con la prima delle frasi sopracitate. Dunque Policrito serviva lealmente da parecchio tempo la città e il re Antioco — cioè senza il più piccolo dubbio Antioco I Sotere — quando gli fu decretata la statua di bronzo. Ed è quindi indubitato che per parecchi anni Eritre fu sotto il dominio di Antioco. Ora se la città ebbe mai a sottostare alla signoria tolemaica, Antioco non potè ricuperarla che mediante una guerra con Tolemeo Filadelfo. Guerre con Tolemeo egli ne fece, pare, due: l'una la così detta prima guerra di Siria, l'altra quando si trovò in lotta con Eumene I di Pergamo. Ora quest'ultima guerra, in cui del resto ebbe la peggio, non è certo quella che gli ridiede Eritre: cominciò infatti (263 o 262) meno di due anni prima della sua morte (262/1). Potrebbe sì supporsi che Eritre fosse venuta in mano di Antioco durante la prima guerra di Siria (274-270), e ciò lascerebbe spazio sufficiente ai servigi resi da Policrito al re e alla città. Ma Policrito si occupava delle faccende pubbliche in Eritre almeno dal 275 circa, come risulta e dalla iscrizione per gli strateghi e dall'ambasceria ai barbari (i Galli) ricordata nello stesso decreto in suo onore (v. 15-19): *καὶ τὴν πρ[ὸς] τοὺς βαρβάρους πρεσβείαν ὑπομείνας, ἕνεκε τοῦ το[ὺς] ὁμηρεύοντας τῶμ πολιτῶ[ν] εἰς τὴν πόλιν παραγενέσθαι, οὐ μόνον τοὺς ὁμήρους κομισ[ά]μενος εἰς τὴν πόλιν ἤγαγεν ἀλλὰ καὶ τῶν πολιτῶν οὓς εἶδεν ὄντας αἰχμαλώτους διέσωσεν*: dove è evidente che si tratteggia la stessa condizione di cose dipinta nella iscrizione per gli strateghi. Certo non è impossibile che Policrito abbia cambiato bandiera e che abbia servito tranquillamente prima Tolemeo e poi Antioco. Ma anche la sola iscrizione in suo onore mostra che questa ipotesi è inverisimile, per non dire inammissibile. Infatti essa parla dell'opera prestata da Policrito *εἰς τὰ τῶι βασιλεῖ συμφέροντα* in modo da non lasciar supporre che al lettore il quale conosceva il passato di lui potesse riuscire ambigua. E inoltre sul principio della epigrafe si loda Policrito per essere stato cagione che il navarco Alcippo soccorresse gli Eritrei del territorio, infastiditi, forse, dai barbari (v. 3 segg.): *παραίτιος ἐγενήθη* (lacuna) *[τόν τε ναύ]αρχον Ἄλκιππον καὶ τοὺς τριηράρ[χους] . . εσ . ωι παραπέμψαι καὶ βοηθῆσαι τοῖς κατὰ τὴν χώραν ἐνο[χ]λουμένοις· ἐφ' οἷς ὁ δῆμος οὐ μόνον τὸν ναύαρχον καὶ*

τ[οὺς] τριηράρχους ἐτίμησεν, ἀλλὰ καὶ τῶν πληρωμάτων τὴν [ἐ]νδεχομένην ἐπιμέλειαν ἐποιήσατο διὰ τὸ προθύμως α[ὐ]τοὺς ὑπακούσαντας πολλὰ καὶ μεγάλα χρησίμους γενέ[σ]θαι. Sul termine poi della epigrafe stessa si loda Policrito per aver contribuito a vettovagliare gli equipaggi delle navi scoperte da cui il navarco faceva scortare l'ambasciata ad Antioco. Ora nessuno vorrà credere che il navarco menzionato al principio della iscrizione sia un ufficiale tolemaico, quello menzionato alla fine un ufficiale seleucidico. Si tratta anzi, come risulta dall'omettersi il nome nella seconda occasione, dello stesso Alcippo, il quale dunque per una serie di anni ebbe il comando dell'armata seleucidica nel mar Egeo: gli anni appunto in cui si svolse la vita pubblica di Policrito.

Questa conclusione su Policrito, indipendente dall'altra su Ateneo, la conferma ad un tempo e ne trae vigore. E l'una e l'altra dimostrano che Eritre fino agli ultimi anni, almeno, di Antioco Sotere appartenne ai Seleucidi. E dimostrano anche, sebbene non avesse bisogno d'esser dimostrato, che un impero il quale possedeva sì lungo tratto di sponda marittima non mancava di navi da guerra e aveva, per comandarle, uno o più navarchi. Era, dicevo, evidente; ma l'aveva dimenticato chi, appunto per non ascrivere ai Seleucidi una marina da guerra, metteva innanzi la ipotesi che il *ναύσταθμος* menzionato nella lettera a Meleagro non fosse una stazione navale („ Revue des ét. anc. „ l. c.), non meno di chi nell'Ateneo *ὁ ἐπὶ τῷ ναυστάθμῳ* voleva ad ogni costo vedere un ammiraglio tolemaico.

Ed un'altra e più importante conclusione può trarsi da queste premesse. Manca, tolta di mezzo la iscrizione in onore degli strateghi d'Eritre, ogni documento del dominio tolemaico in questa città; nè v'è alcuna prova, da quella iscrizione in fuori, che Tolemeo Filadelfo abbia avuto possedimenti nella Ionia prescindendo da Samo prima della guerra infelice tra Antioco ed Eumene I. Il predominio tolemaico nella Ionia non risale dunque che agli ultimi anni di Antioco. Fino allora, tra le varie vicende, il Seleucide conservò inconcusso il suo primato nell'Asia Minore. Lo scosse la ribellione di Pergamo; di Pergamo stessa che più tardi, con grave danno dell'ellenismo, preparò la rovina di quel primato alleandosi con Roma.

II.

Il papiro di Gurob e la guerra laodicea.

È noto da parecchi accenni sparsi nelle fonti classiche il dramma domestico e politico che tenne dietro alla morte del re di Siria Antioco II Teo (247/6). Il primogenito, Seleuco II detto poi Callinico, salì sul trono, conforme, dicesi, alla volontà dichiarata dal padre morente alla madre del nuovo re, Laodice. La quale tolse di mezzo per assicurargli il trono la moglie più giovane di Antioco Teo, Berenice, e il figlio di lei, che Berenice destinava alla successione, conforme a vere o pretese promesse d'Antioco. L'intervento di Tolemeo III Evergete d'Egitto nelle cose di Siria per vendicare Berenice, che era sua sorella, provocò la guerra nota ai moderni come terza guerra di Siria e agli antichi, dal nome della principessa che la scatenò, come guerra laodicea (*λαοδίκειος πόλεμος*, *Ancient Greek inscr. of the Br. Mus.* III 403 v. 134).

Le notizie circa questi avvenimenti son peraltro assai scarse, inesatte e in parte contraddittorie. Non è meraviglia quindi che i racconti ricavatine dagli scrittori di storia ellenistica, anche i più recenti ed accurati, si trovino alla lor volta in contraddizione con un documento che solo da poco è stato conosciuto nella sua molto relativa integrità. Il Droysen rappresenta Laodice assetata di sangue colpire, appena morto il marito, gli amici della rivale e la rivale stessa (*Hist. de l'hellénisme*, trad. franc. III 364 seg.). Anche secondo il Niese la prima cosa che fece Laodice fu di costringere Berenice a rifugiarsi in Dafne ed assediarvela (*Gesch. der griech. und maked. Staaten* II p. 146). Poco diversamente il Beloch rappresenta Berenice sopraffatta da' suoi avversarî, che prevengono l'intervento egiziano e segnatamente l'occupazione di Seleucia di Pieria per parte dell'armata tolemaica (*Gr. G.* III 1 p. 696 seg.).

Ma il papiro di Gurob (*The Flinders Petrie Papyri* II p. 143 segg. III 344 segg. = Mitteis-Wilcken *Grundzüge und Chrestomathie* I 2 p. 1 segg.) parla di una donna, una principessa evidentemente, designata con l'appellativo di " sorella " (*ἀδελφή*), la quale da Antiochia prende provvedimenti contro

Laodice e si mette in relazione coi comandanti egiziani del mar di Siria, accogliendoli nella sua stessa capitale. Questa ἀδελφή, come è riconosciuto da tutti dopo la pubblicazione della quarta colonna del documento, non può essere che la sorella di re Tolemeo Evergete, Berenice, la vedova di Antioco. Dunque, lungi dal cadere subito, come si credeva, vittima innocente della violenza e dell'astuzia di Laodice, la giovane vedova contro Laodice e il figliuolo di lei iniziò vigorosamente le offese, apparecchiando, col concorso degli Egiziani, armi e denari per tutelare i diritti proprî e del figlio.

Anzi i più recenti commentatori del papiro son persino d'accordo nel sostenere che Tolemeo Evergete, movendo dall'Egitto in difesa della sorella, la trovò tuttora vivente e si adoperò sulle prime non per vendicarla, ma per restaurarne e difenderne l'autorità. Tra essi lo Smily (*Petrie Papyri* III l. c.) e l'Holleaux (" BCH. „ XXX 1906 p. 330 segg.) ritennero concordemente che Tolemeo, venuto per mare a Seleucia di Pieria, di lì si inoltrò ad Antiochia per incontrarsi ed accordarsi con Berenice: incontro di cui il nostro papiro conterrebbe la relazione data da lui stesso. Il Wilcken vide invece nel papiro non una lettera regia, ma la relazione data al re da un ammiraglio; d'accordo peraltro coi predecessori nel ritenere che Tolemeo occupò, in vita di Berenice, Antiochia, e solo discorde nel collocare la occupazione prima dei fatti narrati nel papiro, ravvisando anzi in quella il presupposto di questi.

Per valutare siffatte ipotesi, è bene avvertire anzitutto che esse sono in pieno ed irreconciliabile contrasto con le fonti letterarie, le quali pongono concordemente la spedizione di Tolemeo Evergete dopo la morte di Berenice. Così S. Girolamo nel commentario a Daniele (XI 7-9, Migne *P. L.* XXV p. 560 seg.), riferita con particolari di cui alcuni certamente storici la uccisione della principessa, soggiunge: *occisa Berenice et mortuo Ptolemaeo Philadelpho patre eius in Aegypto, frater illius et ipse Ptolemaeus cognomento Evergetes tertius successit in regnum.... et venit cum exercitu magno et ingressus est provinciam.... Seleuci cognomento Callinici qui cum matre Laodice regnabat in Syria.... in tantum ut Syriam caperet et Ciliciam superioresque partes trans Euphratem et propemodum universam Asiam.* Così Appiano (*Syr.* 65): *καὶ αὐτὸν* (*Ἀντίοχον*) *ἔκτεινε Λαοδίκη καὶ ἐπ' ἐκείνῳ Βε-*

ρενίκην τε καὶ τὸ Βερενίκης βρέφος· καὶ Πτολεμαῖος ὁ τοῦ Φιλαδέλφου ταῦτα τινύμενος Λαοδίκην τε ἔκτεινε καὶ ἐς Συρίαν ἐνέβαλε καὶ ἐς Βαβυλῶνα ἤλασεν; dove la inesattezza su Laodice non toglie valore al rimanente, in cui Appiano concorda con le altre fonti. Così Polieno (VIII 50) asserisce che, uccisa Berenice, le sue donne ne celarono la morte ἐφ' ὅσον μεταπεμφθεὶς ὑπ' αὐτῶν Πτολεμαῖος ἧκεν ὁ πατὴρ (*sic*) τῆς ἀνῃρημένης. Nè meno esplicito è Giustino (XXVII 1, 6): *Beronice cum ad se interficiendum missos didicisset Daphinae se claudit.... frater quoque Ptolomeus periculo sororis exterritus relicto regno cum omnibus viribus advolat. sed Beronice ante adventum auxiliorum cum vi expugnari non posset, dolo circumventa trucidatur.... itaque universae civitates exemplo crudelitatis exterritae, simul et in ultionem eius quam defensuri fuerant Ptolomeo se tradunt.* Il significato di questo testo par sì chiaro da essere invece oscuro come il Wilcken, asserito che Tolemeo trovò vivente la sorella, aggiunga: " Das steht trotz aller Verwirrung bei Justin „. Lo stesso, chi ben guardi, è asserito esplicitamente in Polibio (V 58): συνέβαινε γὰρ Σελεύκειαν ἔτι τότε κατέχεσθαι φρουραῖς ὑπὸ τῶν ἐξ Αἰγύπτου βασιλέων ἐκ τῶν κατὰ τὸν Εὐεργέτην ἐπικληθέντα Πτολεμαῖον καιρῶν ἐν οἷς ἐκεῖνος διὰ τὰ Βερενίκης συμπτώματα καὶ τὴν ὑπὲρ ἐκείνης ὀργὴν στρατεύσας εἰς τοὺς κατὰ Συρίαν τόπους ἐγκρατὴς ἐγένετο ταύτης τῆς πόλεως; dove, se anche può discutersi intorno al significato preciso di συμπτώματα, è chiaro che la spedizione appare ispirata dal desiderio della vendetta, non dalla necessità della difesa.

Si è osservato che forse tutte queste notizie derivano da Filarco e che Filarco riferiva probabilmente l'aneddoto narrato da Polieno (l. c.) secondo cui le donne di Berenice ne avrebbero tenuta celata la morte fino alla venuta di Tolemeo. In altri termini, fino alla venuta di Tolemeo Berenice sarebbe sopravvissuta e solo Filarco, con una invenzione analoga a quella concernente la morte di Antioco Teo, avrebbe detto che, morta Berenice, ne assunse la maschera una dama di compagnia. Ma in realtà di questo aneddoto non è traccia nè in Giustino nè in S. Girolamo dove pur l'influsso di Filarco è così palese. Ed è poi quella invenzione diretta evidentemente a mostrare che Tolemeo invitando gli amici di Berenice alla riscossa si fondava sopra un falso: invenzione quindi di un nemico dell'Egitto, ana-

loga, ma pienamente opposta nella tendenza, all'altra accolta da Filarco secondo cui non il vero Antioco Teo, ma un certo Artemone, a lui somigliante, messo nel suo letto dalla moglie che aveva avvelenato il marito, avrebbe dichiarato di lasciare erede Seleuco II (Plin. *n. h.* VII 53. Val. Max. IX 14 *ext.* 1). Accolta, dico, da Filarco, perchè non è dubbio che Filarco accettava la versione dell'avvelenamento di Antioco per parte di Laodice (fr. 23 ap. Athen. XIII p. 593). E badiamo di non lasciarci indurre dalla somiglianza dei due aneddoti ad ascriverli alla stessa fabbrica. Così presso Tucidide (I 128) Pausania offre a Serse di sottomettergli la Grecia chiedendo in contraccambio di sposare una figlia del Gran Re. Parallelo, ma non narrato da Tucidide, anzi neppur conciliabile col suo racconto, è l'aneddoto secondo cui Temistocle avrebbe chiesta in sposa a Ierone una figlia, offrendo di sottomettergli la Grecia (Plut. *Themist.* 24). V'è a ogni modo una relazione che nessun critico serio vorrà riportare a Filarco, dove pure la venuta dell'Evergete è rappresentata come posteriore alla fine di Berenice, quella del libro di Daniele. Il luogo (11, 6-7) dove si allude incontestabilmente a Berenice, recato in italiano di sul testo ebraico, suona così: " E la figlia del re del mezzodì andrà dal re del settentrione per concludere un accordo. Ma essa non avrà il braccio abbastanza potente e il suo potere non durerà e sarà tradita (gr. *παραδοθήσεται*) con quelli che l'avranno condotta (segue una frase non chiara). E dalle sue radici sorgerà uno al suo posto e andrà all'esercito e moverà contro la fortezza del re del settentrione e li affronterà e sarà vittorioso ".

Par quindi evidente che, assediata Berenice in Dafne, nessuno seppe di preciso nè allora nè poi la data e il modo della sua morte; e che della incertezza si giovò Tolemeo per chiamare in suo nome alla riscossa gli amici rimastile fedeli nelle provincie oltre l'Eufrate. Ma presupposto comune e della tradizione divenuta canonica e di quella secondo cui un'altra donna posta sul letto di morte della regina ne avrebbe tenuto per qualche poco le veci (*ἑτέραν κατέκλιναν ὡς ἐκείνην ἔτι ζῶσαν καὶ τὸ τραῦμα θεραπευομένην*, Polyaen. l. c.) è che Tolemeo non giunse in tempo per salvare la sorella. Nè può revocarsi in dubbio che Berenice morì in Dafne circondata da pochissimi amici fedeli.

E poichè siamo in piena luce di storia e non può la nostra tradizione sull'età ellenistica trattarsi alla stregua di quella sulle guerre sannitiche o sulle guerre persiane, è chiaro che ambedue le interpretazioni date di recente al papiro di Gurob in contrasto con la tradizione son da respingere. Tolemeo Evergete non giunse certo ad Antiochia nè si abboccò con la sorella tra le manifestazioni di gioia del popolo e dei magnati che son descritte nel papiro; e molto meno vi aveva preceduto l'autore di quella relazione. Se per davvero Berenice fosse morta, di malattia o di ferro, dopo che Tolemeo, lei viva ed effettivamente regnante, quale la rappresenta il papiro, aveva occupato Antiochia, un fatto simile non potrebbe essere scomparso senza lasciar traccia nella tradizione.

Da ciò scendono due conclusioni d'importanza non lieve. La prima è che quella relazione non è punto stesa dal re od in suo nome. Cosa del resto che già era stata sostenuta per altre ragioni dal Wilcken. E prescindendo affatto dalle ragioni del Wilcken e da quella decisiva addotta sopra, io non so come non si sia avvertito ad es. che la frase *καὶ μετὰ ταῦτα πρὸς τῶι πράσσειν τι τῶν χρησίμων ἐγινόμεθα* è d'un subalterno che dà discarico al suo superiore dell'impiego del suo tempo, non di un re che riferisce circa il suo operato. Nè so come possa dimenticarsi che le fonti concordemente — vedansi i testi pur ora citati — accennano ad una spedizione terrestre del re, non ad una sua spedizione marittima. E il ripiego di supporre che, mentre l'armata sotto il comando del re perveniva a Seleucia, un esercito egiziano penetrasse nella Seleucide dalla parte di terra, per conciliare le fonti letterarie e il papiro, contraddice tanto alle une quanto all'altro, come per solito siffatti ripieghi: poichè le fonti letterarie mostrano il re al comando dell'esercito invasore; e di questo esercito, a cui pure non poteva non toccar nella occupazione d'Antiochia la parte preponderante, il papiro sembra affatto tacere.

Ma un'altra conseguenza, e più importante, scende dal già detto: che i fatti narrati nel papiro sono anteriori alla spedizione di re Tolemeo al soccorso di Berenice e son quindi di pochissimo posteriori alla morte di Antioco Teo. Con ciò è rimosso ogni disaccordo tra il documento e le fonti letterarie. Essi s'integrano scambievolmente. E vediamo ciò che con tale integrazione s'impara.

Berenice, che era ad Antiochia quando Antioco morì nell'Asia Minore, respinse come apocrifo il testamento del marito che in contraddizione con le sue speranze o con le promesse a lei fatte trasmetteva il regno al figlio di Laodice, Seleuco. Per il momento, se l'Asia Minore riconobbe in massima l'autorità di Laodice, la Siria riconobbe quella di Berenice e del figlio di lei. Anzi Berenice cercò d'estendere il suo potere in Cilicia impedendo che a Laodice venissero portati i denari colà raccolti nel tesoro regio, che forse si custodiva tuttora a Ciinda, e di mettersi in relazione per meglio assicurare l'offesa e la difesa coi comandanti egiziani del mar di Siria. Di questi, Pitagora ed Aristocle, recatisi a sua richiesta a Soli in Cilicia (su di che vedasi il commentario del Wilcken), riuscirono ad occupare la città e la rocca e a sequestrare, per spedirli a Seleucia di Pieria, 1500 talenti che lo stratego della Cilicia Aribazo, partigiano di Laodice, era per recarle ad Efeso. Il navarco egiziano poi, movendo (da Cipro, pare) con quante navi potevano capire nel porto di Seleucia di Pieria, vi approdò felicemente e, sbarcato tra le accoglienze festose della popolazione, procedette fino ad Antiochia per abboccarsi con Berenice e prendere gli accordi opportuni, accolto anche ivi con tutti gli onori dal popolo e dai dignitarî. Non si trattava punto, ben s'intende, d'una occupazione militare d'Antiochia per parte dei Tolemaici, chè al navarco difettavano certo le forze da sbarco adeguate; e poi un presidio straniero nella capitale, sia pure col pretesto della difesa, non poteva che destare le gelosie e le apprensioni dei Siriaci fedeli alla dinastia e non desiderosi di cambiar signore. Si voleva semplicemente, mercè una dimostrazione palese della potenza di Tolemeo e del suo proposito di sostenere la giovane vedova, raffermare nella fedeltà a Berenice gli Antiocheni e tutti quelli che parevano ben disposti verso la sua causa. Ma se Antiochia non era nè poteva essere occupata dagli Egiziani, erano bensì in mano loro, quantunque vi fossero entrati senza spargimento di sangue, pare, e sotto colore di difendere i diritti di Berenice e del figlio, Soli e Seleucia di Pieria. Questa occupazione e l'intervento stesso troppo palese degli Egiziani nelle faccende dinastiche di Siria rincalzò per converso l'autorità di Laodice e mostrò a tutti i sudditi leali della dinastia seleucidica, i quali sul principio avevano esitato tra Laodice

e Berenice, che l'unico mezzo d'assicurare la indipendenza del regno era quella di stringersi attorno al giovane Seleuco.

Così il terreno cominciò ad essere malsicuro per Berenice ad Antiochia, sebbene Laodice non osasse farle guerra dichiarata, temendo che un procedere troppo scoperto inducesse gli Antiocheni a risoluzioni disperate. Guerra aperta, si badi, tra Laodice e Tolemeo non v'era stata ancora. Il papiro parla di luoghi occupati per sorpresa e d'altri in cui gli ufficiali egiziani furono accolti festosamente dalla popolazione. Del solo fatto di violenza, la uccisione dello stratego fuggiasco Aribazo, i Tolemaici addossano la responsabilità ad alcuni indigeni, *τῶν ἐγχωρίων τινές*, che ne avevano recata la testa ad Antiochia. Evitando la guerra aperta ed appoggiandosi al favore delle milizie e della popolazione, Laodice e Seleuco, che probabilmente non aveva tardato a passare il Tauro e a comparire con armi e denari nella Siria, toglievano a Berenice di giustificare il troppo palese ricorso ad aiuti stranieri. Come per Maria Antonietta al tempo della Rivoluzione francese, l'impetrare e il non impetrare l'intervento efficace dei congiunti era per Berenice egualmente pericoloso. Si aggiunga che forse proprio allora per la morte di Tolemeo II e il mutamento di sovrano in Egitto (che non è difficile sia stato di qualche mese posteriore alla morte di Antioco Teo, come parrebbero suggerire il libro di Daniele e il suo commentatore) la operosità politico-militare degli Egiziani nelle acque di Siria rimase per poco, se non del tutto interrotta, rallentata e disordinata. Così Berenice, sentendosi impari al nemico, si rifugiò nel sobborgo sacro di Dafne, sperando di essere tutelata dalla santità del luogo e dalla fedeltà degli amici più provati; ed attese. Anche ora non osò Seleuco toglierla di mezzo con la forza temendo il biasimo della opinione pubblica e forse cercando ancora di evitare una guerra aperta con Tolemeo Evergete, a cui non si sentiva preparato. Ma con l'aiuto del tradimento, in circostanze non ben note (v. particolarmente Hieron. e Iustin. l. c. Val. Max. IX 10 *ext.* 1), perirono Berenice e il suo bambino.

Aveva in realtà per tal modo Seleuco provveduto alla salvezza della dinastia e agl'interessi del regno siriaco. Ma il vero o simulato orrore per l'assassinio d'una donna e d'un bambino, la pronta energia con cui sopravvenne con grandi forze Tolemeo,

le tendenze antiunitarie sempre vive, sebbene latenti nel regno di Siria, la falsa opinione che Berenice vivesse ancora, sparsa forse ad arte nelle satrapie lontane, spiegano i felici successi di Tolemeo, che si spinse vittoriosamente fin oltre l'Eufrate. Ch'egli occupasse la capitale Antiochia non è detto nelle fonti; chè non costituisce prova la espressione indeterminata ed esagerata della iscrizione di Adulis, *OGI.* 54: *κυριεύσας δὲ τῆς τε ἐντὸς Εὐφράτου χώρας πάσης κτλ.*, nè le espressioni simili di Girolamo; ed è supposizione tanto audace quanto arbitraria dei critici moderni, fondata soprattutto sul papiro di Gurob, il quale, come vedemmo, deve interpretarsi in tutt'altro senso.

L'Accademico Segretario
GAETANO DE SANCTIS.

Diagramma degli abbassamenti del vertice (12)

$F = 1$

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLVII, Disp. 14ª, **1911-1912**.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 26 Maggio 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO LORENZO CAMERANO
VICE-PRESIDENTE DELL'ACCADEMIA.

Sono presenti i Soci: NACCARI, Direttore della Classe, D'OVIDIO, PEANO, JADANZA, FOÀ, GUARESCHI, GUIDI, MATTIROLO, GRASSI, SOMIGLIANA, FUSARI, e SEGRE Segretario. — Scusano l'assenza i Soci SALVADORI, FILETI e PARONA.

È letto ed approvato il verbale della precedente adunanza.

Il Presidente dà alla Classe la dolorosa notizia della morte del Socio corrispondente prof. Edoardo STRASBURGER, avvenuta il 19 corrente mese. Questo sommo botanico apparteneva alla Accademia dal 1893. Si dà incarico al Socio MATTIROLO di commemorarlo in una prossima seduta.

Il Socio corrispondente A. LACROIX ha inviato in omaggio sette opuscoli su argomenti di Mineralogia e Geologia.

Il Socio GRASSI legge la sua commemorazione di Antonio PACINOTTI. Verrà inserita fra le *Memorie* della Classe.

Si presentano, per la stampa negli *Atti* le seguenti Note:

G. CHARRIER e G. FERRERI, *Eterificazione di o-ossiazocomposti*, Nota I; presentata dal Socio NACCARI a nome del Socio FILETI;

F. VIGNOLO-LUTATI, *Sull'azione fotochimica delle resine*, dal Socio NACCARI;

G. ALBENGA, *Compensazione grafica con la figura di errore*, dal Socio GUIDI;

I. GUARESCHI, *Osservazioni sulle tabelle internazionali dei pesi atomici*;

A. PADOA, *Frequenza, previsione, probabilità*, dal Socio PEANO;

A. CESARIS-DEMEL, *Sulla possibilità di differenziare macroscopicamente parti distinte nella sostanza bianca del centro ovale*, dal Socio FOÀ;

L. CAMERANO, *Osservazioni intorno alle ossa wormiane della fontanella fronto-naso-maxillo-lacrimale e intorno all'osso lacrimale nel camoscio.*

Il Socio FUSARI, anche a nome del collega CAMERANO, legge la relazione sulla Memoria di Luigi MEINERI, *Sui muscoli dorsali del piede*. Accogliendo le conclusioni di questa relazione, la Classe unanime delibera l'accoglimento della Memoria nei suoi volumi.

Similmente viene accolta, con voto unanime, la Memoria del Socio corrispondente GARBASSO, *Eccitatori di Hertz con spettro d'emissione a più righe.*

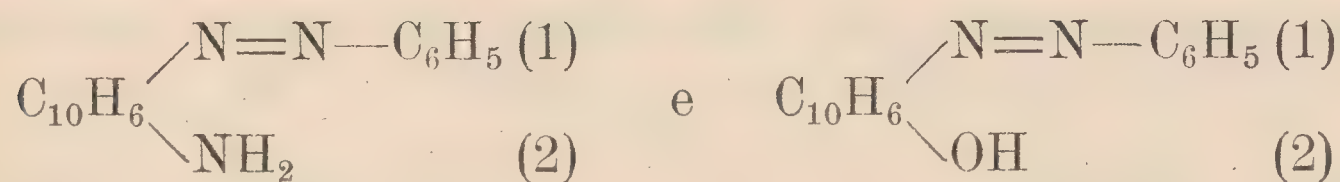
Infine il Socio SOMIGLIANA, per incarico del collega PARONA, presenta una Memoria del Dr. Luigi COLOMBA, *Ricerche sui giacimenti di Brosso e di Traversella*, Parte I: *Osservazioni petrografiche sul massiccio dioritico di Valchiusella*. Vengono incaricati di riferire su queste Ricerche i Soci PARONA e SOMIGLIANA.

LETTURE

Eterificazione di o-ossiazocomposti.

Nota I[a] dei Dottori G. CHARRIER e G. FERRERI.

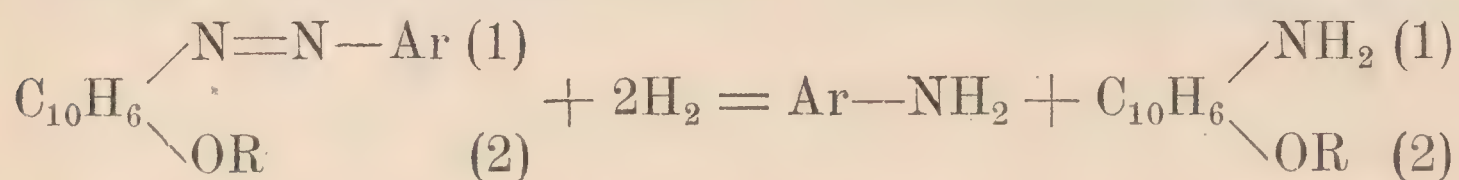
In comunicazioni precedenti (1) abbiamo fatto noto come o-amido- e o-ossi-azocomposti, ad esempio il derivato della fenilazonaftalina, abbiano tendenza a reagire colle formole di veri azocomposti:

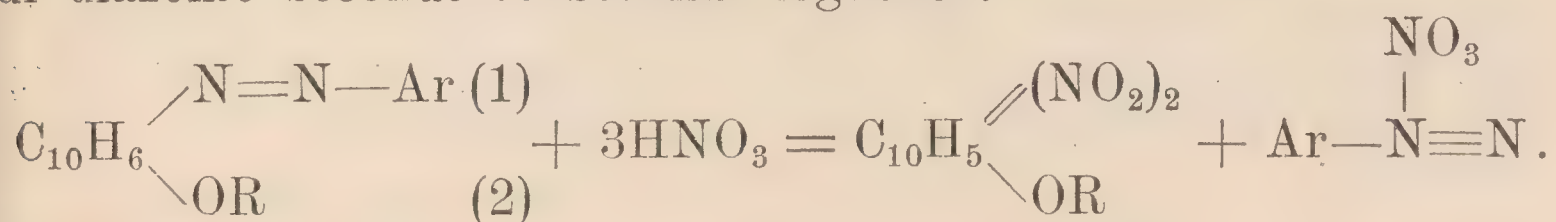
$$C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N{-}C_6H_5 & (1) \\ NH_2 & (2) \end{cases} \quad e \quad C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N{-}C_6H_5 & (1) \\ OH & (2) \end{cases}$$

e non con quelle tautomere

$$C_{10}H_6 \begin{cases} {=}N{-}NH{-}C_6H_5 & (1) \\ {=}NH & (2) \end{cases} \quad e \quad C_{10}H_6 \begin{cases} {=}N{-}NH{-}C_6H_5 & (1) \\ {=}O & (2) \end{cases}$$

contenenti il nucleo chinonico invece del nucleo aromatico.

Proseguendo lo studio degli o-ossiazocomposti abbiamo trovato, che coi solfati alchilici essi si comportano da veri azocomposti, poichè siamo riusciti a preparare con questa reazione una serie di eteri metilici ed etilici, ai quali va attribuita la formola generale $C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N{-}Ar & (1) \\ OR & (2) \end{cases}$; infatti coll'idrogeno nascente si scindono secondo l'equazione:

$$C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N{-}Ar & (1) \\ OR & (2) \end{cases} + 2H_2 = Ar{-}NH_2 + C_{10}H_6 \begin{cases} NH_2 & (1) \\ OR & (2) \end{cases}$$

e coll'acido nitrico dànno l'etere di un dinitronaftol e il nitrato di diazonio secondo lo schema seguente:

$$C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N{-}Ar & (1) \\ OR & (2) \end{cases} + 3HNO_3 = C_{10}H_5 \begin{cases} (NO_2)_2 \\ OR \end{cases} + Ar{-}\overset{\overset{NO_3}{|}}{N}{\equiv}N.$$

(1) G. Charrier, *Azione del calore sugli o-amidoazocomposti* G. *40*, II, 132 (1910) e G. Charrier e G. Ferreri, *Sull'azione del pentacloruro di fosforo sugli ossiazocomposti* G. *41*, II, 717 (1911).

Gli eteri che descriviamo in questa prima Nota, derivanti tutti dagli o-ossiazocomposti, che si ottengono per azione dei sali di diazonio sul -naftol in soluzione alca lina, sono corpi ben cristallizzati, in generale fusibili nettamente senza decomposizione a temperatura più bassa degli ossiazocomposti da cui derivano, e più solubili di essi nei comuni solventi organici. Mentre vengono facilmente saponificati dagli acidi minerali diluiti, sono stabilissimi cogli alcali, il che può prevedersi dal fatto che si ottengono in presenza di soluzione di idrato sodico al 30 %.

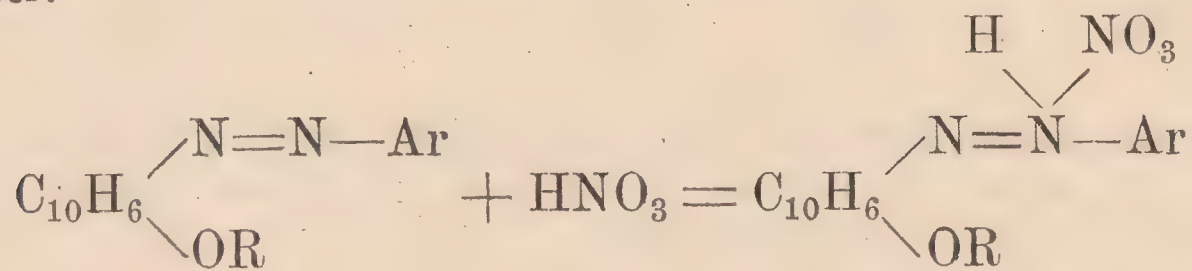
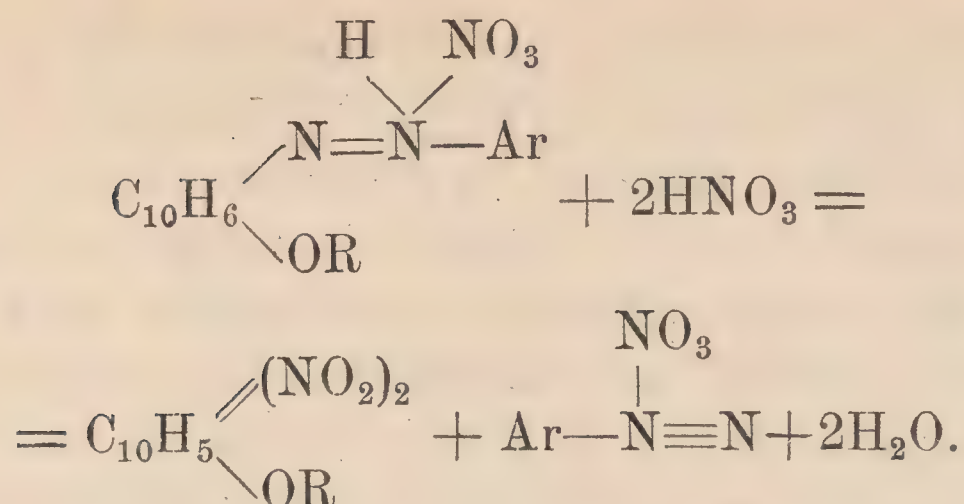
Gli eteri degli arilazoβnaftoli, da noi preparati, hanno proprietà basiche molto spiccate, poichè si sciolgono facilmente negli acidi minerali anche diluiti con formazione di sali e possono inoltre formare sali doppi, poco stabili, col cloruro mercurico, col cloruro platinico, col cloruro stannico, etc., che per ora non abbiamo analizzato. I cloridrati, che descriviamo, ottenuti in soluzione acquosa o in soluzione eterea con un piccolo eccesso di acido cloridrico, contengono una sola molecola di questo: facendo agire un eccesso di acido cloridrico sciolto in etere assoluto sulla soluzione eterea dei nostri eteri si possono ottenere cloridrati contenenti una quantità maggiore di una molecola di acido cloridrico: di essi ci occuperemo in una prossima Nota.

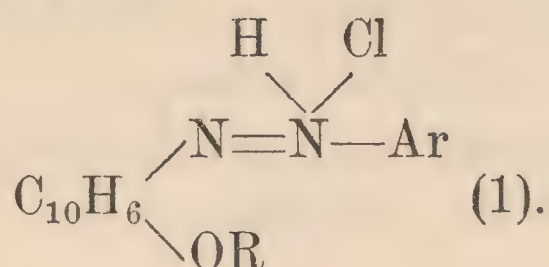
I cloridrati degli eteri degli arilazoβnaftoli sono poco stabili: idrolizzati facilmente dall'acqua, vengono pure alterati dall'aria umida, perdendo essi facilmente acido cloridrico. Si sciolgono invece inalterati in acido cloridrico diluito.

In generale nei sali degli eteri degli arilazoβnaftoli si potrebbe ammettere la presenza di un atomo di azoto pentavalente, considerandoli come sali di ammonio sostituiti: attribuendo, per esempio, ai nitrati la struttura $C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}\overset{H\ \ NO_3}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}{-}Ar \\ OR \end{cases}$, si spiega in modo soddisfacente l'azione dell'acido nitrico sugli eteri degli arilazoβnaftoli, che in questo caso avverrebbe secondo gli schemi seguenti:

$$C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N{-}Ar \\ OR \end{cases} + HNO_3 = C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}\overset{H\ \ NO_3}{\overset{\diagdown\diagup}{N}}{-}Ar \\ OR \end{cases}$$

$$C_{10}H_6\begin{cases}N=\overset{\displaystyle H\ \ NO_3}{\diagdown\!\diagup}\!\!N-Ar\\ OR\end{cases}+2HNO_3=$$

$$=C_{10}H_5\begin{cases}(NO_2)_2\\ OR\end{cases}+Ar-\overset{\displaystyle NO_3}{\overset{|}{N}}\equiv N+2H_2O.$$

Fondandoci su queste considerazioni ai cloridrati spetterebbe la formola generale:

$$C_{10}H_6\begin{cases}N=\overset{\displaystyle H\ \ Cl}{\diagdown\!\diagup}\!\!N-Ar\\ OR\end{cases}\qquad(1).$$

Di eteri di arilazoβnaftoli non ne venne finora preparato alcuno allo stato di purezza: Weinberg (2) aveva ottenuto una sostanza oleosa, per azione del bromuro di etile sul fenilazo-βnaftol in presenza della quantità teorica di idrato potassico sciolta in alcool, sostanza che si comportava come etere etilico di questo ossiazocomposto in alcune reazioni.

Alcuni eteri etilici di arilazoeugenoli furono preparati da Oddo e Puxeddu (3), da Colombano (4) e da Auwers (5). Il solfato di metile venne fatto agire su alcuni arilazoeugenoli da Colombano (6).

Etere metilico del fenilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases}N=N-C_6H_5\ (1)\\ OCH_3\qquad\quad (2)\end{cases}$

Trattando del fenilazoβnaftol con circa quindici volte il suo

(1) Per i cloridrati degli ossiazocomposti furono proposte diverse formole, le quali però generalmente contengono un nucleo chinonico: Farmer ed Hantzsch, B. *32*, 3091 (1899). — Tuck, " Journ. Chem. Soc. „, *91*, 449 (1907). — Baker, " Journ. Chem. Soc. „, *91*, 1490 (1997). — Fox ed Hewitt, " Journ. Chem. Soc. „, *93*, 333 (1908). — Hantzsch, B. *42*, 2129 (1909).

(2) B. *20*, 3177 (1887).

(3) G. *35*, I, 65 (1905); G. *36*, II, 31, 33, 38, 40 (1906).

(4) G. *37*, II, 471 (1907).

(5) B. *41*, 413, 414 (1908).

(6) G. *37*, II, 471 (1907).

peso di solfato di metile e con cinquanta volte il suo peso di soluzione di idrato sodico al 30 %, e agitando fortemente in imbuto a robinetto, avviene un'energica reazione con svolgimento di vapori di alcool metilico e si separa tosto un olio bruno, che ben presto solidifica in una massa nera, cristallina, che ben lavata e cristallizzata dall'alcool, si ha, dopo una seconda cristallizzazione, in forma di grandi tavole, di color rosso granato, fusibili a 62°, e costituenti l'etere metilico del fenilazo-βnaftol allo stato di purezza.

I. Gr. 0,4092 di sostanza fornirono gr. 1,1680 di anidride carbonica e gr. 0,1974 di acqua.
II. Gr. 0,1128 di sostanza diedero cc. 10,5 di azoto ($H_0 = 742,918$ $t = 16°$), ossia gr. 0,012041.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O$
	I	II	
Carbonio	77,84	—	77,86
Idrogeno	5,36	—	5,34
Azoto	—	10,67	10,68

È molto solubile in tutti i solventi, anche nell'etere di petrolio e nella ligroina. Nell'alcool etilico si scioglie molto a caldo e relativamente poco a freddo, perciò esso è il miglior solvente per la cristallizzazione. È solubile negli acidi minerali diluiti con intensa colorazione rossa e con formazione dei sali corrispondenti. Si scioglie in acido solforico concentrato con colorazione rosso rubino.

L'etere metilico del fenilazoβnaftol, scaldato all'ebollizione con acido cloridrico diluito, si scinde a poco a poco in alcool metilico (constatato nel liquido della reazione sottoposto a distillazione) e in fenilazoβnaftol, che si ottiene cristallizzato dall'alcool fondente a 132-133°.

I. Gr. 0,2086 di sostanza fornirono gr. 0,5894 di anidride carbonica e gr. 0,0964 di acqua.
II. Gr. 0,1200 di sostanza diedero cc. 11,5 di azoto ($H_0 = 742,038$ $t = 17°$), ossia gr. 0,013117.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{16}H_{12}N_2O$
	I	II	
Carbonio	77,05	—	77,41
Idrogeno	5,13	—	4,83
Azoto	—	10,93	11,29

Il cloridrato dell'etere metilico $C_{17}H_{14}N_2O.HCl$ si può ottenere facilmente sciogliendo l'etere in etere etilico anidro e aggiungendovi una soluzione di acido cloridrico in etere in quantità poco superiore alla teorica: si separa tosto una massa cristallina rossa, che, seccata, prende riflessi verdi metallici.

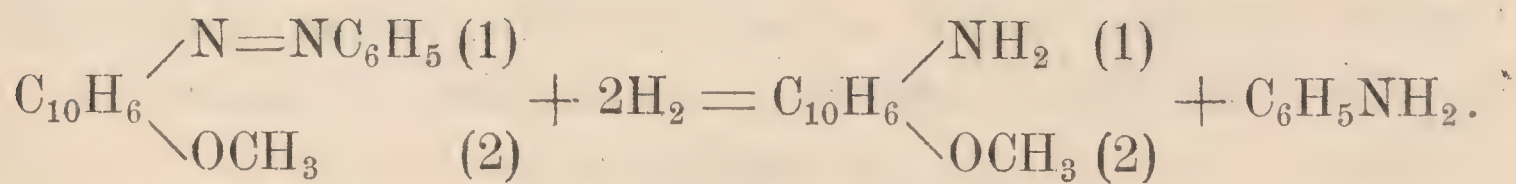
Gr. 0,3782 di sostanza fornirono gr. 0,1819 di cloruro di argento, ossia gr. 0,044974 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_2OCl$
Cloro	11,89	12,22

Il cloridrato dell'etere metilico del fenilazoβnaftol si scioglie con colorazione rossa nell'acido cloridrico diluito: con acqua fredda viene facilmente idrolizzato. Scaldato con acqua all'ebollizione si scinde in fenilazoβnaftol (P. F. 132-133°), alcool metilico e acido cloridrico.

Per azione dell'idrogeno nascente, sviluppato da polvere di zinco e acido acetico, il fenilazoβnaftolmetiletere viene facilmente scisso in etere metilico dell' 1-amido-2-naftol e in anilina secondo l'equazione:

$$C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}NC_6H_5\ (1)\\ \diagdown OCH_3\qquad (2)\end{matrix} + 2H_2 = C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup NH_2\ \ (1)\\ \diagdown OCH_3\ (2)\end{matrix} + C_6H_5NH_2.$$

Infatti dal liquido della reazione, soprasaturato con soluzione di potassa e sottoposto a distillazione in corrente di vapor d'acqua, passa prima l'anilina, che si può facilmente dimostrare colla nota reazione di Perkin, che non è data dagli eteri dell' 1-amido-2-naftol. In seguito l'acqua che passa alla distillazione, portante gocce oleose, lascia separare per completo raffreddamento e rimanendo in riposo un composto cristallizzato

in lunghi aghi bianchi, setacei, fusibili a 53°, che all'aria e alla luce rapidamente si colorano in roseo, e che costituiscono l'etere metilico dell' 1-amido-2-naftol $C_{10}H_6<^{NH_2}_{OCH_3}$.

I. Gr. 0,1200 di sostanza fornirono gr. 0,3350 di anidride carbonica e gr. 0,0730 di acqua.

II. Gr. 0,1607 di sostanza diedero cc. 11,5 di azoto ($H_0 = 732,629$ $t = 20°$), ossia gr. 0,012783.

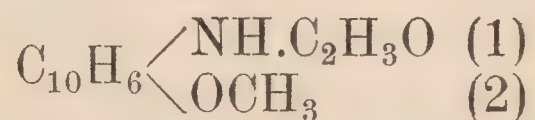
Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{11}H_{11}NO$
	I	II	
Carbonio	76,13	—	76,30
Idrogeno	6,75	—	6,35
Azoto	—	7,95	8,09

Solubilissimo in tutti i solventi organici, cristallizza bene dall'acqua, dove è poco solubile a caldo, pochissimo a freddo.

La soluzione acquosa dell'etere metilico dell' 1-amido-2-naftol dà luogo a due reazioni, che sono caratteristiche degli eteri dell' 1-amido-2-naftol, e che non sono date, nè dall'anilina e omologhi, nè dalle due naftilamine: col cloruro ferrico in soluzione normale si colora in azzurro, simile al bleu di Prussia (1), e col bicromato potassico in soluzione neutra dà istantaneamente un precipitato giallo arancio, in fiocchi, costituito probabilmente dal cromato della base, pochissimo solubile in acqua. Entrambe queste reazioni sono sensibilissime e ci tornarono molto utili in questo lavoro (2).

Riscaldato all'ebollizione in soluzione acetica con anidride acetica e acetato sodico per pochi minuti, l'etere metilico dell' 1-amido-2-naftol si trasforma in monoacetilderivato:

$$C_{10}H_6<^{NH.C_2H_3O\ (1)}_{OCH_3\ \ (2)}$$

(1) Questa reazione fu già osservata da Rohde (Z. El., 7, 340) per l'etere etilico dell'1-amido-2-naftol.

(2) L'α-naftilamina, in soluzione sufficientemente concentrata, dà una colorazione azzurro-violetta con cloruro ferrico (Schiff, A. *101,* 92 [1857]), ma questa reazione è estremamente meno sensibile di quella data dalle soluzioni anche diluitissime degli eteri dell'1-amido-2-naftol, e la colorazione è nettamente diversa.

che cristallizzato dall'acqua per aggiunta di poco alcool, si ottiene in prismetti bianchi, fusibili a 178°.

I. Gr. 0,2038 di sostanza diedero gr. 0,5432 di anidride carbonica e gr. 0,1112 di acqua.

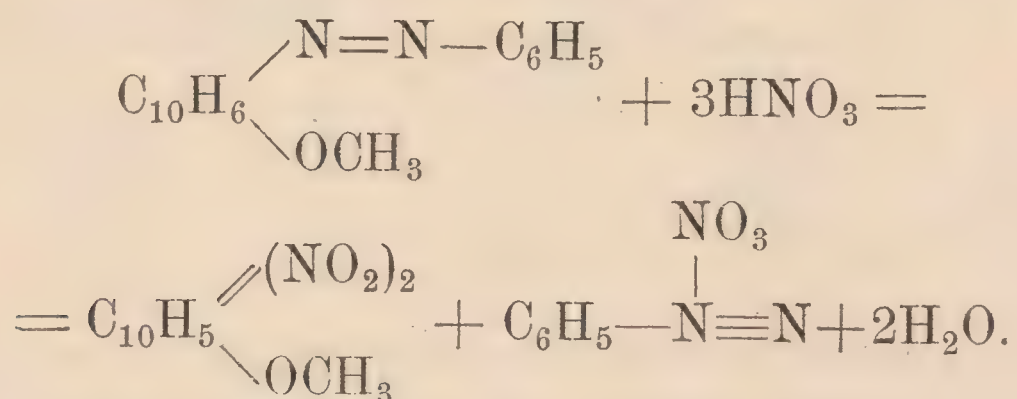
II. Gr. 0,1038 di sostanza diedero cc. 6 di azoto ($H_0 = 736,447$ $t = 18°$), ossia gr. 0,006763.

Cioè su cento parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_{13}H_{13}NO_2$
Carbonio	72,69	—	72,55
Idrogeno	6,06	—	6,04
Azoto	—	6,51	6,51

Per azione dell'acido nitrico di densità 1,40 (65 °/₀ circa) sull'etere metilico del fenilazoβnaftol avviene la seguente reazione:

$$C_{10}H_6\begin{cases}N=N-C_6H_5\\OCH_3\end{cases} + 3HNO_3 =$$

$$= C_{10}H_5\begin{cases}(NO_2)_2\\OCH_3\end{cases} + C_6H_5-\overset{\displaystyle NO_3}{\overset{|}{N}}\equiv N + 2H_2O.$$

Ecco in che modo abbiamo operato: gr. 2,62 di etere metilico ($^1/_{100}$ di grammomolecola) si trattano in pallone raffreddando bene con 100 gr. di acido nitrico (1,40); si ottiene una soluzione rossa, che viene, lentamente e agitando bene, scaldata su bagnomaria: appena il liquido è decolorato e incomincia a svilupparsi azoto, si raffredda energicamente raffreddando in ghiaccio e gettando nel pallone ghiaccio pesto: si può ottenere in tal modo un rapidissimo ed energico raffreddamento, che impedisce ogni ulteriore decomposizione del nitrato di fenildiazonio formatosi.

Il liquido della reazione viene diluito a questo punto con acqua fredda, e si ottiene così un precipitato costituito dall'etere greggio dell' 1-6-dinitro-2-naftol, che si separa per filtrazione dalla soluzione di nitrato di fenildiazonio, che viene fatta gocciolare in una soluzione fortemente alcalina di βnaftol col raffreddamento solito in simili casi. Si ottiene un precipitato giallo-rosso di fenilazoβnaftol, fusibile dopo cristallizzazione dall'alcool a 132-133°.

Gr. 0,1458 di sostanza fornirono gr. 0,4146 di anidride carbonica e gr. 0,0678 di acqua.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{12}N_2O$
Carbonio	77,55	77,41
Idrogeno	5,16	4,83

L' 1-6-dinitro-2-naftol-metiletere greggio viene cristallizzato ripetutamente dall'alcool, e si ha infine in forma di aghi finissimi, di color giallo pallido, fusibili a 157-158°.

I. Gr. 0,4161 di sostanza diedero gr. 0,8050 di anidride carbonica e gr. 0,1238 di acqua.

II. Gr. 0,1951 di sostanza fornirono cc. 19,2 di azoto ($H_0 = 734,340$ $t = 14°$), ossia gr. 0,021902.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{11}H_8N_2O_5$
	I	II	
Carbonio	52,76	—	53,22
Idrogeno	3,30	—	3,22
Azoto	—	11,22	11,29

È molto solubile in cloroformio, meno nell'alcool e nel benzolo, pochissimo nella ligroina. Si scioglie con colorazione gialla nell'acido solforico concentrato. Scaldato all'ebollizione con idrato potassico al 25 °/₀, si idrolizza facilmente in alcool metilico e in 1-6-dinitro-2-naftol, che cristallizzato dall'acido acetico fonde a 191-192°, secondo i dati di Hewitt e Auld (1).

Il rendimento della reazione, tra etere metilico del fenilazo-βnaftol e acido nitrico, in prodotti pesati allo stato greggio, è quantitativo.

L'azione dell'acido nitrico (1,42) sull'unico etere degli arilazo-βnaftoli conosciuto allo stato impuro, l'etere etilico del fenilazo-βnaftol, venne studiata da Meldola e Morgan (2), che isolarono l' 1-6-dinitro-2-naftoletiletere. O. Schmidt (3) fece agire l'acido nitrico fumante su alcuni coloranti ossiazoici, mettendo per primo in evidenza la formazione di un nitrato di diazonio in questa

(1) " Journ. Chem. Soc. „, *81*, 1202 (1902).
(2) " Journ. Chem. Soc. „, *55*, 608 (1889).
(3) B. *38*, 3201, 4022 (1905).

reazione. Noi abbiamo sostituito all'acido nitrico fumante, che ha un'azione troppo energica, quello a 1,40, che ci permette di applicare la reazione in modo generale a tutti gli ossiazocomposti, e a questo proposito riferiremo in una prossima Nota.

Etere metilico dell'O-Tolilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases} N{=}N(1)C_6H_4(2)CH_3(1) \\ OCH_3 \quad (2) \end{cases}$

Operando nello stesso modo descritto a proposito del fenilazoβnaftol e colle stesse quantità di sostanza, si ottiene dall'o-tolilazoβnaftol l'etere metilico, che cristallizzato dall'alcool, dove è molto solubile a caldo e discretamente anche a freddo, è costituito da fogliette rosse, fusibili a 58°.

I. Gr. 0,1392 di sostanza fornirono gr. 0,4004 di anidride carbonica e gr. 0,0720 di acqua.

II. Gr. 0,1168 di sostanza diedero cc. 10,5 di azoto ($H_0 = 726,940$ $t = 16°$), ossia gr. 0,011779.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O$
	I	II	
Carbonio	78,42	—	78,26
Idrogeno	5,74	—	5,79
Azoto	—	10,08	10,14

Facilmente solubile in tutti i principali solventi, anche nell'etere di petrolio e nella ligroina, si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rosso rubino; negli acidi minerali diluiti si scioglie con colorazione rossa, dando origine ai sali corrispondenti.

Il cloridrato $C_{18}H_{16}N_2O.HCl$, ottenuto aggiungendo alla soluzione del composto in etere anidro una soluzione di acido cloridrico in etere in piccolo eccesso, è costituito da piccoli aghi verde cantaride.

Gr. 0,2313 di sostanza impiegarono cc. 7,5 di soluzione $\frac{N}{10}$ di nitrato di argento, corrispondenti a gr. 0,026625 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{17}N_2OCl$
Cloro	11,51	11,36

Poco stabile, viene idrolizzato facilmente dall'acqua e decomposto dall'aria umida.

L'etere metilico dell'o-tolilazoβnaftol scaldato con acido cloridrico diluito si scinde facilmente in alcool metilico e in o-tolilazoβnaftol, fondente a 132°.

I. Gr. 0,1056 di sostanza fornirono gr. 0,3006 di anidride carbonica e gr. 0,0514 di acqua.

II. Gr. 0,2428 di sostanza fornirono gr. 0,6920 di anidride carbonica e gr. 0,1186 di acqua.

III. Gr. 0,0735 di sostanza diedero cc. 7 di azoto ($H_0 = 732,051$ $t = 17°$), ossia gr. 0,007875.

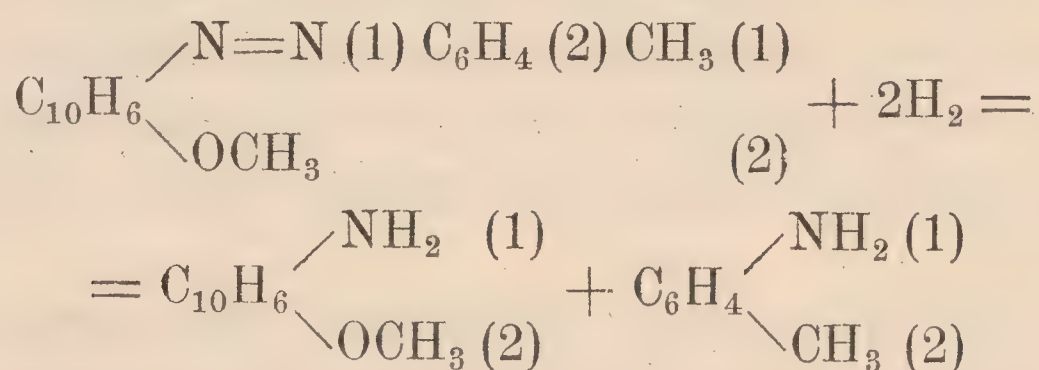
IV. Gr. 0,1984 di sostanza diedero cc. 18 di azoto ($H_0 = 732,051$ $t = 15°$), ossia gr. 0,020415.

Cioè su cento parti:

	trovato				calc. per $C_{17}H_{14}N_2O$
	I	II	III	IV	
Carbonio	77,63	77,72	—	—	77,86
Idrogeno	5,40	5,42	—	—	5,34
Azoto	—	—	10,71	10,28	10,68

L'etere metilico, ridotto nel modo solito con polvere di zinco e acido acetico, dà luogo a formazione di etere metilico dell' 1-amido-2-naftol e di o-toluidina secondo l'equazione:

$$C_{10}H_6\begin{cases} N{=}N\ (1)\ C_6H_4\ (2)\ CH_3\ (1) \\ OCH_3\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad (2) \end{cases} + 2H_2 =$$

$$= C_{10}H_6\begin{cases} NH_2\ (1) \\ OCH_3\ (2) \end{cases} + C_6H_4\begin{cases} NH_2\ (1) \\ CH_3\ (2) \end{cases}$$

Si ottennero dal liquido distillato dal prodotto della reazione in corrente di vapore i noti aghi bianchi di etere metilico dell' 1-amido-2-naftol, fusibili a 53°, nonchè le reazioni sulla soluzione acquosa con cloruro ferrico e con bicromato potassico. L'o-toluidina venne dimostrata nelle prime porzioni del distillato trasformandola in o-acetotoluide fusibile a 110°.

Etere metilico del p-tolilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N(1)C_6H_4(4)CH_3 & (1)\\ OCH_3 & (2)\end{cases}$

Questo composto venne ottenuto nello stesso modo dei precedenti. Cristallizzato dall'alcool, si ha in forma di tavolette ben sviluppate di color rosso granato, fusibili a 68°.

I. Gr. 0,2017 di sostanza fornirono gr. 0,5784 di anidride carbonica e gr. 0,1094 di acqua.

II. Gr. 0,1044 di sostanza diedero cc. 9,2 di azoto ($H_0 = 745,038$ $t = 17°$), ossia gr. 0,010536.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O$
	I	II	
Carbonio	78,20	—	78,26
Idrogeno	6,02	—	5,79
Azoto	—	10,09	10,14

Si scioglie bene in tutti i solventi organici; nell'alcool è relativamente poco solubile a freddo e molto a caldo. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con magnifica colorazione rosso rubino. È pure solubile con colorazione rossa negli acidi minerali diluiti formando i sali corrispondenti.

Il cloridrato $C_{18}H_{16}N_2O.HCl$ venne ottenuto, mescolando la soluzione eterea con acido cloridrico, sciolto in etere, in piccolo eccesso, sotto forma di minutissimi aghetti di color verde a riflesso metallico.

Gr. 0,7156 di sostanza diedero gr. 0,3400 di cloruro di argento, corrispondenti a gr. 0,084065 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{17}N_2OCl$
Cloro	11,74	11,36

Il cloridrato, che è solubile senza decomposizione in acido cloridrico diluito, si idrolizza invece facilmente con acqua, trasformandosi nell'etere metilico (P. F. 68°): anche all'aria umida è poco stabile e dopo poco tempo ha perduto completamente l'acido cloridrico.

Il p-tolilazoβnaftolmetiletere scaldato a ricadere con acidi diluiti si idrolizza facilmente trasformandosi quantitativamente in p-tolilazoβnaftol, che cristallizzato dall'alcool fonde a 135°.

I. Gr. 0,2112 di sostanza fornirono gr. 0,6016 di anidride carbonica e gr. 0,1032 di acqua.

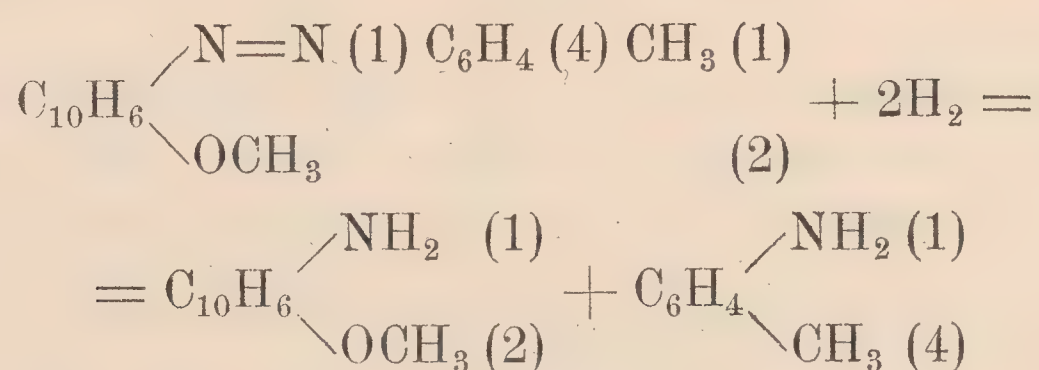
II. Gr. 0,1032 di sostanza diedero cc. 9,5 di azoto ($H_0 = 732,051$ $t = 17°$), ossia gr. 0,010688.

Cioè su cento parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O$
Carbonio	77,68	—	77,86
Idrogeno	5,42	—	5,34
Azoto	—	10,35	10,68

Per azione dell'idrogeno nascente (polvere di zinco e acido acetico sulla soluzione alcoolica dell'etere) si scinde secondo l'equazione:

$$C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N\,(1)\,C_6H_4\,(4)\,CH_3\,(1) \\ OCH_3 \qquad\qquad\qquad (2) \end{cases} + 2H_2 =$$

$$= C_{10}H_6 \begin{cases} NH_2 \ (1) \\ OCH_3\,(2) \end{cases} + C_6H_4 \begin{cases} NH_2\,(1) \\ CH_3\,(4) \end{cases}$$

La p-toluidina venne constatata nelle prime porzioni del distillato ottenuto, in corrente di vapore dal prodotto della reazione, trasformandola in p-acetotoluide, fusibile a 153°. L'etere metilico dell' 1-amido-2-naftol venne caratterizzato, oltrechè colle reazioni del cloruro ferrico e del bicromato potassico, col punto di fusione e coll'analisi.

Gr. 0,1320 di sostanza diedero cc. 9,5 di azoto ($H_0 = 733,340$ $t = 18°$), ossia gr. 0,010662.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{11}H_{11}NO$
Azoto	8,07	8,09

Inoltre venne trasformato in monoacetilderivato:

$$C_{10}H_6 \begin{cases} NH.C_2H_3O \ (1) \\ OCH_3 \qquad\quad (2) \end{cases}$$

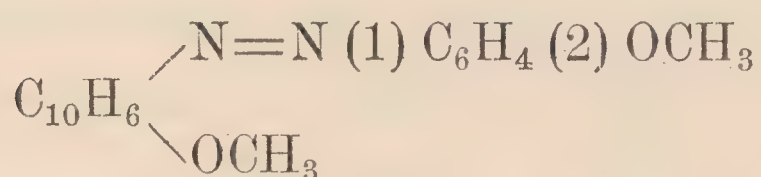
fusibile a 178°.

Gr. 0,1335 di sostanza fornirono gr. 0,3564 di anidride carbonica e gr. 0,0768 di acqua.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{13}H_{13}NO_2$
Carbonio	72,80	72,55
Idrogeno	6,39	6,04

Etere dimetilico dell'o-ossifenilazoβnaftol

$$C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N\ (1)\ C_6H_4\ (2)\ OCH_3\\ OCH_3\end{cases}$$

Venne preparato collo stesso procedimento dei precedenti: costituisce, cristallizzato dall'alcool, una massa cristallina di fogliette, riunite in mammelloni, di color rosso vivo, con riflessi dorati: fonde a 93-94°.

I. Gr. 0,2314 di sostanza fornirono gr. 0,6260 di anidride carbonica e gr. 0,1200 di acqua.

II. Gr. 0,2390 di sostanza diedero cc. 20,5 di azoto ($H_0 = 738,806$ $t = 17°$), ossia gr. 0,023282.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O_2$
	I	II	
Carbonio	73,78	—	73,97
Idrogeno	5,76	—	5,47
Azoto	—	9,74	9,58

Molto solubile a caldo nei comuni solventi, è meno solubile a freddo; la differenza di solubilità è specialmente notevole per l'alcool etilico. In acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{18}H_{16}N_2O_2.HCl$ venne ottenuto sciogliendo l'etere in acido cloridrico diluito a caldo, sotto forma di minutissimi aghetti di color verde smeraldo, che si separano per raffreddamento della soluzione rossa.

Gr. 0,2488 di sostanza impiegarono cc. 7,6 di soluzione $\frac{N}{10}$ di nitrato d'argento, corrispondenti a gr. 0,026980 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{17}N_2O_2Cl$
Cloro	10,84	10,80

Ha il comportamento dei cloridrati precedenti.

Facilmente saponificato dall'acido cloridrico diluito all'ebollizione, per quanto riguarda il metossile del nucleo naftalinico, l'etere dimetilico si scinde in alcool metilico e in o-anisilazo-βnaftol, fusibile a 178°.

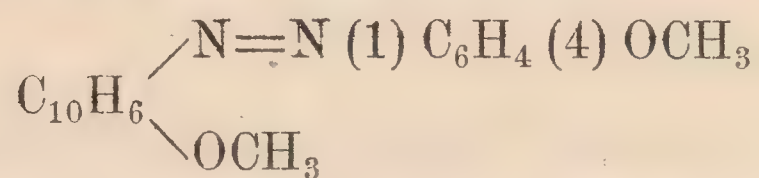
Gr. 0,1659 di sostanza fornirono gr. 0,4469 di anidride carbonica e gr. 0,0776 di acqua.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O_2$
Carbonio	73,46	73,88
Idrogeno	5,19	5,03

L'etere dimetilico dell'o-ossifenilazoβnaftol ridotto con polvere di zinco e acido acetico si scinde in o-anisidina e in etere metilico dell' 1-amido-2-naftol, fusibile a 53°.

Etere dimetilico del p-ossifenilazoβnaftol

$$C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N\,(1)\,C_6H_4\,(4)\,OCH_3 \\ OCH_3 \end{cases}$$

Il p-ossifenilazoβnaftol $C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N(1)C_6H_4(4)OH \\ OH \end{cases}$ venne ottenuto facendo agire il cloruro di p-ossifenildiazonio sul βnaftol in soluzione alcalina. Cristallizzato dall'alcool metilico si ha sotto forma di magnifici aghi verde-cantaride, fondenti a 194°.

I. Gr. 0,3181 di sostanza fornirono gr. 0,8426 di anidride carbonica e gr. 0,1451 di acqua.

II. Gr. 0,1207 di sostanza diedero cc. 11,2 di azoto ($H_0 = 742,038$ $t = 17°$), ossia gr. 0,012775.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{16}H_{12}N_2O_2$
	I	II	
Carbonio	72,33	—	72,72
Idrogeno	5,06	—	4,54
Azoto	—	10,58	10,60

Cristallizza in fogliette dall'alcool etilico, in aghi dall'alcool metilico: le due forme sono dotate di uno splendore metallico verde cantaride. Il p-ossifenilazo-βnaftol è dotato di una piccola solubilità negli altri solventi organici, quali il cloroformio, il benzolo, il solfuro di carbonio: è quasi insolubile nella ligroina.

L'acetilderivato $C_{10}H_6\langle{}^{N=N-C_6H_4OC_2H_3O}_{OH}$, ottenuto per azione dell'acido acetico, anidride acetica e acetato sodico sull'ossiazocomposto, cristallizza dall' alcool etilico in fini aghi rosso-arancio, lucenti, fusibili a 115°.

Gr. 0,1928 di sostanza fornirono gr. 0,4972 di anidride carbonica e gr. 0,0840 di acqua.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{14}N_2O_3$
Carbonio	70,33	70,58
Idrogeno	4,84	4,57

È solubile nell'alcool discretamente a caldo e poco a freddo, molto solubile in cloroformio e benzolo, poco in ligroina.

Il benzoilderivato $C_{10}H_6\langle{}^{N=N-C_6H_4OC_7H_5O}_{OH}$, ottenuto col metodo Schotten-Baumann, cristallizza dall'alcool in fini aghi rossi, fusibili a 164°.

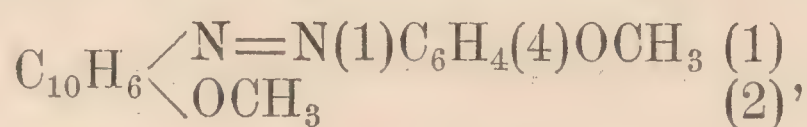
Gr. 0,2118 di sostanza fornirono gr. 0,5802 di anidride carbonica e gr. 0,0826 di acqua.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{23}H_{16}N_2O_3$
Carbonio	74,71	75,00
Idrogeno	4,33	4,34

Pochissimo solubile nell'alcool a caldo, quasi insolubile a freddo, è pure poco solubile nel cloroformio e nel benzolo, quasi insolubile in ligroina.

Il p-ossifenilazoβnaftol, trattato con solfato di metile e idrato sodico, nelle stesse condizioni degli o-ossiazocomposti precedenti, si trasforma in etere dimetilico

$$C_{10}H_6\langle{}^{N=N(1)C_6H_4(4)OCH_3\ (1)}_{OCH_3\ \qquad\qquad\qquad (2)},$$

che cristallizzato dall'alcool si ottiene in aghi prismatici, ben sviluppati, fondenti a 107°.

I. Gr. 0,3680 di sostanza fornirono gr. 0,9922 di anidride carbonica e gr. 0,1858 di acqua.

II. Gr. 0,1000 di sostanza diedero cc. 8,7 di azoto ($H_0 = 736,806$ $t = 18°$), ossia gr. 0,009811.

Cioè su cento parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O_2$
Carbonio	73,53	—	73,97
Idrogeno	5,60	—	5,47
Azoto	—	9,81	9,58

Molto solubile a caldo, meno a freddo nell'alcool, è solubilissimo nell'etere, nel cloroformio, nel benzolo: nella ligroina si scioglie poco a caldo, pochissimo a freddo. In acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rossa.

L'etere dimetilico del p-ossifenilazoβnaftol, scaldato con acido cloridrico $^2/_1$ N, dà una soluzione colorata in rosso intenso, dalla quale per raffreddamento cristallizza il cloridrato $C_{18}H_{16}N_2O_2.HCl$, in forma di minutissimi aghetti di color verde smeraldo con riflessi metallici.

Gr. 0,2024 di sostanza impiegarono cc. 6 di soluzione $\frac{N}{10}$ di nitrato d'argento, corrispondenti a gr. 0,021300 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{17}N_2O.Cl$
Cloro	10,52	10,80

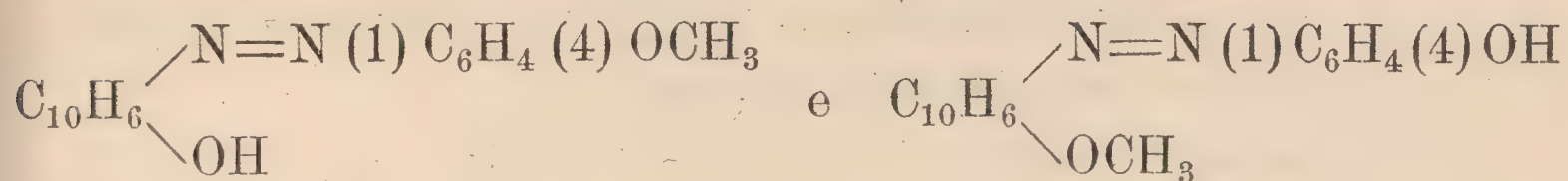
Questo cloridrato ha il comportamento dei precedentemente descritti.

L'etere dimetilico del p-ossifenilazoβnaftol viene scisso per ebollizione con acidi diluiti in alcool metilico e in p-anisilazoβnaftol, fusibile a 137°. Coll'idrogeno nascente si trasforma in p-anisidina, e in etere metilico dell'1-amido-2-naftol, fusibile a 53°.

Eteri monometilici del p-ossifenilazoβnaftol.

Operando nelle condizioni prima descritte, ma sostituendo

alla soluzione di idrato sodico al 30 % quella al 15 %, si possono ottenere i due eteri monometilici, prevedibili teoricamente:

$$C_{10}H_6\begin{matrix} \diagup N{=}N\,(1)\,C_6H_4\,(4)\,OCH_3 \\ \diagdown OH \end{matrix} \quad e \quad C_{10}H_6\begin{matrix} \diagup N{=}N\,(1)\,C_6H_4\,(4)\,OH \\ \diagdown OCH_3 \end{matrix}$$

Il primo, che è identico col p-anisilazoβnaftol, essendo insolubile negli alcali, si separa dal liquido alcalino e cristallizzato dall'alcool si ottiene fusibile a 137°.

Gr. 0,1598 di sostanza diedero cc. 14,5 di azoto ($H_0 = 734,815$ $t = 17°$), ossia gr. 0,016376.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O_2$
Azoto	10,24	10,07

Il secondo, solubile negli alcali, si ottiene, precipitandone la soluzione alcalina ottenuta nella reazione, con acido acetico, e facendo bollire con alcool metilico il precipitato ottenuto: il residuo, cristallizzato dall'alcool, forma piccole fogliette rossobrune lucenti, fusibili verso 225° con decomposizione.

I. Gr. 0,1456 di sostanza fornirono gr. 0,3912 di anidride carbonica e gr. 0,0718 di acqua.

II. Gr. 0,1187 di sostanza diedero cc. 10,2 di azoto ($H_0 = 743,038$ $t = 17°$), ossia gr. 0,011650.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O_2$
	I	II	
Carbonio	73,21	—	73,38
Idrogeno	5,47	—	5,03
Azoto	—	9,89	10,07

Pochissimo solubile a freddo nell'alcool, nel cloroformio, nel benzolo, è leggermente più solubile a caldo: nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rossa. È pure solubile facilmente negli acidi diluiti a caldo, con formazione di sali, che per raffreddamento cristallizzano. È solubile negli alcali diluiti, nell'ammoniaca e nei carbonati alcalini, con colorazione da giallo ad arancio a seconda della concentrazione della soluzione.

Il cloridrato $C_{17}H_{14}N_2O_2.HCl$, ottenuto per raffreddamento

della soluzione dell'etere in acido cloridrico diluito bollente, forma aghetti di un bel verde smeraldo con riflessi metallici.

Gr. 0,1083 di sostanza diedero gr. 0,0479 di cloruro di argento, contenenti gr. 0,011843 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{15}N_2O_2Cl$
Cloro	10,93	11,28

L'etere, scaldato con acidi diluiti, si scinde in alcool metilico e in p-ossifenilazoβnaftol, fusibile a 194°.

Gr. 0,1900 di sostanza diedero cc. 17 di azoto ($H_0 = 738,467$ $t = 15°$), ossia gr. 0,019451.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{16}H_{12}N_2O_2$
Azoto	10,23	10,60

L'etere trattato nel modo solito con eccesso di solfato di metile e soluzione di idrato sodico al 30 % si trasforma in etere dimetilico del p-ossifenilazoβnaftol (etere metilico del p-anisilazoβnaftol) fusibile a 107°.

Gr. 0,0935 di sostanza diedero cc. 8 di azoto ($H_0 = 738,209$ $t = 15°$), ossia gr. 0,009150.

Cioè su cento parti:

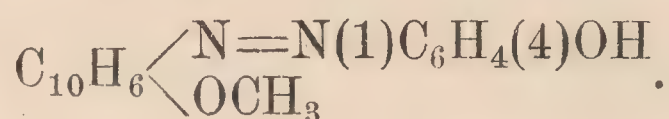
	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O_2$
Azoto	9,78	9,58

Con idrogeno nascente si scinde in etere metilico dell'1-amido-2-naftol e in p-amidofenol, che possono venir agevolmente separati per distillazione in corrente di vapore del prodotto della riduzione, fortemente alcalinizzato: passa soltanto l'etere metilico dell'1-amido-2-naftol, riconoscibile al punto di fusione 53° degli aghi separatisi dalla soluzione acquosa, come pure alle reazioni con cloruro ferrico e con bicromato potassico. Il p-amidofenol venne riconosciuto colla reazione di Lossen (1).

Questo etere monometilico del p-ossifenilazoβnaftol, per la sua solubilità negli alcali e per il suo comportamento alla sa-

(1) A. *175*, 296 (1875).

ponificazione, alla metilazione e alla riduzione, deve contenere il gruppo metile sostituente l'atomo di idrogeno dell'ossidrile naftalinico, e perciò possedere la costituzione

$$C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N(1)C_6H_4(4)OH \\ \diagdown OCH_3\end{matrix}.$$

Nella reazione tra solfato di metile e p-ossifenilazoβnaftol in presenza di soluzione di idrato sodico al 15 $^0/_0$ si ha formazione dunque di p-anisilazoβnaftol e di p-ossifenilazoβnaftolmetiletere (circa il 10 $^0/_0$), e si formano inoltre piccole quantità di etere dimetilico.

Etere metilico dell'o-anisilazo-βnaftol $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N(1)C_6H_4(2)OCH_3 \\ \diagdown OCH_3\end{matrix}$

Questo etere, che è identico coll'etere dimetilico ottenuto dall'o-ossifenilazoβnaftol, si può anche preparare per azione del solfato di metile e idrato sodico al 30 $^0/_0$ sull'o-anisilazoβnaftol, procedendo nel modo già più volte accennato. Si ottiene cristallizzato dall'alcool sotto forma di pagliette dorate, di color rosso vivo, fusibili a 93-94°.

Gr. 0,2050 di sostanza diedero cc. 17,7 di azoto ($H_0 = 732,629$ $t = 20°$), ossia gr. 0,019675.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O_2$
Azoto	9,59	9,58

Etere etilico dell'o-anisilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N\ (1)\ C_6H_4\ (2)\ OCH_3 \\ \diagdown OC_2H_5\end{matrix}$

Facendo agire un piccolo eccesso di solfato di etile sull'o-anisilazoβnaftol in presenza di idrato sodico al 30 $^0/_0$, si ottiene l'etere etilico, che cristallizza dall'alcool in larghe fogliette di color rosso vivo, fusibili a 75°.

I. Gr. 0,2384 di sostanza fornirono gr. 0,6526 di anidride carbonica e gr. 0,1330 di acqua.

II. Gr. 0,1488 di sostanza diedero cc. 11,7 di azoto ($H_0 = 734,221$ $t = 15°$), ossia gr. 0,013309.

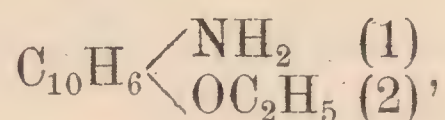
Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O_2$
	I	II	
Carbonio	74,65	—	74,50
Idrogeno	6,15	—	5,88
Azoto	—	8,94	9,15

Solubile molto a caldo, discretamente a freddo, in alcool, cloroformio, benzolo, meno in ligroina, si scioglie in acido solforico concentrato con colorazione rossa. È molto solubile anche a freddo negli acidi minerali diluiti, con colorazione rossa, formando i sali corrispondenti.

Il cloridrato $C_{19}H_{18}N_2O_2.HCl$, ottenuto per azione dell'acido cloridrico sciolto in etere sulla soluzione eterea del composto, forma una sostanza cristallina rossa, facilmente idrolizzata dall'acqua e poco stabile anche all'aria umida.

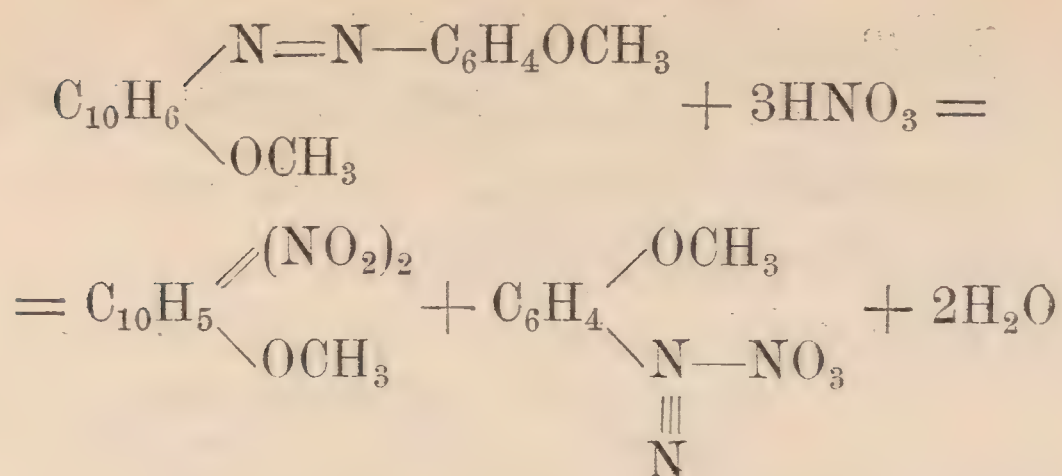
L'etere etilico riscaldato all'ebollizione con acido cloridrico diluito viene facilmente idrolizzato in alcool etilico e in o-anisilazoβnaftol, fusibile a 178°. Con idrogeno nascente si scinde in o-anisidina e in etere etilico dell'1-amido-2-naftol:

$$C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup NH_2 \ (1) \\ \diagdown OC_2H_5 \ (2)\end{matrix},$$

fusibile a 50° e capace di dare in soluzione acquosa colorazione azzurra con cloruro ferrico e precipitato giallo con bicromato potassico.

Etere metilico del p-anisilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{matrix}\diagup N{=}N\,(1)\,C_6H_4\,(4)\,OCH_3 \\ \diagdown OCH_3\end{matrix}$

Si ottiene quest'etere, fusibile a 107°, e identico con quello ottenuto dal p-ossifenilazoβnaftol e dal p-ossifenilazoβnaftolmetiletere, facendo agire nelle stesse condizioni il solfato di metile sul p-anisilazoβnaftol. Se si fa agire su di esso l'acido nitrico (1,40), operando precisamente come abbiamo descritto a proposito dell'etere metilico del fenilazoβnaftol, avviene la seguente reazione:

$$C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N{-}C_6H_4OCH_3\\ OCH_3\end{cases} + 3HNO_3 =$$

$$= C_{10}H_5\begin{cases}(NO_2)_2\\ OCH_3\end{cases} + C_6H_4\begin{cases}OCH_3\\ N{-}NO_3\\ \ \,\equiv N\end{cases} + 2H_2O$$

L'etere metilico dell'1-6-dinitro-2-naftol, cristallizzato dall'alcool, fuse a 157-158°. Il nitrato di p-anisildiazonio venne caratterizzato trasformandolo in p-anisilazoβnaftol, che si ottenne dopo cristallizzazione dall'alcool fusibile a 137°.

Gr. 0,1200 di sostanza diedero cc. 12,7 di azoto ($H_0 = 728,233$ $t = 15°$), ossia gr. 0,011660.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O_2$
Azoto	9,71	10,07

Etere etilico del p-anisilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N\,(1)\,C_6H_4\,(4)\,OCH_3\\ OC_2H_5\end{cases}$

Questo etere, ottenuto per azione del solfato di etile sul p-anisilazoβnaftol, si ha, cristallizzato dalla benzina di petrolio, in forma di grandi tavole prismatiche, rosse, fusibili a 52-53°.

Gr. 0,1574 di sostanza diedero cc. 12,7 di azoto ($H_0 = 727,644$ $t = 20°$), ossia gr. 0,014020.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O_2$
Azoto	8,90	9,15

Molto solubile in tutti i solventi organici e negli acidi minerali diluiti, si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{19}H_{18}N_2O_2.HCl$ venne ottenuto sciogliendo l'etere in acido cloridrico diluito bollente: per raffreddamento cristallizzò sotto forma di aghi bruno-verdi.

L'etere etilico scaldato all'ebollizione con acidi diluiti si scinde in alcool etilico e in p-anisilazoβnaftol, fusibile a 137°.

Gr. 0,1924 di sostanza diedero cc. 17 di azoto ($H_0 = 733,34$ $t = 19°$), ossia gr. 0,018998.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{17}H_{14}N_2O_2$
Azoto	9,87	10,07

L'etere etilico del p-anisilazoβnaftol per azione dell'idrogeno nascente si scinde in p-anisidina, che venne riconosciuta colla nota sua reazione colorata, e in etere etilico dell'1-amido-2-naftol, $C_{10}H_6\langle{}^{NH_2\ (1)}_{OC_2H_5\ (2)}$, che costituisce una massa cristallina fusibile verso 50° e bollente a pressione ordinaria verso 300°.

I. Gr. 0,2967 di sostanza diedero gr. 0,8330 di anidride carbonica e gr. 0,1950 di acqua.

II. Gr. 0,1236 di sostanza diedero gr. 0,3487 di anidride carbonica e gr. 0,0806 di acqua.

III. Gr. 0,1169 di sostanza diedero cc. 8 di azoto ($H_0 = 733,34$ $t = 19°$), ossia gr. 0,008940.

Cioè su cento parti:

	trovato			calcolato per $C_{12}H_{13}NO$
	I	II	III	
Carbonio	76,57	76,94	—	77,00
Idrogeno	7,30	7,24	—	6,95
Azoto	—	—	7,64	7,48

L'etere etilico dell'1-amido-2-naftol, scaldato con anidride acetica e acetato sodico in soluzione acetica, si trasforma in acetilderivato $C_{10}H_6\langle{}^{NH.C_2H_3O\ (1)}_{OC_2H_5\ \ \ \ \ \ (2)}$, fusibile a 145°, secondo i dati di Gaess (1).

Gr. 0,1472 di sostanza diedero cc. 8 di azoto ($H_0 = 740,109$ $t = 19°$), ossia gr. 0,009024.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{14}H_{15}NO_2$
Azoto	6,13	6,11

(1) " Journ. prakt. Chem. „ [2] *43*, 27 (1891).

Etere metilico dell'o-fenetilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N(1)C_6H_4(2)OC_2H_5\\OCH_3\end{cases}$

Si ottiene, nel modo avanti descritto, dall'o-fenetilazoβnaftol, e cristallizzato dall'alcool forma aghi rossi, piatti, lunghi parecchi centimetri, che fondono a 136°.

I. Gr. 0,1875 di sostanza fornirono gr. 0,5142 di anidride carbonica e gr. 0,1062 di acqua.

II. Gr. 0,1414 di sostanza fornirono cc. 11,3 di azoto (H_0 = 736,089 t = 18°), ossia gr. 0,012730.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O_2$
	I	II	
Carbonio	74,79	—	74,50
Idrogeno	6,29	—	5,88
Azoto	—	8,97	9,15

Pochissimo solubile a freddo in alcool e ligroina, poco a caldo, è più solubile in benzolo e cloroformio: da tutti questi solventi si separa facilmente; se la soluzione si lascia raffreddare lentamente si ottengono lunghi aghi piatti di color rosso-ciliegia splendente; se invece si raffredda rapidamente (per esempio in miscuglio frigorifero) il composto si separa in forma di minutissime pagliette di color giallo oro, che però fondono esattamente a 136°, come gli aghi rosso-ciliegia. Si scioglie nell'acido solforico concentrato con colorazione rosso-violetta, e negli acidi diluiti con intensa colorazione rossa, formando i sali corrispondenti.

Coll'acido cloridrico dà il cloridrato $C_{19}H_{18}N_2O_2.HCl$, che venne preparato trattando con acido cloridrico sciolto in etere una soluzione del composto in etere anidro. È cristallizzato in fini aghi splendenti, di color verde metallico.

Gr. 0,3002 di sostanza impiegarono cc. 9 di soluzione $\frac{N}{10}$ di nitrato di argento, corrispondenti a gr. 0,031950 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{19}N_2O_2Cl$
Cloro	10,64	10,36

L'etere metilico, scaldato all'ebollizione con acidi diluiti, si trasforma in o-fenetilazoβnaftol, fusibile a 138°.

Gr. 0,1449 di sostanza diedero cc. 12 di azoto ($N_0 = 736,089$ $t = 18°$), ossia gr. 0,013519.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O_2$
Azoto	9,33	9,58

L'etere metilico ridotto con polvere di zinco e acido acetico si scinde in o-fenetidina e in etere metilico dell'1-amido-2-naftol, identificato pel punto di fusione 53° e per le reazioni con cloruro ferrico e con bicromato potassico.

Etere etilico dell'o-fenetilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases} N{=}N\,(1)\,C_6H_4\,(2)\,OC_2H_5 \\ OC_2H_5 \end{cases}$

Per azione di un piccolo eccesso di solfato di etile, in presenza di soluzione di idrato sodico al 30 %, sull'o-fenetilazoβnaftol, si ottiene facilmente l'etere etilico, che cristallizzato dall'alcool è costituito da piccoli aghi di color rosso chiaro, fusibili a 102°.

I. Gr. 0,1642 di sostanza fornirono gr. 0,4530 di anidride carbonica e gr. 0,0948 di acqua.

II. Gr. 0,1024 di sostanza diedero cc. 8 di azoto ($H_0 = 740,089$ $t = 17°$), ossia gr. 0,009100.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{20}H_{20}N_2O_2$
	I	II	
Carbonio	75,24	—	75,00
Idrogeno	6,35	—	6,25
Azoto	—	8,88	8,75

È pochissimo solubile a freddo nell'alcool e nella ligroina, più solubile nel benzolo e nel cloroformio. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rossa, nelle soluzioni diluite degli acidi minerali con colorazione rosso-violetta, formando con essi i rispettivi sali. Il cloridrato $C_{20}H_{20}N_2O_2.HCl$ venne ottenuto sotto forma di una polvere cristallina di color

rosso-bruno con riflesso metallico verde, trattando una soluzione del composto in etere anidro con acido cloridrico sciolto in etere. È dotato della piccola stabilità di fronte all'acqua, che è comune a tutti i precedenti.

L'etere etilico, scaldato all'ebollizione con acido cloridrico diluito, si scompone facilmente in alcool etilico e in o-fenetilazoβnaftol fusibile a 138°. Alla riduzione si scinde in o-fenetidina e in etere etilico dell'1-amido-2-naftol, fusibile a 50°.

Etere metilico del p-fenetilazoβnaftol $C_{10}H_6 \begin{cases} N{=}N(1)C_6H_4(4)OC_2H_5 \\ OCH_3 \end{cases}$

Ottenuto come i precedenti, cristallizza dell'alcool in lunghi aghi piatti, di color arancio, fusibili a 113°.

I. Gr. 0,2644 di sostanza fornirono gr. 0,7216 di anidride carbonica e gr. 0,1412 di acqua.

II. Gr. 0,1066 di sostanza diedero cc. 8,7 di azoto ($H_0 = 735,980$ $t = 18°$), ossia gr. 0,009800.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{19}H_{18}N_2O_2$
	I	II	
Carbonio	74,43	—	74,50
Idrogeno	5,93	—	5,88
Azoto	—	9,19	9,15

Come l'isomero orto è poco solubile a freddo in alcool e ligroina, un po' più solubile a caldo; si scioglie discretamente in benzolo e cloroformio; da tutte queste soluzioni raffreddate rapidamente si separa sotto forma di fogliette splendenti di color giallo oro.

In acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rosso-violetta, e negli acidi diluiti con intensa colorazione rossa e con formazione di sali. Coll'acido cloridrico diluito dà il cloridrato $C_{19}H_{18}N_2O_2.HCl$, che venne ottenuto, in cristalli di color verde con riflessi dorati, aggiungendo un piccolo eccesso di acido cloridrico sciolto in etere ad una soluzione del composto in etere anidro.

Gr. 0,1932 di sostanza impiegarono cc. 5,6 di soluzione $\frac{N}{10}$ di nitrato d'argento, corrispondenti a gr. 0,019880 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{19}H_{19}N_2O_2Cl$
Cloro	10,33	10,36

L'etere metilico, scaldato con acidi diluiti, si scinde facilmente in alcool metilico e in p-fenetilazoβnaftol, fusibile a 132°.

Gr. 0,1218 di sostanza diedero cc. 10,5 di azoto ($H_0 = 733,861$ $t = 16°$), ossia gr. 0,011893.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{18}H_{16}N_2O_2$
Azoto	9,75	9,58

L'etere metilico del p-fenetilazoβnaftol alla riduzione si scinde in p-fenetidina, identificata colle reazioni colorate caratteristiche, e in etere metilico dell'1-amido-2-naftol, che fonde a 53° e dà le reazioni con cloruro ferrico e con bicromato potassico.

Etere etilico del p-fenetilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases} N{=}N\,(1)\,C_6H_4\,(4)\,OC_2H_5 \\ OC_2H_5 \end{cases}$

Ottenuto collo stesso procedimento impiegato nella preparazione degli altri eteri etilici, è costituito, cristallizzato dall'alcool, da aghi di color giallo-ranciato, fusibili a 81°.

I. Gr. 0,1420 di sostanza fornirono gr. 0,3908 di anidride carbonica e gr. 0,0832 di acqua.

II. Gr. 0,2041 di sostanza diedero cc. 15,8 di azoto ($H_0 = 720,141$ $t = 17°$), ossia gr. 0,017483.

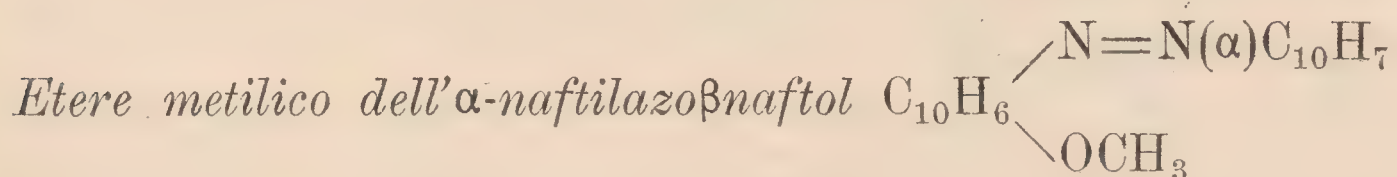
Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{20}H_{20}N_2O_2$
	I	II	
Carbonio	75,05	—	75,00
Idrogeno	6,51	—	6,25
Azoto	—	8,57	8,75

L'etere etilico del p-fenetilazoβnaftol è più solubile dell'isomero orto nell'alcool; si scioglie anche discretamente nel benzolo e nel cloroformio, meno nella ligroina. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rossa. Negli acidi mine-

rali diluiti è solubile facilmente con formazione di sali. Il cloridrato $C_{20}H_{20}N_2O_2.HCl$, ottenuto dalla soluzione eterea del composto per aggiunta di acido cloridrico sciolto in etere, costituisce una sostanza cristallizzata in fogliette di color rosso-rame con riflesso metallico. Questo cloridrato, come i precedenti, è poco stabile e viene già idrolizzato dall'acqua e dall'alcool a freddo.

Bollito con acidi diluiti, l'etere etilico si scinde in alcool etilico e in p-fenetilazoβnaftol, fusibile a 132°. Alla riduzione dà p-fenetidina, riconoscibile alle reazioni colorate, ed etere etilico dell'1-amido-2-naftol, fusibile a 50°.

Etere metilico dell'α-naftilazoβnaftol $C_{10}H_6\begin{cases}N{=}N(\alpha)C_{10}H_7\\OCH_3\end{cases}$

Ottenuto come i precedenti, quest'etere metilico cristallizza dall'alcool in fogliette di color rosso-bruno, fusibili a 67°.

I. Gr. 0,1704 di sostanza fornirono gr. 0,5036 di anidride carbonica e gr. 0,0806 di acqua.

II. Gr. 0,0774 diedero cc. 6,3 di azoto ($H_0 = 726,233$ $t = 18°$), ossia gr. 0,007001.

Cioè su cento parti:

	trovato I	trovato II	calcolato per $C_{21}H_{16}N_2O$
Carbonio	80,60	—	80,76
Idrogeno	5,25	—	5,12
Azoto	—	9,04	8,97

Molto solubile anche a freddo nell'alcool, nel benzolo, nel cloroformio e nell'etere, si scioglie meno nella benzina di petrolio. Nell'acido solforico concentrato è solubile con colorazione azzurra, che tende al violetto. Negli acidi minerali diluiti si scioglie con colorazione azzurro-violetta, formando i sali corrispondenti.

Il cloridrato $C_{21}H_{16}N_2O.HCl$, ottenuto nel modo solito per azione dell'acido cloridrico sciolto in etere sulla soluzione del composto in etere anidro, forma una sostanza cristallina di colore verde cantaride, pochissimo stabile, decomposta facilmente e istantaneamente dall'acqua, lentamente dall'aria umida.

Gr. 0,4231 di sostanza impiegarono cc. 11,7 di soluzione $\frac{N}{10}$ di nitrato d'argento, corrispondenti a gr. 0,041535 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{21}H_{17}N_2OCl$
Cloro	9,81	10,18

Scaldato all'ebollizione con acidi diluiti l'etere metilico dell'α-naftilazoβnaftol si scinde in alcool metilico e in α-naftilazoβnaftol, fusibile a 230°.

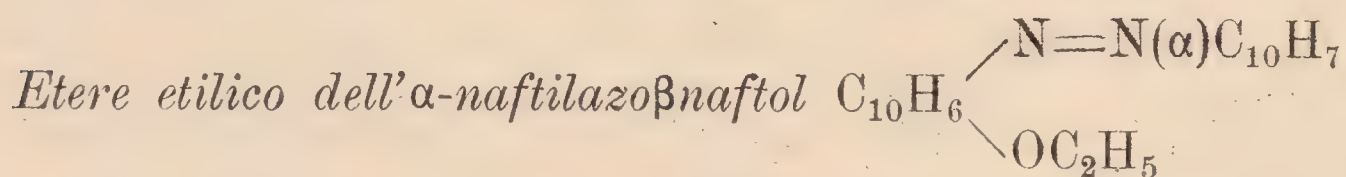
I. Gr. 0,1900 di sostanza fornirono gr. 0,5609 di anidride carbonica e gr. 0,0841 di acqua.

II. Gr. 0,1259 di sostanza diedero cc. 10,5 di azoto (H_0=736,089 t=18°), ossia gr. 0,011829.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{20}H_{14}N_2O$
	I	II	
Carbonio	80,51	—	80,53
Idrogeno	4,91	—	4,69
Azoto	—	9,39	9,39

Sottoposto a riduzione l'etere metilico si scinde in α-naftilamina e in etere metilico dell'1-amido-2-naftol, riconoscibile sia al punto di fusione 53°, sia alle reazioni caratteristiche con cloruro ferrico e con bicromato potassico.

Etere etilico dell'α-naftilazoβnaftol $C_{10}H_6\left<\begin{matrix}N{=}N(\alpha)C_{10}H_7\\OC_2H_5\end{matrix}\right.$

Cristallizzato dall'alcool si ha in aghi piatti, ben sviluppati, di color rosso-granata scuro, fusibili a 105-106°.

Gr. 0,1226 di sostanza diedero cc. 9,7 di azoto (H_0=732,629 t = 20°), ossia gr. 0,010782

Cioè su cento parti:

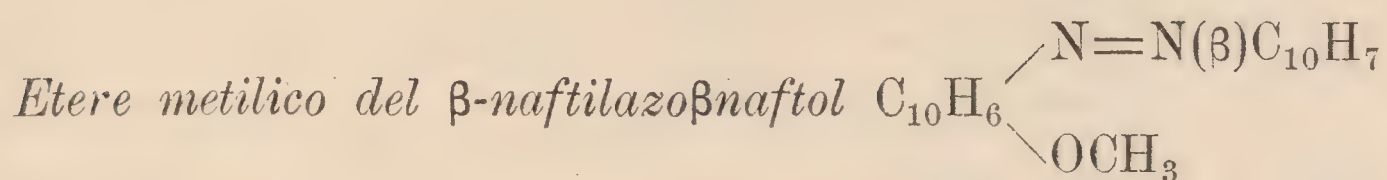
	trovato	calcolato per $C_{22}H_{18}N_2O$
Azoto	8,79	8,58

Si scioglie discretamente negli ordinari solventi e negli acidi diluiti, la soluzione in acido solforico concentrato è violetta per trasparenza, e azzurra per riflessione.

Il cloridrato $C_{22}H_{18}N_2O.HCl$, ottenuto per azione di un piccolo eccesso di soluzione eterea di acido cloridrico su una so-

luzione del composto in etere anidro, è costituito da una massa cristallina di color verde con riflesso metallico.

L'etere etilico, scaldato all'ebollizione con acidi diluiti, si decompone dando alcool etilico e α-naftilazoβnaftol, fusibile a 230°; ridotto con polvere di zinco e acido acetico, dà luogo a formazione di α-naftilamina e di etere etilico dell'1-amido-2-naftol, che venne riconosciuto sia al punto di fusione 50°, che alla colorazione azzurra con cloruro ferrico.

Etere metilico del β-*naftilazo*β*naftol* $C_{10}H_6\begin{cases} N{=}N(\beta)C_{10}H_7 \\ OCH_3 \end{cases}$

Cristallizza dall'alcool in bei prismetti rosso-granata, fusibili a 94-95°.

I. Gr. 0,2123 di sostanza fornirono gr. 0,6290 di anidride carbonica e gr. 0,1028 di acqua.

II. Gr. 0,1322 di sostanza diedero cc. 10,5 di azoto (H_0=723,479 t = 18°), ossia gr. 0,011624.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{21}H_{16}N_2O$
	I	II	
Carbonio	80,80	—	80,76
Idrogeno	5,38	—	5,12
Azoto	—	8,79	8,97

Facilmente solubile a caldo nella maggior parte dei solventi organici, quali il benzolo, la benzina, il cloroformio, il solfuro di carbonio, si scioglie meno a freddo: si separa dalla ligroina in laminette di lucentezza dorata. Nell'acido solforico concentrato si scioglie con colorazione rosso-violetta, e negli acidi minerali diluiti con colorazione rossa.

Il cloridrato $C_{21}H_{16}N_2O.HCl$, ottenuto aggiungendo soluzione di acido cloridrico in etere alla soluzione eterea del composto, è costituito da finissimi aghetti di color verde metallico.

Gr. 0,2469 di sostanza impiegarono cc. 6,9 di soluzione $\frac{N}{10}$ di nitrato d'argento, corrispondenti a gr. 0,024495 di cloro.

Cioè su cento parti:

	trovato	calcolato per $C_{21}H_{17}N_2OCl$
Cloro	9,92	10,18

Per azione degli acidi diluiti a caldo l'etere metilico si scinde in alcool metilico e in β-naftilazoβnaftol, fusibile a 176°.

I. Gr. 0,1654 di sostanza fornirono gr. 0,4886 di anidride carbonica e gr. 0,0738 di acqua.

II. Gr. 0,1448 di sostanza diedero cc. 12 di azoto ($H_0 = 726,351$ $t = 18°$), ossia gr. 0,013338.

Cioè su cento parti:

	trovato		calcolato per $C_{20}H_{14}N_2O$
	I	II	
Carbonio	80,56	—	80,53
Idrogeno	4,95	—	4,69
Azoto	—	9,20	9,39

Alla riduzione l'etere metilico del β-naftilazoβnaftol si scinde in βnaftilamina (P. F. 112°) e in etere metilico dell' 1-amido-2-naftol, il quale fonde a 53° e dà in soluzione acquosa la nota colorazione azzurra con cloruro ferrico, e inoltre precipita in giallo con bicromato potassico.

Torino, Istituto Chimico della R. Università.
Maggio 1912.

Sull'azione fotochimica delle resine.

Nota preliminare del Dr. FERDINANDO VIGNOLO-LUTATI.

(Con 1 Tavola).

Prima di riferire le ricerche dirette a chiarire un fenomeno poco noto, ed anche meno studiato — intendo dire l'azione fotochimica delle resine — ritengo interessante ed utile riportare le circostanze che mi condussero ad occuparmi del fenomeno stesso.

Già da parecchi anni avevo osservato il forte imbrunire di alcuni fogli del mio erbario, ma avendo senz'altro attribuito il fatto all'azione della luce, non ci avevo oltre badato, limitandomi a porre dei vetri gialli agli scaffali contenenti i pacchi delle piante. Ma in seguito studiai le speciali modalità colle quali il fenomeno si manifestava e non potendo più così facilmente ammettere la causa " luce ", cercai di chiarire la cosa.

Sono necessarie alcune premesse per la esatta comprensione dei fatti che verranno esposti. La carta, sede del fenomeno e che costituisce i fogli d'erbario (i fogli cioè sui quali vengono collocate le piante essiccate), è carta corrente da disegno (detta " carta da disegno per officine ") piuttosto spessa, leggermente rugosa, poco gommata e colorata in giallo-canarino-chiaro. Onde proteggere la pianta secca ogni foglio d'erbario vien posto entro un foglio piegato doppio (che possiamo indicare col nome di " involucro "); esso è di carta ordinaria, grossolana, niente gommata, piuttosto leggiera, di color bruno-grigiastro.

Il foglio d'erbario porta in basso, a sinistra, un cartellino bleu colle indicazioni relative alla pianta, parte stampate e parte scritte a mano; parimenti una etichetta più piccola, col nome solo della pianta, scritto in nero con inchiostro ordinario, è ingommato sull'involucro in basso, a destra.

Un certo numero di fogli vengono poi sovrapposti a formare un pacco, racchiuso fra due cartoni color marrone (della qualità detta " cartone-cuoio "). Il tutto è poi stretto con una cinghia.

In ogni pacco le entità botaniche sono ordinate per lettera di alfabeto per cui accade che qualche foglio sia sempre — od almeno sia stato per lungo tempo — il primo o l'ultimo d'un pacco.

Fatte queste indispensabili premesse, ecco il fenomeno constatato:

Il foglio d'erbario rimasto per alcuni anni a contatto del cartone (separato però dall' " involucro "), presenta la faccia volta verso il cartone fortemente imbrunita come se avesse subìta una leggiera bruciatura, salvo nelle regioni protette o dalla pianta, o dal cartellino del foglio stesso, o dalle listerelle che servono a fermare la pianta od, anche, dalla etichetta dell' " involucro ". Sollevando queste parti protettrici, se ne vede l'impronta esatta chiara su fondo oscuro (impronta negativa, quindi) (vedi fig. 1, 2, 3).

Notinsi ora le seguenti particolari circostanze:

1° Sotto la pianta il foglio ha conservato la tinta originale.

2° Nella zona sottostante alla etichetta dell' " involucro " la tinta del foglio è leggerissimamente oscurita.

3° Sotto il cartellino del foglio d'erbario la tinta è pure solo leggerissimamente oscurita, però si osservi: sotto le parole scritte a mano con inchiostro nero ordinario, ai sali di ferro, il foglio ha conservato la tinta originale, per cui sono su di esso abbastanza chiaramente riprodotte (vedi figure 1 e 2) in chiaro su fondo oscuro le parole stesse; mentre le parole in inchiostro da stampa nero non si rilevano e la tinta del foglio è uguale alla tinta generale che si osserva sotto il cartellino.

4° Le parole scritte a mano, sull'etichetta dell'involucro, con inchiostro nero ordinario, si rivelano pure, ma più debolmente.

5° Il primo foglio del pacco presenta così " impressionata " solo la faccia volta verso l'alto, cioè verso il cartone, mentre la faccia opposta, rivolta verso l'interno del pacco, non è alterata. Il foglio ultimo del pacco presenta, invece, " impressionata ", cioè imbrunita, la faccia volta in basso, cioè verso il cartone, mentre la superficie opposta, portante la pianta e rivolta verso l'interno del pacco è rimasta immutata, per modo che togliendo la pianta stessa od il cartellino non se ne osserva la benchè minima impronta.

6° Nè il secondo foglio, nè il penultimo del pacco, nè gli altri sono menomamente alterati.

Quale è la causa del curioso fenomeno?

È da escludere senz'altro l'influenza diretta della pianta sia perchè non essa sola ha lasciato l'impronta, sia perchè questa impronta è negativa. Talune piante lasciano effettivamente la loro immagine, ma questa è positiva, è cioè oscura sul fondo chiaro del foglio ed è dovuta al succo acre di alcune di esse, come i ranuncoli, le anemoni, ecc....; succo che produce un annerimento sulle porzioni del foglio a contatto delle quali giacciono.

È pure da escludersi l'azione della luce esterna, e ciò per varie ed ovvie considerazioni. I pacchi essendo fortemente chiusi dalla cinghia e disposti orizzontalmente negli scaffali, i loro fogli son quasi affatto sottratti all'azione della luce, la quale può agire esclusivamente, o quasi, sui bordi del foglio specialmente in corrispondenza della testata del pacco volta verso l'esterno; e difatti nei fogli più vecchi si nota questa leggiera abbrunitura sui bordi, ma che non si estende verso l'interno che per pochi millimetri.

Il foglio poi di cartone, racchiudente i fogli, è assai spesso, due mm. circa, e quindi risulta perfettamente opaco, per cui non si può ammettere che il primo foglio abbia subìto una sensibile azione luminosa su tutta la superficie ed uniformemente; inoltre sta il fatto che è annerito anche l'ultimo foglio del pacco, il quale, oltre ad essere protetto dal cartone, poggia sul piano dello scaffale, per cui è doppiamente riparato dalla luce.

Occorre quindi cercare altrove la ragione del fatto. Non può la causa efficiente risiedere, per così dire, nell' " involucro ", perchè in tal caso tutti i fogli del pacco dovrebbero essere imbruniti; la circostanza poi che anche la etichetta dell' " involucro " ha lasciato l'impronta sul foglio d'erbario sta evidentemente a dimostrare che la causa agente deve essere esterna allo involucro stesso, deve agire normalmente al piano del foglio ed uniformemente su tutta la superficie.

Procedendo così per esclusioni, venni tratto a ricercare se la causa risiedesse per avventura nel cartone-cuoio chiudente il pacco. La primissima idea fu che entrasse in gioco il cloro: ma la scartai subito, perchè la qualità del cartone esclude nella

sua lavorazione l'impiego di questo mezzo imbiancante; di ciò fui poi anche assicurato da persona competente ed inoltre le ricerche analitiche diedero un risultato affatto negativo.

Osservando l'aspetto particolare delle impronte del foglio, specialmente la nettezza dei contorni, spesso veramente notevole, veniva a presentarsi l'ipotesi: non fosse per avventura il fatto collegato a fenomeni di radioattività. Ed in vero non era troppo improbabile ammettere nel cartone la presenza di traccie di corpi radioattivi sia derivati dalla materia prima naturale, sia, e con maggior probabilità, da materiali eterogenei aggiunti al cartone durante i processi di fabbricazione. È noto come per caricare la carta e simili venga non di rado usata la baritina, ed in tal caso acquistava un notevole grado di probabilità l'ipotesi di corpi radioattivi che molto spesso accompagnano in natura i composti del bario.

Eseguii quindi le ricerche sperimentali solite con l'apposito apparecchio elettroscopico per la ricerca della radioattività. Le esperienze diedero però sempre risultato negativo: la presenza di pezzi di cartone fra i due piattelli dell'apparecchio non esercitava alcuna influenza visibile sulla velocità di caduta della fogliolina dell'elettroscopio.

Con questo risultato negativo concordavano le ricerche analitiche sulle ceneri del cartone: esso lasciava all'incenerimento un residuo così tenue che corrispondeva solo al tenore normale in ceneri delle sostanze legnose, escludendosi in tal modo l'aggiunta di materiali terrosi di appesantimento.

Nel corso di tali ricerche volli provare se il detto cartone avesse azione sulle placche fotografiche, perchè in tal caso potevo più facilmente (ed essenzialmente in periodo di tempo più breve) studiare le modalità del fenomeno e cercarne il meccanismo.

Come in tutte le analoghe esperienze, disposi sulla superficie sensibile della placca fotografica una striscia di stagnola piuttosto spessa ($^1/_{30}$ di mm. circa, impermeabile a qualunque azione foto-chimica) e sopra posai un pezzo del cartone e ravvolsi il tutto in spessa carta nera (di quella usata appunto per ravvolgere le placche fotografiche), conservandolo in camera buia. Dopo 24 ore (la temperatura dell'ambiente era sempre sui 15° C.) sviluppai la lastra (che non presentava prima dello sviluppo alcuna alterazione) e constatai che essa era rimasta

impressionata spiccando nettamente la zona protetta dalla stagnola. Ripetei in varî modi l'esperienza, variandone la durata, ponendo il cartone a distanze successivamente crescenti e constatai che l'intensità dell'impressione cresce col tempo e diminuisce (a parità di tempo) colla distanza intercedente fra cartone e lastra.

Considerando intanto la natura del cartone e riconosciuto che esso risultava in tutto o in massima parte di legno di conifere, e che quindi era notevolmente resinoso, credetti poter attribuire precisamente a queste resine la causa dell'attività fotochimica. E non ebbi difficoltà a sincerarmene: estrassi con solventi diversi in estrattore Soxhlet dei pezzi di cartone e precisamente con tetracloruro di carbonio e con alcool, separatamente. Svaporai su vetrini da orologio un po' della soluzione in modo da avere un esile strato di resina e ripetei le esperienze eseguite col cartone ottenendone gli identici risultati e — cosa interessante — anche colla stessa intensità di azione. Volendo confermarmi ancor più il fatto, ripetei le esperienze con resine diverse, colofonia, dammar, sandracca: ne scioglievo in conveniente solvente ed evaporavo in stufa a 100-110° entro vetrini o scatole di petri un po' della soluzione sino ad avere uno straterello di resina perfettamente secco ed eliminazione completa del solvente.

L'effetto fotochimico si manifestava sempre solo con piccole variazioni di intensità.

Per assicurarmi, infine, che il cartone agiva non solo per causa delle resine in esso contenute, ma anche che agiva esclusivamente per causa di esse, provai l'azione di esso dopo che era stato privato delle resine mediante tetracloruro di carbonio: come prevedevo, esso si dimostrò inattivo. Inutile aggiungere che avevo in antecedenza verificata l'attività del pezzo di cartone stesso.

Riconosciuta l'attività fotochimica delle resine, rimaneva la parte più difficile del lavoro: stabilire, cioè, se essa sia un fenomeno puramente chimico o fisico-chimico, contemporaneamente.

La letteratura è molto povera in proposito: per quanto abbia cercato ed anche richiesto al riguardo autorevoli persone ben poco potei trovare. Lasciando a parte piccole noticine sparse non contenenti nulla di specialmente importante, ricordo

gli studi fatti con una certa continuità da W. I. Russel, il quale studiò le azioni fotochimiche di alcune resine, non solo, ma anche di taluni metalli e di altri varî corpi, esprimendo anche un'opinione sull'essenza del fenomeno: e di questa mi occuperò in appresso. Un lavoro pubblicò pure sull'azione fotochimica dell'olio di trementina lo Sperber esprimendo un'opinione diversa da quella di Russel, anzi combattendolo. Il Levison (" Science „ N. 8, 12, 1007-1008, 1900) aveva constatato che il balsamo del Canadà in 10 giorni agisce su una placca avvolta da carta nera " come i raggi Becquerel „.

Prima di esporre le mie ricerche sperimentali ed accennare alla conclusione che pare ragionevole di trarne, è conveniente discutere le due opposte opinioni del Russel e dello Sperber.

Nel primo lavoro del Russel presentato alla " Royal Society „ il 24 marzo 1898, si trattava dell'azione fotochimica di alcune resine, di certi metalli, leghe od altre sostanze. Egli aveva constatato che lo zinco, l'alluminio, il nichel in pochi giorni emettono vapori attivi impressionanti, capaci di attraversare la gelatina, il celluloide, il collodio, le pellicole di guttaperca; parimenti aveva notato che i vapori di alcuni olii eterei, come quello di terebentina, agiscono fortemente. Constatò che l'alcool, l'etere ed il mercurio puri non agiscono, mentre agiscono se impuri e crede di poter così per via fotochimica riconoscerne la purezza o meno. Constatava che l'intensità dell'azione cresceva col crescere della temperatura e che a 55° C. era molto elevata. Terminava dicendo che, secondo lui, *l'azione è dovuta ai vapori di queste sostanze, vapori che avendo capacità riducente, assorbono ossigeno.*

Varie obbiezioni possono subito farsi, ma mi riservo in seguito.

Poco dopo nella " Chemiker Zeitung „ dello stesso anno (1898, p. 161 e seg.) I. Sperber, riferendosi ad esperienze sue, si opponeva alla suesposta opinione di Russel (opinione condivisa anche da Stokes), e ciò essenzialmente in base a due ragioni fondamentali:

1° L'olio etereo di terebentina, quando agisce sui composti alogenici di metalli (bromuro d'argento della placca fotografica), separa da essi non il metallo, bensì l'ologeno, combinandosi col metallo: sulle placche fotografiche, per contro, si ha separazione, cioè messa in libertà, di metallo.

2° Perchè l'azione si manifesta attraverso certi mezzi che difficilmente possono essere attraversati dai vapori di terebentina.

Merita di essere ricordato il dispositivo sperimentale da lui ideato, che dimostrerebbe bene: " non essere l'azione dei vapori di terebentina sulle lastre fotografiche un'azione chimica ".

Lo Sperber costrusse una piccola scarabattola di legno a tre piani e questi formati non da un'assicella continua, ma da semplici liste di legno: il tutto alto cm. 8, largo cm. 9, e lungo cm. 13,4. In ogni piano pose una lastra fotografica e sulla lastra di mezzo una capsulina di porcellana aperta contenente olio di terebentina: dispose poi la scarabattola così preparata su una lastra di vetro smerigliato e coprì il tutto con una campana di vetro bassa, chiudente ermeticamente: in tal modo lo spazio veniva dopo poco tempo ad essere saturo di vapori di terebentina.

Il tutto fu lasciato per quattro o cinque giorni in una camera buia.

Sperber effettuava due esperienze variando la posizione delle lastre.

Nella 1ª esperienza le placche erano disposte nel primo e secondo piano colla gelatina volta in alto, e nel terzo piano colla gelatina volta in basso. Tutte le lastre annerirono (1), solo la mediana era rimasta trasparente nel luogo occupato dalla capsula e nella zona immediatamente circostante.

Nella 2ª esperienza la posizione delle lastre fu invertita, e cioè nel primo e secondo piano la gelatina era volta verso il basso e nel terzo verso l'alto. Le tre lastre annerirono (1) solo ai bordi, rimanendo nel resto trasparenti.

Da queste esperienze lo Sperber deduce che l'azione sulle lastre non può essere azione chimica, perchè sia nella 1ª che nella 2ª l'ambiente era ugualmente saturo di vapori e non ci sarebbe stata ragione per cui nella 2ª questi non avessero dovuto agire sulle placche, se l'azione era semplicemente chimica.

Ed a ciò non si può contraddire.

Ma appare almeno molto artificiosa la spiegazione che lo Sperber dà del fenomeno. Egli dice: " Se l'annerimento è invece

(1) Lo Sperber non dice chiaramente se le lastre annerissero direttamente sotto la campana o se dopo di essere state sviluppate.

dovuto ad una speciale radiazione della terebentina, il fatto si spiega bene nei due casi. Secondo me, la terebentina emette raggi fotochimici oscuri particolari che nelle mie esperienze cadevano direttamente sulle lastre del terzo piano e sulle pareti interne della campana e venivano da esse riflessi sulle altre lastre. Nella prima esperienza potevano in tal modo venir colpiti tutti i punti, nella seconda solo i punti marginali venivano colpiti dai raggi riflessi „. E conclude così: " L'etere che circonda le molecole di terebentina e che da queste si diparte, effettua, sotto l'influenza di essa, delle vibrazioni simili alle vibrazioni dei raggi ultravioletti e come questi sono chimicamente attive „!!

La spiegazione è assai spicciativa, per non dir di più. Tuttavia, come dirò in appresso (a parte naturalmente questa discutibile conclusione), le mie ricerche tenderebbero a dimostrare che nell'azione delle resine si compie un fenomeno foto-chimico e non puramente chimico.

Tuttavia alcuni anni dopo il Russel presenta di nuovo un suo lavoro alla " Royal Society „ (1904), riguardante l'azione del legno resinoso sulle lastre; constata che se esso fu prima esposto all'azione del sole diventa più attivo: che se fra il sole ed il legno si interpone un vetro rosso o verde, il legno stesso non cresce in attività, mentre ciò non succede interponendo un vetro bleu. Conclude dicendo che *l'azione della terebentina è da attribuirsi a perossido d'idrogeno, che si forma durante la sua ossidazione.*

Come si vede, il Russel manteneva la sua primitiva opinione e non accennava nemmeno al lavoro dello Sperber.

Nel 1906 scrive ancora sull'azione fotochimica delle diverse parti delle piante sulle placche fotografiche, sempre conservando la sua opinione sull'essenza del fatto.

I pochi lavori fatti finora, per quanto mi risulta da accurate ricerche, lasciano quindi perfettamente insoluta la questione anzi assolutamente incerti fra due opposte opinioni.

Nella speranza di aver portato un piccolo contributo alla soluzione di questo problema di non lieve interesse scientifico, e di notevole portata pratica (per ciò che riguarda la costruzione di apparecchi fotografici), mi sono indotto a rendere note le ricerche eseguite.

Credo di non poter meglio raggiungere lo scopo che espo-

nendo anzitutto le ricerche ed i risultati sperimentali ottenuti, e basandomi poi sul complesso di essi trarne una conclusione.

Verificai la massima parte delle reazioni da altri sperimentatori compiute riguardo alle resine, ed ottenendone risultati in massima parte concordanti.

Constatai che pure avvolgendo la placca in spessa carta nera, essa viene fortemente impressionata in pochi giorni. La celluloide è permeabile ma in piccola misura: avendo collocato una pellicola negativa su una ordinaria placca fotografica colle due superficie gelatinate combacianti e posto poi sul dorso della pellicola un pezzo di cartone, non potei ottenere, anche prolungando l'azione per molti giorni, una diapositiva (Faccio subito notare che le esperienze fatte col cartone furono sempre ripetute sia colla resina estratta dal cartone, sia con dammar, sandracca, colofonia: quindi ciò che si dice del cartone va riferito alle resine. Eseguivo dapprima una data esperienza col cartone, perchè molto comodo). Leggermente permeabile è la stagnola spessa $^{1}/_{120}$ di mm. Molto permeabile è l'alluminio in fogli esilissimi ($^{2}/_{3}$ di μ circa). A proposito dell'alluminio, noto che, contrariamente all'asserzione di Russel e di altri, io non ho constatato che il metallo per sè stesso agisca sulle placche fotografiche e le alteri: avendo posto dei suddetti fogli di alluminio a contatto con le placche (in assenza, naturalmente, del cartone) per parecchi giorni, esse non subirono la menoma impressione. Ciò potrebbe dipendere, anche in base alle idee dello stesso Russel, dalla purezza, o meno, del metallo.

Il vetro ordinario è impermeabile: però ad un certo grado di sottigliezza (ad esempio, un vetrino-copri-oggetto da microscopio, spesso $^{1}/_{6}$-$^{1}/_{7}$ di mm.) si dimostra leggerissimamente permeabile (fig. 6 *a*). Lastrine di mica (fig. 8 *b*) e di gesso cristallizzato (fig. 8 *a*), spesse circa $^{1}/_{10}$ di mm., furono impermeabili.

Fin dalle prime esperienze eseguite per osservare l'effetto a distanza, notai che l'azione è diffusiva; avendo collocato la placca fotografica ed il cartone a distanza di circa 12 mm., e disposta la striscia di stagnola sul cartone anzichè sulla placca, questa — sviluppata dopo sei giorni — si mostrò completamente impressionata e non compariva su di essa l' “ ombra „ della striscia di stagnola.

In tali condizioni d'esperimento, però, si poteva ugualmente

ammettere o l'azione di un vapore o gas che riempisse l'ambiente, o l'azione di raggi ottici pei quali entrano in giuoco ombre e penombre, od, anche, per avventura, l'azione di una emanazione radioattiva (non però di un corpo radioattivo: si sa che le emanazioni hanno, sotto certi aspetti, il comportamento di un gas).

Osservando i fogli d'erbario, si era già fatta l'interessante constatazione che l'inchiostro nero ai sali di ferro aveva impedito l'azione fotochimica del cartone, mentre questa si era manifestata attraverso le parole scritte in inchiostro da stampa (non metallico e di più generalmente resinoso). Volli riprodurre il fenomeno sulle placche fotografiche. A tale scopo collocai sulla placca un foglietto di carta da lettera moderna, uso-pergamena (non però carta pergamenata), su di cui avevo scritto alcune parole: vi posi attraverso una striscia di stagnola intagliata e poi il cartone (La striscia di stagnola giova sempre anche per far meglio risaltare, per via di contrasti, le azioni deboli). Dopo giorni 10 sviluppai la lastra, sulla quale spiccavano nettamente le parole (fig. 7): la carta era stata permeabilissima, l'inchiostro no. Ottenni identici risultati ripetendo l'esperienza colla resina del cartone e con la colofonia.

Un'altra osservazione di speciale interesse si fa sui soliti fogli: le foglioline del Tamus tenuissime — specialmente quelle giovanili che costituiscono l'esemplare di sinistra dell'erbario — e tanto trasparenti da poter legger benissimo uno scritto attraverso ad esse, si sono dimostrate impermeabili tanto quanto una striscia di stagnola. Vedremo quale spiegazione può darsi del fatto singolare.

Per controllo provai ad interporre fra placca fotografica e cartone una esilissima cuticola di Agave, essa pure trasparentissima, e con uguale meraviglia ne constatai la completa impermeabilità (fig. 4).

Eseguii la seguente esperienza: nel fondo di una scatola di cartone bianco, convenientemente rivestita della solita spessa carta nera, posi l'uno accanto all'altro due coperchi di scatole da lastre a bordi alti circa 12 mm., pur esse ancora foderate della stessa carta nera. In uno dei coperchi collocai il solito pezzo di cartone e nell'altro una lastra fotografica parzialmente ricoperta da stagnola. Il tutto ben chiuso mantenni al riparo

della luce per dieci giorni: la lastra sviluppata dimostrò di essere stata impressionata, perchè si rivelava l'impronta chiara della stagnola su fondo scuro (nelle parti scoperte). L'impressione, quantunque visibilissima, era però debole.

In altra esperienza coprii una lastra fotografica per metà con foglio di carta velina bianca impregnata di una soluzione diluita di bisolfato di chinina (ben secca) e per l'altra metà con un foglio della stessa carta velina naturale. Per evitare dei dubbi sui risultati che sperava ottenere, questi due foglietti non furono posti a contatto immediato della superficie sensibile, ma vi interposi un altro foglio della stessa carta velina. Trattenni il tutto fermo con una lista di stagnola trasversale e vi posai, infine, sopra il cartone. Dopo dieci giorni sviluppai la lastra e constatai che il foglietto imbevuto di solfato di chinina aveva ostacolato l'azione tanto quanto la stagnola, mentre la lastra era ben impressionata nella zona coperta dal doppio foglio di carta velina naturale. Avendo, per dar maggior risalto, scritto la data dell'esperienza sui due mezzi fogli con inchiostro ordinario, nella lastra appaiono quelle scritte sulla carta velina ordinaria, e naturalmente non quelle della carta al solfato di chinina (perchè questa è impermeabile come l'inchiostro).

Dalle esperienze eseguite intravedevo già una conclusione probabile sull'essenza del fenomeno: conclusione che credo di aver confermato con quest'ultima esperienza.

Come già dissi, il vetro ordinario si mostrava quasi impermeabile anche a tenue spessore: provai allora ad interporre fra la placca fotografica ed il cartone un vetrino di Uviol di Zeiss dello spessore di circa $^1/_3$ di mm., vetrino che è permeabile ai raggi ultravioletti; per rilevare meglio l'effetto, trattenni fermo il vetrino colla solita listerella di stagnola. Si aveva dunque la seguente successione: superficie sensibile della placca, Uviol, stagnola, cartone. Dopo cinque giorni sviluppai la placca e constatai che essa era rimasta sensibilmente impressionata anche nella zona coperta dall'Uviol; ripetei l'esperienza lasciando agire per un tempo più lungo e l'impressione si manifestò come prima ma più intensa e spiccata, come si può vedere dalla figura 5. In essa si nota il fondo scuro generale della placca, la zona un po' meno scura coperta dall'Uviol, attraversata dalla fascia chiara corrispondente alla listerella protettrice di stagnola.

Fra le esperienze esposte le più importanti sono: 1ª il comportamento dell'Uviol; 2ª il comportamento del vetro ordinario; 3ª della carta al solfato di chinina; 4ª della cuticola di Agave e delle tenui foglie del *Tamus communis*; 5ª l'esperienza delle due scatolette.

La 5ª esperienza dimostrerebbe che un vapore o gas (o fors'anco una emanazione?), capace di agire sulla placca, deve aver riempito lo spazio. Parrebbe da escludersi un fenomeno ottico sia per la posizione relativa del cartone e della placca, sia perchè l'interno dell'ambiente, foderato di carta nera, non lucida, non si prestava a fenomeni di riflessione. Intendo però effettuare al riguardo ulteriori ricerche sperimentali.

Il fatto che l'azione si manifesta attraverso a carta di varia natura (la quale costituisce un materiale relativamente poroso) non escluderebbe a priori l'azione di un gas o vapore: ma mi pare difficile ammettere con Russel che un corpo della natura dal perossido d'idrogeno possa attraversare indecomposto la cellulosa per andare ad agire sul bromuro di argento della placca.

Il manifestarsi dell'azione attraverso la spessa carta nera scarterebbe l'idea di intervento di luce ordinaria nell'ipotesi che il cartone impiegato fosse stato lungo tempo soleggiato; cosa che non fu. Lo stesso dicasi della carta al solfato di chinina, della cuticola d'Agave, ecc... che, essendo trasparenti, non avrebbero opposto resistenza alla luce ordinaria.

La permeabilità del vetrino Uviol, impermeabile certo a qualsiasi gas, fa escludere assolutamente l'intervento di questi ed ammettere un fenomeno ottico: mentre la minima permeabilità del vetro ordinario fa ritenere trattarsi non di luce ordinaria ma di raggi ultravioletti o di analoga natura. Nè può muoversi l'obbiezione che, nel caso dell'Uviol, l'essere stata la placca impressionata anche sotto di esso dipenda da un gas infiltratosi fra Uviol e placca; perchè in tale ipotesi: come si spiegherebbe il fatto che l'azione del supposto gas si è arrestata esattamente e nettamente in corrispondenza della striscia di stagnola (come si vede nella fig. 5)?. Si noti bene che questa era stata appositamente collocata non fra la placca e l'Uviol, ma fra l'Uviol ed il cartone. Inoltre se si fosse trattato di un gas, perchè questo si sarebbe infiltrato proprio solo nel caso

dell'Uviol e non nei vari altri analoghi casi sperimentali? non fra placca e lamine di mica e di gesso, non fra placca e cuticola, non fra placca e foglie di Tamus, ecc.?

A confermare quanto sopra è detto sta ancora il comportamento della carta al solfato di chinina, delle foglie di Tamus e della cuticola d'Agave. Ritengo che il solfato di chinina ha ostacolato l'azione perchè fluorescente e, com'è noto, opaco ai raggi ultravioletti: ed in questa idea mi sono raffermato effettuando analoghe esperienze con fogli della stessa carta impregnati di varî corpi organici ed inorganici non fluorescenti. Essi furono sempre permeabili quanto la carta naturale. Per la stessa ragione ritengo che le fogliòline verdi del Tamus furono impermeabili, sebbene tenuissime, per la clorofilla — essa pure fluorescente — in esse contenuta: e che alla stessa causa debba attribuirsi l'impermeabilità dell'esilissima cuticola di Agave ancora leggermente colorita in verdognolo da clorofilla.

D'onde possono trarre origine questi raggi chimicamente attivi?

Russel dice che l'azione delle resine sulle placche fotografiche è dovuta a perossido d'idrogeno originantesi nella spontanea ossidazione loro, ed attribuisce quindi al fenomeno una natura puramente chimica.

Sperber ritiene, per contro, essere l'azione dovuta a raggi chimicamente attivi originantisi in seguito a modificazione nei movimenti delle particelle eteree sotto l'influenza delle molecole di terebentina.

In base alle mie richerche ritengo che l'azione delle resine possa essere di duplice natura, cioè chimica e fisico-chimica. A parer mio: *la formazione di ozono o di perossido* (quest'ultimo agisce sulla placca quando nessun ostacolo si frappone) *durante l'auto-ossidazione delle resine, od anche un'altra modificazione qualsiasi nell'equilibrio chimico di esse, è accompagnata da emissione di raggi di brevissima lunghezza d'onda, ed il manifestarsi di essi sarebbe in relazione colla variazione di energia che avviene durante il fenomeno chimico.*

A conforto del mio modo di vedere ricordo solo le recenti ricerche di Matushek e Nenning (" Ch. Zeitung „, 1912, I, 6) sui " raggi chimicamente attivi manifestantisi nelle reazioni chimiche „. Essi dimostrarono che " in ogni reazione chimica in

cui si ha variazione di temperatura (azione di acidi sui metalli, idratazione di un ossido, indurimento del cemento, ecc... ecc...) si ha manifestazione di onde luminose, quindi azioni ottiche „. Essi esprimono perfino la speranza di potere, in determinate condizioni, misurare per via fotografica la rapidità delle reazioni e ricavarne dati comparabili.

La presente non è che una Nota preliminare. Ulteriori ricerche intendo compiere per riconfermare le idee espresse, per cercare di stabilire approssimativamente la lunghezza d'onda di questi raggi; per controllare se questi raggi — la cui presenza parmi abbastanza dimostrata — derivino veramente da ossidazione o da altre modificazioni chimiche subìte dalle resine, in che consista l'imbrunimento nel caso speciale dei fogli d'erbario, quali nozioni pratiche ne possano trarre i costruttori di apparecchi fotografici e d'altri apparecchi d'ottica, ecc...

All'Ill^mo prof. A. Naccari, che nelle presenti ricerche mi incoraggiò ed aiutò coi suoi autorevoli consigli, l'espressione della mia viva riconoscenza.

Maggio 1912.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1 e 2. Fogli d'erbario da cui vennero tolte le piante e il cartellino. Si noti come le parole stampate: *Erbario*, *Famiglia*, *Genere*, *Specie*, ecc., non si rivelano sul foglio d'erbario mentre compaiono le parole scritte a mano. In basso a destra si osserva l'impronta dell'etichetta ingommata sul foglio-involucro. Nella fig. 1 risaltano assai bene le parole su di essa scritte.

Fig. 3. Foglio d'erbario completo corrispondente alla fig. 2 (*Tamus communis* L.).

Fig. 4. Impermeabilità della cuticola di Agave.

Fig. 5. Permeabilità del vetrino Uviol.

Fig. 6. Minima permeabilità del vetro ordinario (vetrini da microscopio spessi $^1/_6$–$^1/_7$ mm., in *a* uno solo, in *b* due sovrapposti).

Fig. 7. Permeabilità della carta da lettera uso-pergamena, impermeabilità dell'inchiostro e della stagnola (questa era stata intagliata, come nella figura, per lasciar scoperte le parole).

Fig. 8. Impermeabilità del gesso cristallizzato (*a*) e della mica (*b*).

Fig. 9. Permeabilità della carta velina bianca (*b*) sulla quale spiccano le parole scritte in inchiostro, ed impermeabilità della stessa carta imbevuta di bisolfato di chinina (*a*). In *c* si osserva l'impronta negativa della striscia di stagnola sovrapposta trasversalmente ai due mezzi fogli.

N. B. Le figure furono tratte da diapositive delle placche sperimentali e quindi rivelano l'effetto reale delle resine.

Compensazione grafica con la figura di errore.

(Punti determinati per intersezione).

Nota di G. ALBENGA.

L'impiego di procedimenti grafici nei calcoli di compensazione ha condotto in molti casi a soluzioni eleganti e di grande evidenza: esse presentano rispetto alla soluzione puramente analitica il grande vantaggio d'andare immuni dagli errori grossolani e materiali di calcolo, pur permettendo di raggiungere quella approssimazione che è ragionevole sperare da misure topografiche e geodetiche e più in generale da risultati di esperienza. Perciò, nonostante la opposizione quasi sistematica di molti cultori della geodesia inferiore al calcolo grafico, già da alcune amministrazioni pubbliche vennero indicati nei regolamenti ufficiali metodi grafici atti a risolvere i più frequenti problemi di compensazione. Così, allo scopo di fissare la più plausibile posizione d'un punto determinato per intersezione in avanti, nelle triangolazioni di 4° ordine e in quelle catastali, la *IX Anweisung für die trigonometrischen und polygonometrischen Arbeiten* (1) riporta il metodo grafico dovuto a Bertot; il catasto austriaco adotta un procedimento grafico analitico di Horský (2); nel Würtemberg si seguono le costruzioni proposte da Hammer (3) ed in Italia, oltre al citato metodo di Bertot, si applica spesso anche quello che l'ingegnere Abate Daga espose recentemente negli Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino (4).

Con la presente Nota mostro come una soluzione molto semplice e più rapida di quelle per solito applicate, derivi in modo diretto e spontaneo da alcune analogie fra i problemi della

(1) 3ª Edizione. Berlin, 1904.

(2) HARTNER-DOLEŽAL, *Hand- und Lehrbuch der niederen Geodäsie.* Wien, 1910, vol. I, pag. 825 e seg.

(3) *Zur graphischen Ausgleichung beim trigonometrischen Einschneiden von Punkten*, in " Zeitschrift f. Vermessungswesen ", 1896.

(4) *Sulla compensazione di un punto trigonometrico con la figura di errore*, " Atti Acc. Sc. Torino ", 1908-9, pag. 725.

statica e quelli della teoria dei minimi quadrati. E prima credo utile accennare, nelle linee generali, a quei metodi di compensazione che si fondano su teoremi di meccanica. Da questa rapida sintesi risulteranno evidenti gli stretti legami formali che collegano due scienze a primo aspetto così disgiunte come la statica e la teoria degli errori ed apparirà quanto siano estese e profonde quelle analogie che intraviste or son molti anni da Gauss (1) e chiaramente indicate da Möbius (2), han dato origine di recente a studi molto interessanti (3).

***

Si consideri dapprima il caso di punti determinati per intersezione in avanti e si disegni la figura di errore con un procedimento qualsiasi, meglio se con il metodo di Gauss (4) o con quello di Hammer che dànno la figura orientata rispetto agli assi di riferimento.

Il punto più probabile P è notoriamente quello per cui risulta minima la quantità $[pv^2] = \Sigma\, pv^2$, dove con p si indicano i pesi delle varie osservazioni e con v gli errori relativi.

Fin dal 1876 Yvon Villarceau (5) dimostrava che per osservazioni di peso identico, il punto P coincide con il baricentro dei pesi p applicati ai piedi delle perpendicolari abbassate da P sui lati della figura di errore. Il teorema è evidentemente valido anche per osservazioni di peso diverso e può molto facilmente esser dimostrato per via meccanica quando si considerino i pesi p come forze agenti lungo i lati della figura di errore e $\Sigma\, pv^2$ come il momento polare di inerzia di esse.

Dal teorema di Villarceau deriva un gran numero di so-

---

(1) " Giornale di Crelle ", IV, pag. 232.

(2) *Lehrbuch d. Statik,* I, § 184 e seg.

(3) Finsterwalder, *Bemerkungen zur Analogie zwischen Aufgaben der Ausgleichrechnung und solchen d. Statik*, " Sitzungsberichte d. Kgl. Bayer. Akademie d. Wissenschaften zu München ", XXXIII, 683-9 e D'Emilio, R. *Illustrazioni geometriche e meccaniche del principio dei minimi quadrati,* " Atti Istituto Veneto ", 62, pag. 363-94.

(4) Gauss, *Trigonometrischen und polygonometrischen Rechnungen.* Berlin, 1894.

(5) Y. Villarceau, *Transformations de l'astronomie nautique,* " Comptes rendus de l'Académie des Sciences ", 1876, I, 531.

luzioni grafiche del quesito; Villarceau stesso, nella Memoria sopra citata, ne indicò una relativamente semplice limitata al caso di 3 osservazioni di egual peso (1): ma la prima risoluzione generale è quella data nello stesso anno 1876 dal Bertot (2). A questa soluzione elegantissima, che è la più nota, può rimproverarsi una complessità eccessiva: per semplificarla d'Ocagne e Laisant idearono e proposero metodi vari, ma fondati tutti sul teorema di Villarceau (3). Lemoine cercò di paragonarne la semplicità e la esattezza con i criteri geniali della sua Geometrografia (4).

Su analogie meccaniche (equilibrio di forze e di momenti) si fondano ancora le soluzioni di Klingatsch (5) e di Puller (6), i quali determinano il punto P come intersezione delle risultanti di forze $p \operatorname{sen} \varphi$ e $p \cos \varphi$ agenti secondo i lati della figura di errore (con φ si indica l'angolo che questi lati fanno con un asse comunque scelto nel loro piano).

Eleganti, per quanto artificiose e di minor evidenza, sono pure le costruzioni che Wellisch e Pantofliček (7) proposero interpretando la espressione Σpv^2 come lavoro di deformazione di un sistema elastico iperstatico opportunamente scelto, e fissando la posizione del punto cercato in funzione dei valori delle incognite staticamente indeterminate del sistema fittizio. Questa analogia ha

---

(1) Una soluzione molto semplice di questo caso si ottiene ricordando che in queste ipotesi il punto P coincide con il punto di Grebe o di Lemoine, e si ottiene quindi assai facilmente come punto di incontro delle simmediane.

(2) Bertot, *Solution géometrique du problème de la détermination du lieu plus probable du navire au moyen d'un nombre quelconque de droites d'hauteur*, " Comptes Rendus ", 1876, I, 682.

(3) D'Ocagne, *Sur la détermination du point le plus probable donné par une série de droites non convergentes*, " Comptes Rendus ", 1892, I, 1415 ed altre pubblicazioni in " Journal de l'École Polytechnique ", 1892, e " Bulletin de la Société Mathématique de France ", 1892.

(4) Lemoine E., *Application de la Géométrographie à diverses solutions d'un même problème*, " Bulletin de la Société Mathématique de France ", 1892.

(5) Klingatsch, *Die graphische Ausgleichung bei trigonometrischen Bestimmungen*, Wien, 1894.

(6) Puller, *Eine graphische Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen*, in " Zeitschrift für Vermessungswesen ", 1895.

(7) S. Wellisch, *Fehler ausgleichung nach der Theorie des Gleichgewichtes elastischer Systeme.* — Pantofliček, *Fehlerausgleichung nach dem Prinzipe d.*

condotto Wellisch (1) ad un teorema molto elegante sugli archi elastici e suggerì a Pirlet di introdurre nel calcolo dei sistemi iperstatici il noto algoritmo di Gauss (2).

Analoga alla precedente è la soluzione di Hohenner (3), la quale si fonda essenzialmente sulla determinazione della freccia di incurvamento d'un'asta di opportuna sezione, incastrata ad un estremo.

La relazione

$$[pv^2] = \text{minimo} \tag{1}$$

può evidentemente trasformarsi subito nella

$$\Sigma\, pvdv = 0. \tag{2}$$

Consideriamo le pv come forze compiane concorrenti in un punto P, dv come uno spostamento qualunque piccolissimo di P nel piano delle forze; la relazione (2) ci dice che per tale spostamento è nullo il lavoro delle forze pv, e che quindi esse costituiscono un sistema di forze in equilibrio.

Supponiamo ora, per fissar le idee, che la figura di errore sia quella disegnata in Fig. 1 e ammettiamo, per semplicità, che le osservazioni siano tutte di egual peso. Il punto più probabile P si determina facilmente con un metodo di falsa posizione.

Sia N un punto qualsiasi del piano della figura: da questo punto si abbassino le perpendicolari ai lati della figura di errore: gli errori v saranno dati dai segmenti compresi fra N e i piedi di tali perpendicolari. Consideriamo gli errori v come forze e facciamone (Fig. 2) il relativo poligono partendo da un punto qualsiasi O: questo poligono sarà, in generale, aperto. Se ora si sposta, con velocità costante, il punto N su di una retta qualsiasi uscente da esso, il punto estremo del poligono delle forze, quando ne rimanga invariata la origine, percorre

---

kleinstes Deformationsarbeit, " Oest. Wochenschrift für d. öff. Baudienst ", 1908, p. 428.

(1) " Zeitschrift f. Mathematik und Physik ", 1906, Vol. 53.

(2) Pirlet, *Die Berechnung statisch unbestimmter Systeme,* Der Eisenbau, 1910, pag. 331.

(3) Hohenner H., *Graphisch-mechanische Ausgleichung trigonometrisch eingeschalteter Punkte.* Stuttgart, Wittwer, 1904.

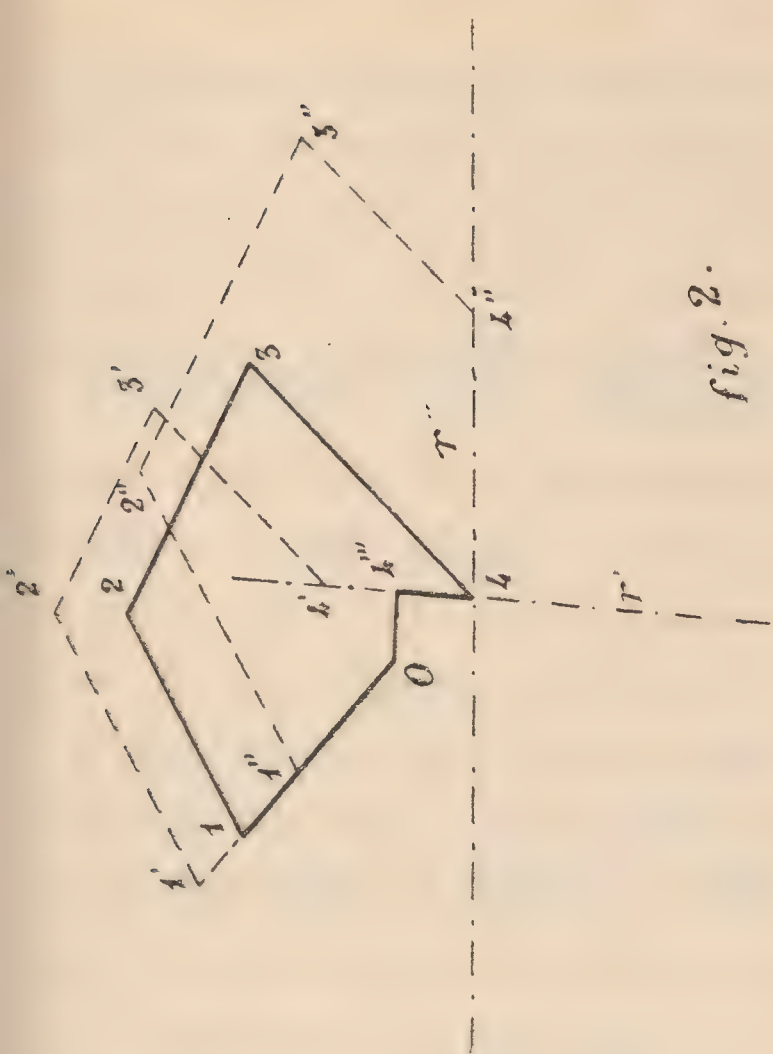



fig. 2.

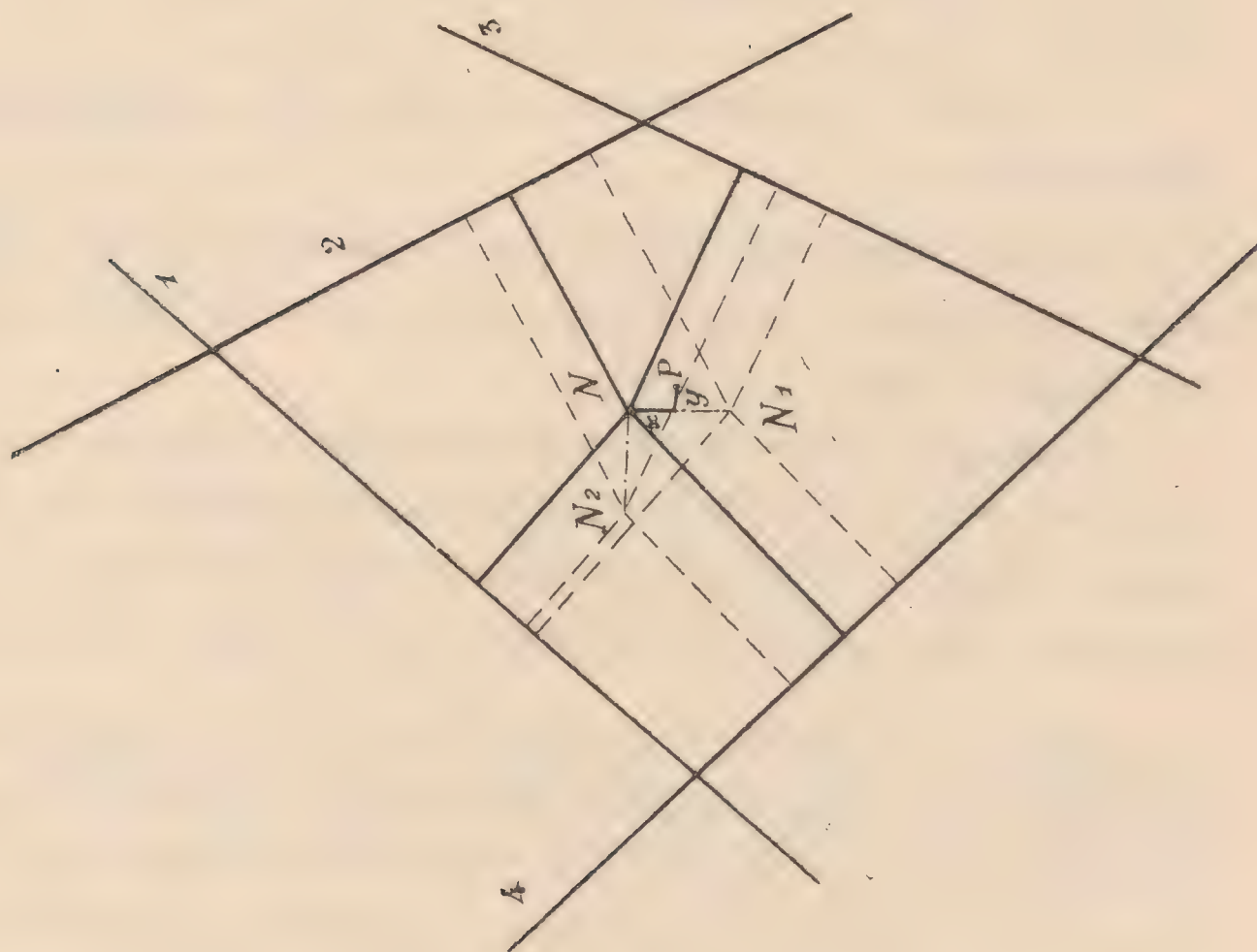



fig. 1

La figura, data la scala del disegno, è solamente dimostrativa.

con velocità costante un'altra retta, la cui direzione è indipendente dalla posizione del punto N.

Diamo quindi ad N uno spostamento qualsiasi che lo porti in N_1 e costruiamo un nuovo poligono delle forze v' con l'origine in O: la retta $4\,4'$ sarà quella su cui si sposta il punto 4 quando N percorra la NN'. Diamo ora ad N un nuovo spostamento NN_2 in direzione diversa dalla precedente: troveremo una retta $4\,4''$ analoga alla precedente.

Perchè le forze v si facciano equilibrio è necessario e basta che sia chiuso il corrispondente poligono delle forze. Basterà quindi che noi diamo ad N uno spostamento tale che porti il punto 4 in O: ciò otterremo facilmente dando ad N uno spostamento x in direzione NN_1 tale che il punto 4 cada in $4'''$ e quindi uno spostamento y nella direzione NN_2 tale da chiudere il poligono delle forze. La grandezza di questi spostamenti sarà, come è chiaro:

$$x = NN' \times \frac{4\,4'''}{4\,4'} \qquad \text{nella direzione } NN_1$$

e

$$y = NN_2 \times \frac{4'''\,0}{4\,4''} \qquad \text{nella direzione } NN_2 .$$

È ovvia la estensione al caso di osservazioni di peso diseguale.

Ai problemi precedenti può riportarsi quello della intersezione all'indietro (alla Pothenot) ricorrendo alla trasformazione per raggi vettori reciproci.

Analoghe costruzioni possono pure indicarsi per il problema duale di trovar la retta più probabile definita da più che due punti. Föppl ne diede recentemente una costruzione interessante, fondata sulla teoria dei momenti di secondo ordine (1).

Merita un cenno l'applicazione che di questo procedimento può farsi, nel tracciamento dei ponti, col metodo trigonometrico impiegato, ad esempio, nei ponti di Colonia sul Reno e di Dömitz sull'Elba. Si confronti, a questo riguardo, l'*Handbuch d. Ingenieurwissenschaften*, Brückenbau, vol. I, pag. 329.

---

(1) Föppl, *Dauerversuche mit eingekerbten Stäben.* " Mitteilungen a. d. Mech.-Techn. ". Laboratorium d. K. Techn. Hochschule München, XXXI Heft.

Osservazioni sulle tabelle internazionali dei pesi atomici.

Nota del Socio ICILIO GUARESCHI.

Da circa quattordici anni si è costituito un Comitato Internazionale di chimici inglesi, tedeschi, francesi ed americani, il quale ha per iscopo la pubblicazione di una relazione annuale intorno ai lavori fatti, nell'anno precedente, sulla determinazione dei pesi atomici; relazione che si riassume in una tabella intitolata: *Pesi atomici internazionali*, ovvero: *Pesi atomici della Commissione Internazionale.*

Sotto certi riguardi è molto laudabile questo lavoro, ma, a mio avviso, lo si fa troppo di frequente: ogni anno. E perciò desidero fare alcune osservazioni.

I pesi atomici detti *fondamentali*, vale a dire i pesi atomici tipici ai quali si riferiscono gli altri ammettendo O = 16.00, sono i seguenti (1909):

H	= 1.008	Br	= 79.916
C	= 12.000	Ag	= 107.880
N	= 14.007	K	= 39.095
Cl	= 35.460	S	= 32.070

Nelle tabelle però è data, giustamente, solo la seconda decimale, eccetto per l'idrogeno che rimane anche con la terza. E quindi si ha:

N	= 14.01	Ag	= 107.88
C	= 12.00	K	= 39.10
Cl	= 35.46	S	= 32.07
Br	= 79.92		

Ed innanzi tutto una osservazione: a me sembra, nello stato attuale della scienza, una grande esagerazione lo scrivere i pesi atomici con apparente esattezza sino alla terza cifra decimale, come fanno alcuni degli autori che esperimentano su questo argomento. I metodi che abbiamo attualmente per determinare i pesi atomici, tutti senza eccezione, ci dànno dei valori, che non sono *sicuri* nemmeno nella seconda cifra decimale; e ciò vale in particolar modo per quegli elementi i cui composti difficilmente si possono avere allo stato di purezza.

Ad esempio, Goldbaum (1) determina con metodo elettrolitico il peso atomico del sodio; partendo dal cloruro (ammesso Cl = 35.458) trova: Na = 22.997; e partendo dal bromuro (ammesso Br = 79.92) trova: Na = 22.998. Ma, in coscienza, non poteva scrivere senz'altro: Na = 23.00?

Non è determinato ancora, con sicurezza, nemmeno il rapporto O : H; che secondo le ultime ricerche sarebbe 16 : 1.0075 secondo altre 16 : 1.008 od anche 16 : 1.0063, ecc.

Le tabelle annuali date e modificate tanto di frequente differiscono quasi sempre assai poco da un anno all'altro; ma talora in base alle analisi di qualche chimico, non controllate ancora da altri, si modificano di molto i valori di alcuni pesi atomici, sino ad ora accettati come esatti.

Pel *sodio*, dalle vecchie ricerche sino al 1883 si era ammesso: Na = 23.0 (22.995); poi in base principalmente al calcolo delle esperienze di Stas, fatto dal Van der Plaats (2), si era adottato: Na = 23.05; numero ammesso nella tabella del 1898. Ed ora, dopo il 1905, si è tornato ad ammettere 23.0.

Così si potrebbe dire del bismuto. Marignac nel 1884 (3) in tre serie di esperienze abbastanza concordanti, trovò in media il peso atomico 208.16 che egli arrotondava in 208, cioè il peso atomico trovato già da Schneider. Ma nella tabella del 1898 (4) in seguito ad esperienze di altri chimici si ammise Bi = 208.5,

(1) " Journ. Am. Chem. Soc. ", t. 33, p. 35.

(2) " A. Ch. ", 1886 (6), t. 7, p. 501.

(3) " A. Ch. ", (6), t. 1, p. 303.

(4) *Berichte der Commission für die Festsetzung der Atomgewichte*, in " Ber. d. deut. Chem. Gesell. ", 1898, t. XXXI, p. 2761.

numero che era accettato ancora nel 1905; dopo si torna a cambiare e dal 1907 o dal 1908 si ammette di nuovo il numero 208, già dato da Marignac e da Schneider.

Talora le differenze fra i numeri di queste tabelle sono così minime che le modificazioni introdotte parrebbero a me perfettamente inutili. Ad esempio, nelle tavole del 1910 e 1911 pel peso atomico del ferro è dato 55.85. Ora in base alle determinazioni di Baxter, Thorwaldsen e Cobb (1), fatte sul bromuro ferroso e con ferro meteorico, il peso atomico del ferro sarebbe Fe = 55.838 e nella tabella del 1912 si ammette Fe = 55.84 invece di 55.85. Ed è da notare che il bromuro ferroso è un sale tutt'altro che facile ad aversi purissimo. Per molto tempo si è dato pel ferro il peso atomico: Fe = 56.00, poi in questi ultimi anni pareva fissato in Fe = 55.9 (V. Tabelle dal 1905 al 1909). Era forse meritevole di essere segnata con un asterisco la cifra ora modificata in Fe = 55.84 invece di 55.85? Non siamo affatto certi che il vero valore sia 55.85 anzichè 55.84. Si è esperimentato ancora col ferro purissimo elettrolitico quale si può preparare da alcuni anni?

Per lo *zinco*, ad esempio, si era ammesso dal 1898 il peso atomico 65.40; ora dal 1909 è ammesso nella tabella internazionale il numero 65.37.

Anche pel *bario*, che era 137.4, ora si dà 137.37. Il Clarke nel suo classico libro dava Ba = 137.43.

Così per lo *stronzio*: nelle prime tabelle era 87.6, poi si ammise 87.62 ed ora 87.63 (2), e pel *calcio*, non più Ca = 40.1 ma bensì 40.07.

Pel *magnesio* si dava nelle prime tabelle Mg = 24.36 e così era ammesso nei migliori Trattati; ora dal 1909 è accettato il numero 24.32.

Per l'*elio* non più E = 4.0 come si era dato sino al 1910, ma invece E = 3.99.

Per il *jodo* nel 1905 è dato 126.97, nel 1909 invece 126.92.

Per il *rame* non più Cu = 63.6, ma ora Cu = 63.57. Ep-

---

(1) " Journ. Am. Chem. ", t. 33, p. 319.

(2) Th. W. Richards e O. Hönigschmid, " Journ. Am. Chem. Soc. ", 1910, t. 32, p. 1577, e t. 33 (1911), p. 28; " Monatsh. ", 1910, t. 31, p. 1203 e t. 32 (1911), p. 41; " Chem. Zentralbl. ", 1911, I, p. 290 e 536.

pure le ricerche di Richards portavano a Cu = 63.589, cioè quasi 63.59, molto vicino a 63.6. E il Clarke stesso nel suo classico libro: *A recalculation of the atomic Weights*, Washington, 1897, dava per il rame, dopo lunga discussione, Cu = 63.60. Così è per il *palladio*. Sino al 1904-1908 nelle tabelle è stato segnato il numero 106.5; però nel 1909 in seguito ad esperienze di Krell, di Woernle, di Haas, fatte sotto la direzione di Gutbier, si fissa il peso atomico in 106.7; ma contemporaneamente vi sono le numerose esperienze di Kemmerer (1908), fatte sotto la direzione di Edgar F. Smith, che portano invece al valore 106.43-106.46, numeri molto vicini a 106.5. Queste ultime cifre sono forse meno esatte delle prime? Bisognerebbe dimostrarlo. Dunque, tanto valeva lasciare intatto, per ora, il valore 106.5. Clarke nel suo libro sovracitato assegna al palladio 106.36.

Per l'*argon* 39.9 sino al 1910, poi 39.88 dal 1911! Fischer e Hähnel nel 1910 trovarono 39.89.

Per l'*arsenico* sino al 1909 era dato il valore 75.0 ed ora dopo le determinazioni di Baxter e Coffin (" Journ. Am. Chem. Soc. ", XXXI, p. 297) 74.96.

Così potrei ricordare numerosi casi analoghi.

Questi esempi basterebbero a dimostrare come sarebbe meglio non variare tanto di frequente i valori delle tabelle dei pesi atomici.

Le osservazioni precedenti sono in contraddizione con altri casi in cui la Commissione modifica il numero sperimentale per arrotondare la cifra della tabella.

Ad esempio, nel 1911 Mc. Adam (1) trovò pel *vanadio* V = 40.967 e la Commissione, nella tabella del 1911, ammise senz'altro V = 51.00; mentre era ammesso V = 51.2 nel 1910, 51.06 nel 1911 e prima ancora si dava 50.99 (!).

Così è del *tantalio*, nelle tabelle del 1905-1906 era ammesso Ta = 183.0; dal 1907 al 1911 Ta = 181.0. Ora in base alle esperienze di Cl. W. Balke (2) sul rapporto tra $2TaCl^5$ e Ta^2O^5 si accetta senz'altro 181.5.

(1) " Journ. Am. Chem. Soc. ", t. 32, p. 1603, e " Chem. Zentralbl. ", 1911, I, p. 293.

(2) " Journ. Am. Chem. Soc. ", 1910, t. 32, p. 1127; " Chem. Zentralbl. ", 1910, II, p. 1448.

Il *potassio* nelle tabelle dal 1898 al 1908 è rappresentato da 39.15 e dal 1909 arrotondato in 39.10.

Talvolta anzi le modificazioni introdotte sono molto profonde. Sino ad ora nelle tabelle date dalla Commissione Internazionale, era accettato per il peso atomico del *mercurio*: Hg = 200.0, ammesso anche dal Clarke nel suo libro sovraricordato. Invece nella tabella pel 1912, in base alle analisi fatte da C. W. Easley (1) sul cloruro e sul bromuro di mercurio, si accetta senz'altro:

$$Hg = 200.63.$$

Questo numero 200.6 coincide con due delle quattro determinazioni di peso atomico del mercurio fatte nel 1833 dal Turner, il quale aveva trovato: 200.6 - 202.9 - 201.2 - 200.6. Come si vede, torniamo indietro.

Nella tabella del 1898 era già stato modificato questo peso atomico in Hg = 200.3, ma poco dopo, sino al 1911, sempre ammesso ancora: 200.0. Per modificare di 0.6 il peso atomico di un elemento tanto importante, quale è il mercurio, non era meglio attendere delle analisi di controllo? Il peso atomico 200.0 (ossigeno = 16) ammesso sino ad ora era stato ottenuto anche desumendolo dalla densità del vapore, secondo la legge di Avogadro, che è il metodo veramente classico.

Questa modificazione che innalza il peso atomico del mercurio da 200 a 200.6 non dovrebbe essere accettata senza nuove ricerche molto esatte e fatte per vie diverse.

Quando i valori medi ammessi in diversi periodi variano da 200 a 200.3 e a 200.6 che importanza hanno le cifre Hg = 199.989 e 200.016 date da alcuni? Hanno valore in quanto ci dicono che il peso atomico-molecolare del mercurio deve essere 200 oppure molto vicino a 200. Hardin (2) in *cinque* serie (ricalcolate dal Brauner) di ricerche trovò: 200.19 - 200.04 - 199.89 - 199.99 - 200.02 cioè in media 200.016. Svanberg (1845) aveva trovato 199.59. Dei tre valori 200 - 200.3 - 200.6 sino ad ora proposti

---

(1) " Journ. Am. Chem. Soc. „, 1910, t. 32, p. 1117; " Chem. Zentralbl. „, 1910, II, p. 1801.

(2) Determinazione del peso atomico dell'argento, del mercurio e del cadmio per via elettrolitica, " Journ. Am. Chem. Soc. „, 1896, XVIII, p. 1103.

quale è quello più probabilmente esatto? Io credo che quello più vicino al vero sia 200.0. Discutendo tutti i dati sino ad ora conosciuti si arriva a Hg = 200.0. Bisogna aver fiducia nei numeri che più si avvicinano al peso atomico desunto dalla legge di Avogadro.

Pel *cadmio* si è sempre ammesso sino a pochi anni fa il peso atomico 112 che corrisponde alla legge di Avogadro. Ora invece si ammette 112.4. Eppure vi sono le esperienze di Hauer (1857) che dànno 111.94; di Lenssen (1860) 112.03; di Partridge (1890) 111.80, 111.76 ecc. in media 111.73; di Morse e Jones (1890) 112.06 e 112.02; di Lorimer e Smith 112.06; di Bucher 111.88 - 112.11 - 111.87; di Hardin (1896) 112.045 e 112.046 e 111.98.

Per l'*erbio* sino ad ora si era ammesso Er = 167.4, ma dalle esperienze di K. A. Hoffmann (1) viene cambiato ora in 167.7.

Per il *platino*, per lungo tempo era accettato il peso atomico 194.5 e anche 193.4, poi per molti anni sino al 1908 era dato Pt = 194.8, ammesso anche dal Clarke; nel 1909 si accetta nelle Tavole internazionali Pt = 195.0 e dal 1911 Pt = 195.2.

Perchè tutti questi cambiamenti? Ripeto, queste mutazioni non si dovrebbero fare se non quando fossero dimostrate inesatte le esperienze precedenti, con altre ricerche concordanti fatte da autori diversi.

Così può dirsi del *fosforo*, pel quale sino al 1910 si è ammesso P = 31.00, poi in seguito alle ricerche di Baxter e Jones (2) sul fosfato triargentico si accettò il numero P = 31.04 - 31.03 ed ora secondo le ricerche di Baxter, Moore e Boylsten (3) sul tribromuro di fosforo si avrebbe P = 31.027 se Ag = 107.88 e P = 31.024 se Ag = 107.87.

Per il *bromo*, Br = 79.96 sino al 1908 e poi 79.916 ossia 79.92 dal 1909.

Per il *tellurio* da alcuni anni è dato come peso atomico

(1) " Berichte ", t. 43, p. 2635.

(2) " Journ. Am. Chem. Soc. ", 1910, t. 32, p. 298 e " Zeits. f. anorg. Chem. ", 66, p. 97.

(3) " Zeits. f. anorg. Chem. ", 1912, t. 74, p. 383.

invariato Te = 127.5. Però anche riguardo a questo elemento vi sono non poche esperienze contraddittorie che non si spiegano facilmente.

Secondo Browning e Flint il tellurio ordinario sarebbe un corpo complesso, formato da due sostanze: l'una α con peso atomico inferiore a 127 e l'altra β col peso atomico superiore a 127 (1). Flint ha poi (2) continuato il lavoro fatto insieme a Browning sul frazionamento del tellurio per idrolisi del tetracloruro. Nelle frazioni successive il peso atomico ha costantemente diminuito. Sette analisi del nitrato basico, rappresentante il decimo frazionamento, hanno dato per Te dei valori da 124.25 a 124.42. Questi numeri differiscono molto dal peso atomico 127.6 ammesso nelle tabelle del 1905-1906.

Nelle tabelle del 1898 era dato Te = 127; ora la tabella del 1912 porta 127.5.

Questi lavori di Browning e Flint furono recentemente contestati da ricerche di Harcourt e Baker (3) e di G. Pellini (4).

Erdmann ed altri avevano già dato 127; anzi Marckwald (5) in una serie di ricerche aveva trovato 126.85, poi in altre ricerche fatte con Foizik (6) 127.6. Il Brauner nel 1883 aveva trovato Te = 124.5 e in altre ricerche nel 1889, per ossidazione trovò 125.0 e dal $TeBr^4$ ebbe 127.66. Poi nel 1907 Baker e Bennett (7) trovarono 127.6 ed Harcourt e Baker (loc. cit.), 127.53.

È vero che le esperienze di Standemeyer (1895) hanno dato 127 - 127.3 ed altre 127.5 - 127.7; quelle di Chikashigé (1896) 127.57 - 127.61; di Metzner (1898) 127.9; di Pellini (1903-1905 ecc. e 1911) hanno dato 127.6; come pure quelle di Köhner (1901) 127.6; di A. Gutbier (1902) 127.65 - 127.34 - 127.55; di A. Schott (1902) 127.70; di Gallo (1905) che trovò 127.61; di Norris

---

(1) " Am. Journ. Sc. „, 1909 (4), t. 28, p. 317 e " Zeits. f. anorg. Chem. „, 1909, t. 64, p. 112.

(2) " Am. Journ. Sc. „, 1910, t. 30, p. 209 e " Zeits. f. anorg. Chem. „, (1910), t. 68, p. 251.

(3) " Journ. Chem. Soc. „, 1911, t. 99, p. 1311.

(4) " Rend. R. Acc. Lincei „, 1912, vol. XXI, p. 218.

(5) " Berichte „, 1907, t. 40, p. 4730.

(6) " Berichte „, 1910, t. 43, p. 1710.

(7) " Journ. Chem. Soc. „, t. 91, p. 1849.

(1907) 127.48 (per N = 14.01); di Gutbier (1905) 127.55 - 127.68; ma vi sono anche quelle di Heberlein (1898) che diedero 127.0 e di O. Steiner con 126.4 (1).

Nella tabella dei pesi atomici data dal Van der Plaatz nel 1886 il peso atomico del tellurio è segnato 125 con una oscillazione di 3. Meyer e Seubert nel loro libro pubblicato nel 1883 diedero 125.0. Willis nel 1879 con due metodi diversi trovò 126.63 a 129.66 e 126.73 a 127.93. Quasi sempre in quelle serie di esperienze in cui gli autori trovarono 127.6 oppure 127.5 ve ne è qualcuna che dà un risultato o troppo alto o troppo basso. Sono dunque delle discordanze evidenti e notevoli (2).

(1) Brauner, " Zeits. f. anorg. Chem. ", 1902, vol. 31, p. 374.

(2) Il Piccini ha trattato la questione del peso atomico del tellurio nella *Nuova Enciclopedia di Chimica*, vol. I, nell'articolo *Correlazioni numeriche fra i pesi atomici, ecc.*, pag. 362. Qui fa cenno delle cause di errore che *certamente*, come egli scrive, vi sono nella trasformazione del tellurio in TeO^2 coll'acido nitrico. E a questo proposito piacemi far conoscere un brano di una bellissima lettera che il compianto chimico mi scriveva il 24 marzo 1902:

.....Nella settimana scorsa ho mandato al Lorenz l'ultima memoria sul vanadio, che termina la serie di ricerche su questo elemento; ho fatto fare una tesi di laurea sul solfato tallico, per compararlo a quello di alluminio e sono stati ottenuti i cristalli misti di allume di tallio e di alluminio, a cui è anche accennato nell'articolo sulla legge periodica, ora sotto la stampa. E poi ho avuto il tellurio che mi ha fatto perdere un tempo enorme per leggere accuratamente quanto è stato pubblicato sul suo peso atomico e ripetere le esperienze.

Purtroppo l'argomento è dei più difficili e mi pento di essermici messo, ma ormai non c'è rimedio. Finchè si farà come fanno gli altri si otterranno presso a poco gli stessi risultati, ma il variare è difficile. Il tellurio non si presta a dare nulla di ben purificabile, e di relativamente semplice. È un elementaccio; ma io non lo lascerò ben avere finchè non si sarà fatto più docile. Del resto nell'ossidazione del tellurio con acido nitrico ci è un fenomeno che è sfuggito a tutti: nessuno si è accorto che non pesava TeO^2 *puro, ma mescolato a un poco di* TeO, *forse contenente* Te^2O^3 *(che non si conosce e che non mi è riescito di ottenere, ma che deve esistere). Son risoluto a non pubblicare nulla finchè non mi paia di avere, se non definita, almeno fatta avanzare la questione; ma purtroppo, se mi ci condurrò, non apparirà la centesima parte del lavoro fatto, e che specie di lavoro ingrato e minuto. Mi sorregge la fede inconcussa sulla legge periodica: è impossibile che* Te *vada dopo* I, *è assurdo che* Te *stia davanti ad* I *se* Te > I.

*Il lavoro del * mi sembra buono; ma qui si tratta di fare la* instauratio ab imis fundamentis*: ci vuole una revisione minuta e coscienziosa e poi venga fuori il nuovo, fondato su di una chimica molto più estesa di questo elemento,*

Il tellurio è pel sistema periodico un punto ancora oscuro; perchè per molte sue proprietà sta bene insieme allo solfo ed al selenio e per altri riguardi se ne allontana. Però le ragioni che militano per tenere il tellurio insieme al selenio ed allo solfo mi sembrano in complesso superiori a quelle che vorrebbero metterlo in un gruppo a parte.

Che concordi o no questo peso atomico col sistema periodico, questo in fondo non è la questione più importante; ciò che importa sapere è il numero esatto che rappresenti questo peso atomico.

Come osservò giustamente il Clarke, per moltissimi anni si è ammesso quasi senza discussione il peso atomico 122 per l'antimonio, mentre oggi si sa, o almeno si ammette da tutti, essere 120 oppure 120.2.

Ancora in questi ultimi anni si hanno avuto dei valori discordanti anche intorno al peso atomico del cloro. Richards e Wells (1) trovarono dal rapporto Ag : Cl (per Ag = 107.93) Cl = 35.473; Leduc dalla densità del gas cloridrico e tenendo conto della deviazione alla legge d'Avogadro trovò Cl = 35.476; però col peso atomico dell'argento ammesso da Guye (2) Ag = 107.89 si ha Cl = 35.460. Colla sintesi dell'acido cloridrico Dixon ed Edgar (3) trovarono Cl = 35.463 per H = 1.0076. In un successivo lavoro Guye e Ter-Gazarian (“ C. R. „, 1906, t. 143, p. 1235) trovarono Cl = 35.461, ma dànno questo risultato come provvisorio essendochè la valutazione della deviazione alla legge di Avogadro è meno sicura coi gas liquefabili che non pei gas detti permanenti. Questa concordanza fra i risultati di Dixon e Edgar e quelli di Guye e Ter-Gazarian può essere anche, secondo Guye, fortuita. Secondo Guye la precisione

---

*che è, quanto si può immaginare scontroso. Quel che si dice del lavoro del * si può ripetere di tutti quelli usciti in questi ultimi anni, o di tutti addirittura. Se si vuole risolvere la questione una volta per sempre occorre del tellurio estendere e completare la storia.*

In questa bellissima lettera il prof. Piccini continua a discorrere del sistema periodico, dei gas nobili, ecc. ecc.

(1) “ Journ. Am. Chem. Soc. „, 1905, XXVII, p. 459.

(2) Guye e Ter-Gazarian, “ C. R. „, 1906, t. 143, p. 411.

(3) “ Proceed. Roy. Soc. „, 1905, A, t. 76, p. 250.

delle misure individuali è solamente di $^1/_{7300}$ sulle pressioni e di $^1/_{10000}$ appena sui pesi.

Il Baxter invece, essendo Ag = 107.93, trovò pel cloro = 35.478.

Della non necessità di cambiare frequentemente i numeri delle tabelle dei pesi atomici, ne abbiamo recentemente un'altra prova. Il Pécheux (1) con metodo elettrolitico ha determinato nel 1912 i pesi atomici del piombo, del rame e dello zinco ed ammettendo per Ag = 107.88 trovò:

Pb = 206.86
Cu = 63.43
Zn = 65.44

Questi numeri concordano con quelli ottenuti da Meaglia (Tesi, Grenoble, 1907) cioè Zn = 65.43 e Pb = 206.80.

Nel sistema di Hinrich (Ag = 108) i tre numeri di Pécheux diventerebbero:

Pb = 207.09 Cu = 63.50 Zn = 65.51.

Secondo le ricerche di Pécheux, e per esser logici, dovremmo dunque nella tabella pel 1913 variare i pesi atomici dati nel 1911:

Pb = 207.10 Cu = 63.57 Zn = 65.37

e sostituirli con:

Pb = 206.86 Cu = 63.43 Zn = 65.44.

Il che certamente non sarebbe da consigliare.

Due abili esperimentatori possono ottenere, operando su un medesimo elemento, dei risultati diversi anche in determinazioni che apparentemente sembrano facili. Il Guye sino dal 1907 fece osservare che per determinare il rapporto numerico $CaO : CO^2$ nella decomposizione del carbonato calcare si potrà avere un poco di CO^2 nel residuo di CaO se non si scalda molto, restando CO^2 imprigionato nella massa porosa formata, e scaldando troppo alto o nel vuoto si corre pericolo di trascinare

(1) " C. R. ", t. 154, p. 1420.

meccanicamente un poco di CaO. Così è il caso del riscaldamento dell'argento in corrente di cloro.

Alcuni autori di valore si sono già da molti anni e specialmente dal 1882 incaricati di rivedere sperimentalmente o di ricalcolare i valori di un gran numero di pesi atomici. Tra i più importanti di questi lavori ricordo quello di F. W. Clarke, *Recalculation of the atomic Weights*, Washington, 1ª ediz., 1882, e 2ª ediz., 1897 (ora credo se ne faccia una terza edizione); e di Lothar Meyer e Karl Seubert, *Die Atomgewichte der Elemente*, Leipzig, 1883. Benchè sia opera essenzialmente di compilazione, ed anche di critica, non è privo di importanza, per la storia della determinazione dei pesi atomici, dopo i lavori di Stas, il libro di John Sebelien: *Beiträge zur Geschichte der Atomgewichte*, 1884.

Th. W. Richards ha raccolto in un grosso volume tutte le sue ricerche sperimentali sui pesi atomici (1).

Ph. A. Guye direttore del laboratorio di chimica fisica della Università di Ginevra ha intrapreso da molti anni un gran numero di ricerche sui pesi atomici e sono assai interessanti le sue ricerche: *Sur la détermination expérimentale de l'écart à la loi d'Avogadro* (1905-1911) (2).

---

(1) *Experimentelle Untersuchungen über Atomgewichte*, Hamburg, 1909. Sono circa trenta i pesi atomici riveduti o determinati di nuovo dal Richards. Egli ha cercato specialmente di eliminare tutte le cause di errore provenienti specialmente dalle impurezze. La presenza di traccie non prevedute di acqua può trarre in errore. Mediante uno strumento semplice detto *nefelometro* riconosce e determina le traccie di precipitati rimasti in sospensione. Si legge con interesse la Conferenza Faraday, *Les propriétés fondamentales des éléments*, fatta alla Società Chimica di Londra dal Th. W. Richards nel giugno 1911 (“ Rev. Scient. „, marzo 1912).

(2) La determinazione esatta della densità dei gas, e la deduzione da quella de' pesi molecolari e atomici, ha fatto in questi ultimi anni de' progressi notevoli. A questo proposito sono da ricordarsi anche i lavori di Leduc, di D. Berthelot, di Rayleigh, di Morley, di Guye, ecc.

Il Leduc nel suo lavoro: *Recherches sur les gaz, volumes moléculaires et états correspondants*, Paris, 1898, p. 59, e in “ A. Ch. „, 1898 (7), t. XV, p. 114, dava i pesi atomici seguenti, suoi, in confronto di quelli di Stas:

(Segue Nota 2 a pag. seg.).

Uno dei primi a rivedere e ricalcolare i pesi atomici di Stas è stato il Van der Plaats, *Essai du calcul des poids atomiques de M. Stas* (1); e credo non privo di importanza trascrivere qui la tabella dei pesi atomici quale fu calcolata da lui nel 1885-1886, essendo questo lavoro in generale assai poco conosciuto:

	Pesi atomici	
	di Leduc	secondo Stas
Argento	107.916	107.929
Azoto	14.005	14.044
Carbonio . . .	12.004	12.004
Cloro	35.470	35.457
Idrogeno . . .	1.0076	1.0025
Ossigeno . . .	16	16
Fosforo	30.975	"
Solfo	32.056	33.0626

In ricerche più recenti, puramente fisiche, il Leduc arriva ai pesi atomici seguenti (*Compressibilité des gaz; volumes moléculaires et poids atomiques*, in " A. Ch. ", (8), 1910, t. XIX, p. 44):

N = 14.005 o anche N = 14.0
Cl = 35.45
C = 12.0055
S = 32.094.

Come si vede egli calcola il peso atomico anche sino alla quarta cifra decimale.

(1) " A. Ch. ", (6), t. 7, p. 499; " Rec. d. trav. chim. Pays-Bas ", 1886, vol. 5°, p. 1239.

Tabella dei pesi atomici secondo i calcoli del Sig. Van der Plaats.

	Peso atomico	Incertezza		Peso atomico	Incertezza
Ag	107.93	± 0.01	Mo	96.0	± 0.3
Al	27.08	0.05	Na	23.05	0.005
As	75.0	0.3	Nb	94	2
Au	196.7	0.5	Ni	58	
Az	14.05	0.01	oppure	58.8	0.5
Ba	137.1	0.1	O	**16**	Base
Bi	208.0	0.3	Os	195	5
Bo	11.0	0.1	P	30.95	0.05
Br	79.955	0.01	Pb	206.91	0.05
C	12.005	0.005	Pd	106.5	1
Ca	40.0	0.05	Pt	194.9	0.2
Cd	112.1	0.2	Rb	85.4	0.1
Ce	141.5	1	Rh	104	1
Cl	35.456	0.005	Ru	104	1
Co	58.8		S	32.06	0.01
oppure	60.0	0.5	Sb	120.0	0.2
Cr	52.3	0.3	Sc	44	0.5
Cs	132.8	0.3	Se	79	0.2
Cu	63.33	0.02	Si	28.0	0.1
Di	145	3	Sm	150	0.5
Er	166	2	Sn	118.1	0.1
F	19.0	0.1	Sr	87.5	0.1
Fe	56.0	0.05	Ta	182.8	0.5
Ga	70	1	Te	125	3
Gl	9.1	0.2	Th	233	1
H	1.00	0.005	Ti	48.1	0.1
Hg	200.1	0.2	Tl	204.2	0.5
In	113.7	0.5	U	240	1
Ir	193.0	0.2	V	51.3	0.1
I	126.86	0.01	W	184.0	0.2
K	39.144	0.01	Y	89.5	1
La	138	2	Yb	173	1
Li	7.024	0.01	Zn	65.3	0.1
Mg	24.4	0.05	Zr	90.5	1
Mn	55.0	0.1			

Questo lavoro del Van der Plaats è uno dei più belli e più profondi che siano stati fatti sulla revisione dei pesi atomici dopo le ricerche di Stas. In questa memoria di Van der Plaats trovansi notizie interessanti sulla solubilità del cloruro d'argento, sulla decomposizione del clorato potassico, ecc. (1).

In un'altra memoria: *Sur les poids atomiques de Stas* (2) il Van der Plaats ricalcola i pesi atomici di dieci elementi e dell'ammonio compensando insieme i 21 rapporti tra 11 incognite secondo due supposizioni 1° e 2° e trova dei numeri assai poco diversi da quelli dati nella tabella precedente. Il Van der Plaats aveva sino dal 1885 determinato i pesi atomici del fosforo, del carbonio, dello stagno e dello zinco (3).

Rispetto al peso atomico dell'argento è bene ricordare qui un brano d'una lettera che lo Stas nell'aprile 1886 scriveva al Van der Plaats:

" En fondant l'azotate d'argent, il perd positivement des vapeurs acides. Lorsqu'on opère cette fusion dans une atmosphère d'*acide hypoazotique* et qu'on élimine ensuite celui-ci par de l'air pur on arrive à un chiffre variant de 157.495 à 157.497 pour 100.000 d'argent; je suis d'avis que tel est bien le résultat définitif, qui s'accorde, du reste, avec mes synthèses antérieures „.

È dunque, scrive Van der Plaats, il nitrato disseccato delle esperienze del 1866, che davano 157.4963 e 157.4919, che si

---

(1) In una nota a pag. 528 trovo citato un lavoro di Stas: *La Science et l'Imagination* (" Bull. de l'Acad. Belgique „, 1880, t. 50) che non è stato inserito nei tre grossi volumi delle *Œuvres complètes de Stas*, pubblicati nel 1894 dallo Spring. È in questo discorso che lo Stas, ancora nel 1880, quando la legge di Avogadro era generalmente adottata, scriveva, riguardo la determinazione dei pesi atomici, che i pesi specifici dei gas sono un mezzo incerto per calcolare i pesi atomici esatti e che " il solo mezzo di arrivare " alla determinazione d'un rapporto è di fondare questo dato sulla *gravi-* " *tazione* „ (loc. cit., pag. 411). Ma oggi sappiamo che anche i metodi basati sulla legge di Avogadro conducono a risultati esattissimi.

(2) " C. R. „, 1893, t. 116, p. 1362 e " Rec. trav. chim. Pays-Bas „, 1893, t. XII, p. 249. I calcoli e le esperienze di Van der Plaats si riferiscono agli elementi: argento, cloro, bromo, jodo, solfo, potassio, sodio, litio, piombo, azoto e all'ammonio.

In questo lavoro il Van der Plaats confuta alcuni dei calcoli di Hinrichs, contrario alle ricerche di Stas.

(3) *Déterminations de quelques poids atomiques*, in " C. R. „, 1885, t. 100, pag. 52.

deve considerare come il composto normale, e che io ho accettato per i miei nuovi calcoli (loc. cit., 1893).

Anche l'Ostwald nel suo prezioso *Lehrb. d. allg. Chem.*, 2ª ed., 1891, t. I, p. 30-42 ha fatto delle interessanti osservazioni sui pesi atomici dello Stas.

Il Van der Plaats però preferisce, per più ragioni, i suoi calcoli ai risultati dell'Ostwald (1893, loc. cit.).

Il Clarke (1) ha poi riassunto e discusso tutti i lavori precedenti.

Un notevole lavoro di indole generale è pure quello che da molti anni va svolgendo il G. D. Hinrichs con la sua critica, tutt'altro che priva di fondamento, contro i lavori di Stas. L'Hinrichs ha sempre insistito che un gran numero di elementi posseggono un peso atomico corrispondente alla legge di Prout e che molte delle celebri determinazioni di Stas non sono prive di errori.

I lavori di G. D. Hinrichs si trovano specialmente nelle sue pubblicazioni seguenti: *The true atomic Weights of the chemical Elements*, Saint-Louis, 1894; *The absolute atomic Weights of the chemical Elements,* Saint-Louis, 1901; " Mon. Scient. ", 1906, t. 20, p. 169 e 419; *Sur la détermination finale des poids atomiques de tous les éléments entrant dans une seule réaction chimique*, " Mon. Scient. ", 1907, t. 21, p. 733; e così altre ricerche negli anni successivi sino al 1911 in cui ha pubblicato: *Discussions des poids atomiques*, nelle sue *Œuvres* in due vol. in-4°, Saint-Louis.

Fra i lavori moderni è pure interessante una memoria di Guye: *De l' importance de la chimie-physique pour la détermination des poids atomiques* (2). Nella conclusione trovo le parole seguenti: " Le travail de revision des poids atomiques qui s'im-
" pose aujourd'hui est extrêmement vaste. Aussi serait-il désirable
" que les jeunes physico-chimistes — particulièrement bien pré-
" parés pour ce genre de recherches — les abordent un peu plus
" souvent. Il suffirait alors de quelques années de travail pour
" doter la science de valeurs de poids atomiques, constituant
" une base solide, qui fait actuellement défaut ".

---

(1) " Journ. Am. Chem. Soc. ", t. 27, p. 322.

(2) " Zeits. f. physik. Chem. ", 1909, vol. 69, p. 315. Volume pubblicato in onore di Arrhenius.

Io invece penso, mi permetta di dirlo l'egregio prof. Guye, esser meglio che questo grande lavoro sia fatto da pochi chimici, ma di valore indiscutibile.

La determinazione dei pesi atomici non è un lavoro puramente analitico, ed anche se ciò fosse, sarebbe già molto difficile.

Sulla presenza di piccolissime quantità di cloruro potassico nel clorato potassico e che possono rendere meno esatto il rapporto molecolare $KClO^3$: KCl, si vegga un lavoro di Ph. A Guye: *Sur la teneur du chlorate de potassium en chlorure de potassium et sur le contrôle néphélométrique; poids atomiques de l'argent*, in " Journ. de Chimie Physique „, 1912, t. X, p. 145.

Bellissima poi ed assai importante è la discussione che fa il Brauner sul peso atomico di ogni elemento nell'*Handbuch der anorganischen Chemie* di Abegg; opera questa purtroppo rimasta incompleta dopo la morte del giovane ed assai valente chimico D. R. Abegg.

Ora, dall'esame di questi grandi lavori di critica teorica e sperimentale risulta chiaramente che per moltissimi pesi atomici vi sono ancora delle discordanze notevoli.

La determinazione delle costanti degli elementi è sempre un lavoro difficilissimo e tanto più difficile per i pesi atomici.

Per quasi tutte anche le altre costanti degli elementi, come ad esempio il punto di ebollizione, troviamo delle discordanze. Per un gran numero di elementi il punto di fusione, esatto, è ancora incerto (1).

È dunque da lodare il lavoro che compie la Commissione Internazionale per i pesi atomici, ma con qualche restrizione.

Io sono di parere che le tabelle dei pesi atomici, specialmente per uso della pratica nei laboratori, non dovrebbero essere modificate se non in casi rarissimi ed eccezionalissimi, e che si ammettessero i numeri a cifre rotonde, quando la differenza fosse lieve come: 79.9 invece di 79.92; solfo 32.0 oppure 32.1 invece di 32.07; magnesio 24.3 invece di 24,32; manganese 54.9 oppure 55 invece di 54.93 ecc. Oppure si pubblichino due tabelle: una per uso dei laboratori e che non variasse mai che in

---

(1) Veggasi G. K. Burgess, in " Journ. of the Washington Academy of Sciences „, luglio 1911, vol. I, N. 1, p. 16 e " Supplem. Ann. all'Encicl. di Chim. „, 1912, p. 46.

casi eccezionali e dopo ripetuti controlli, e l'altra pei pesi atomici teorici. In ogni caso queste tavole non dovrebbero pubblicarsi modificate ogni anno; e non vi dovrebbero essere introdotte delle modificazioni se non quando più determinazioni fatte da esperimentatori *competenti* e *diversi*, e anche con metodi diversi, conducano allo stesso risultato. Facendo altrimenti, cioè facendo ogni anno delle lievi modificazioni oppure delle modificazioni importanti, ma in base a ricerche di un solo autore, perdono in serietà e diventano talora quasi un giuochetto. Chi può garantire dell'esattezza nella seconda decimale quando per elementi anche ben conosciuti e volatili, come il mercurio, siamo incerti ancora nella prima?

Questi frequenti cambiamenti nelle cifre decimali generano il dubbio, fan perdere la fiducia nei dati dell'analisi quantitativa oppure abituano ad una esattezza che non è che apparente.

Noterei con segno interrogativo o dubitativo (?) quei pesi atomici che sono ancora incerti quali, ad esempio, il *neodidimio*, il *lutetium*, il *neoitterbio*, ecc.

In conclusione io proporrei:

1° Che si adottasse per la pratica dei laboratori una tabella dei pesi atomici con numeri interi o con approssimazione nella prima decimale.

2° Questa tabella non dovrebbe essere modificata che in casi eccezionalissimi e dopo ripetute prove di controllo. Mai annualmente, ma possibilmente di cinque in cinque anni, od anche di dieci in dieci anni.

3° Che si pubblicasse una tabella di *pesi atomici teorici*, colle modificazioni annuali, dovute a ricerche fatte da chimici che abbiano una vera autorità in questa parte della chimica. In questa tabella annuale si dovrebbero ricordare però anche i numeri dati nelle precedenti tabelle, per far rilevare subito il valore delle modificazioni introdottevi.

Delle proposte di questa natura sono forse già state fatte da altri, ma non è male ripetere.

Torino, R. Università, Aprile 1912.

Frequenza, Previsione, Probabilità.

Nota di ALESSANRO PADOA

§ 1. — La logica formale permette di rispondere esaurientemente alle domande: — Che cosa significa *applicare* una proposizione scientifica? Quali proposizioni sono *suscettibili* di applicazione? Quand'è che un'applicazione spetta alla *scienza stessa* e quando invece alla *pratica*?

Anzitutto: che cos'è, sotto l'aspetto *formale*, una proposizione scientifica?

Chiamo *costante* ogni simbolo cui è stato attribuito un significato, *variabile* ogni simbolo cui può venir sostituita una costante arbitraria, *interpretazione* di una variabile ogni costante che ci si propone di sostituire alla variabile considerata. Secondochè una proposizione, in senso *grammaticale*, che contenga una variabile, è o non è *vera* per *qualunque* interpretazione della variabile, dico che questa è *apparente* o *reale* nella proposizione considerata.

Ad es., sono formate di sole costanti le proposizioni (*):

(1) $7 \epsilon \mathrm{Np}$, $10 \epsilon (\mathrm{N}_1 + 1)$, $10 \sim \epsilon (7\mathrm{N})$, $7 - 1 = 6$, $10^6 - 1 = 999999$;

a e b sono variabili reali in ciascuna delle proposizioni:

(2) $a \epsilon \mathrm{Np} \quad b \epsilon (\mathrm{N}_1 + 1) \quad b \sim \epsilon (a\mathrm{N}) \quad (b^{a-1} - 1) \epsilon (a\mathrm{N})$

a e b sono variabili apparenti nella proposizione:

(3) $a \epsilon \mathrm{Np} \,.\, b \epsilon (\mathrm{N}_1 + 1) \,.\, b \sim \epsilon (a\mathrm{N}) \,.\supset.\, (b^{a-1} - 1) \epsilon (a\mathrm{N})$

che si può leggere: " SE a è un numero primo, SE b è un numero intero maggiore di 1 E SE b non è divisibile per a, ALLORA $b^{a-1} - 1$ è divisibile per a "

(*) Delle quali le prime tre si leggono: " 7 *è un* numero primo ", " 10 *è un* numero intero maggiore di 1 ", " 10 *non è un* multiplo di 7 ".

e significa: " (OGNI INTERPRETAZIONE di a e di b è tale che) a NON è un numero primo, OVVERO b NON è un numero intero maggiore di 1, OVVERO b È divisibile per a, OVVERO $b^{a-1} - 1$ è divisibile per a „.

Le (1), (2), (3) dànno esempio di tre tipi diversi di proposizioni, che si possono distinguere ordinatamente coi nomi di *asserzioni*, *condizioni*, *implicazioni*. Quanto precede o segue il segno " $\supset$ „ di implicazione chiamasi rispettivamente *ipotesi* e *tesi*; separatamente considerate, esse sono condizioni. L'ipotesi della (3) è una condizione che risulta dall'*affermazione simultanea* di tre condizioni.

Soltanto le asserzioni e le implicazioni sono *proposizioni*, in senso *scientifico*; non sono tali invece le condizioni, isolatamente considerate.

§ 2. — *Applicare* un'*implicazione* significa:

1) trovare una *interpretazione* delle (o di alcune) sue variabili, per cui ciascuna delle *condizioni* (simultaneamente affermate nell'ipotesi) nelle quali entrano *soltanto* le variabili interpretate diventi un'*asserzione vera*;

2) enunciare la proposizione che risulta *cancellando* tali asserzioni e *sostituendo* ovunque le dette interpretazioni alle dette variabili (Se risultasse cancellata tutta l'ipotesi, si cancellerà anche il segno di implicazione).

Chiamo *applicazione* dell'implicazione data ogni proposizione così ottenuta; essa può essere un'*asserzione* o un'*implicazione*, nel qual caso essa è nuovamente suscettibile di applicazione; e questa è ancora un'applicazione della implicazione data (cioè può derivare da essa con un solo procedimento, anzichè con due successivi).

Ad es., a cagione delle (1), per l'interpretazione 7 di a, la (3) dà l'implicazione:

(3') $\qquad b \in N_1 + 1 \,.\, b \sim \in (7\,N) \,.\supset .\, (b^6 - 1) \in (7\,N)$

invece, per l'interpretazione 10 di b, dà l'implicazione:

(3'') $\qquad a \in Np \,.\, 10 \sim \in (a\,N) \,.\supset .\, (10^{a-1} - 1) \in (a\,N)$

infine la (3′) per l'interpretazione 10 di b, ovvero la (3″) per l'interpretazione 7 di a, ovvero la (3) per l'interpretazione 7 di a e 10 di b, dànno l'asserzione:

$$(3''') \qquad 999999 \in (7\,\mathrm{N})$$

Ciascuna delle (3′) (3″) (3‴) è un'applicazione della (3).

Le *asserzioni* non sono suscettibili di applicazione; esse forniscono invece i *dati* per l'applicazione di *implicazioni*.

§ 3. — Secondochè, quali interpretazioni delle variabili di un'implicazione spettante ad una scienza, si usano costanti *tutte* o *non tutte* spettanti alla scienza stessa, l'applicazione risulta rispettivamente una proposizione della *scienza stessa* (che io chiamo *corollario* dell'implicazione data) o una *conclusione pratica* (tale essendo, rispetto alla scienza considerata, anche una proposizione spettante ad altra scienza). Infatti, soltanto nel primo caso, la scienza stessa deve e può *accertare* la *verità* delle *asserzioni* in cui si trasformano alcune condizioni dell'ipotesi, per la prescelta interpretazione delle variabili (asserzioni che andranno eliminate nell'applicazione); mentre, nel secondo caso, le asserzioni stesse non sono più di pertinenza della scienza considerata, la quale perciò nè *deve* nè *potrebbe* in alcun modo accertarne la verità, senza esorbitare dal proprio campo.

Ad es., la implicazione (3) e le asserzioni (1) appartenendo all'Aritmetica, anche le applicazioni (3′) (3″) (3‴) appartengono all'Aritmetica, e sono perciò corollari della (3). Anzi la (3) è suscettibile *soltanto* di *corollari* e non di *conclusioni pratiche*, perchè nessuna delle condizioni della sua ipotesi potrebbe diventare un'asserzione *vera* per interpretazioni non aritmetiche delle variabili.

Sia invece, ad es., l'implicazione:

$$(4) \qquad a, b \in \mathrm{Cls} \,.\, \mathrm{Num}\, a, \mathrm{Num}\, b \in \mathrm{N}_0 \,.\, a \cap b = \Lambda \,.\, \supset . \\ \mathrm{Num}\, a + \mathrm{Num}\, b = \mathrm{Num}\,(a \cup b)$$

cioè: “ se a e b sono *classi*, a ciascuna delle quali appartiene un *numero finito* (0 non escluso) di *oggetti arbitrari*, e se nessuno di questi è *comune* ad a e a b, allora la *somma* del numero

degli a e del numero dei b è il numero degli oggetti della *riunione* di a e di b „.

Quest'implicazione può essere applicata in due modi: sostituendo ad a e a b gruppi di *numeri*, ovvero gruppi di *altri* oggetti qualunque (mele, castagne, ecc.); l'applicazione sarà rispettivamente un *corollario* della (4) o una *conclusione pratica*.

Ecco un es. di applicazione del primo tipo. Premesso che:

$$m, n \in N_0 \,.\supset .\, m \cdots n = N_0 \cap x \ni (m \leqq x \leqq n)$$

cioè: " se m ed n sono numeri interi assoluti, la scrittura $m \cdots n$ rappresenta l'insieme dei numeri interi assoluti che non sono minori di m nè maggiori di n „ e supposte note le asserzioni:

$(1 \cdots 5) \in \mathrm{Cls}$	$(6 \cdots 8) \in \mathrm{Cls}$	$\mathrm{Num}\,(1 \cdots 5) = 5$
$5 \in N_0$	$\mathrm{Num}\,(6 \cdots 8) = 3$	$3 \in N_0$
$(1 \cdots 5) \cap (6 \cdots 8) = \Lambda$	$(1 \cdots 5) \cup (6 \cdots 8) = 1 \cdots 8$	$\mathrm{Num}\,(1 \cdots 8) = 8$

(le quali, alla lor volta, sono applicazioni di altre implicazioni aritmetiche), la (4) dà il *corollario*:

$$5 + 3 = 8$$

Quanto alle applicazioni del secondo tipo di cui è suscettibile la (4), cioè *conclusioni pratiche*, è vero che la *Logica* stabilisce il *significato* della condizione:

$$a, b \in \mathrm{Cls} \,.\, a \cap b = \Lambda$$

e l'*Aritmetica* quello della condizione:

$$a, b \in \mathrm{Cls} \,.\, \mathrm{Num}\, a, \mathrm{Num}\, b \in N_0$$

ma nessuna di queste due scienze può rendersi garante di un accertamento di tal genere, per classi formate di oggetti che non siano di loro pertinenza, e che perciò esse non hanno nemmeno la possibilità di *designare*.

§ 4. — Risposto così alle domande enunciate da principio, esaminiamo la recente *definizione di probabilità* del Peano:

$$(5) \qquad a, b \in \mathrm{Cls} \,.\, \mathrm{Num}\, a \in \mathrm{N}_1 \,.\, \supset .\, \mathrm{P}\,(b, a) = \frac{\mathrm{Num}\,(a \cap b)}{\mathrm{Num}\, a}$$

cioè: " se a e b sono classi e se il numero degli individui della classe a è finito e diverso da 0, allora la nuova scrittura P (b, a) vale il numero degli individui comuni ad a e a b, diviso per il numero degli a „ (*).

Per quanto precede, la (5) è un'implicazione [§ 1] e perciò suscettibile di applicazioni [§ 2] che possono essere suoi corollari o conclusioni pratiche [§ 3], delle quali nè la Logica, nè l'Aritmetica sono garanti.

Ora, pur accettando la detta definizione, io mi domando se non gioverebbe cambiare la *denominazione* della scrittura " P (b, a) „, definita con costanti logiche ed aritmetiche e perciò spettante all'Aritmetica, chiamandola ad es. " *frequenza* dei b fra gli a „, per riserbare la denominazione di *probabilità* ad altra scrittura altrimenti definita, come propongo più innanzi. Intanto, accettata la mia denominazione, si potranno subordinatamente accogliere le denominazioni di frequenza *nulla, scarsa, media, abbondante, totale* corrispondentemente ai suoi valori 0, fra 0 e $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, fra $\frac{1}{2}$ ed 1, 1.

In *tutte* le questioni *aritmetiche*, dette di *probabilità*, effettivamente si tratta sempre e soltanto di *frequenza* degli individui di una certa classe b fra quelli di una certa classe a, nel senso dichiarato, e perciò il cambiamento di *nomenclatura* non può portare alcun inconveniente.

(*) " Rendic. R. Accad. dei Lincei „, vol. XXI, serie 5ª, 1° sem., fasc. 7°. Secondo questa definizione, la probabilità non si presenta come funzione di una sola variabile, cioè " probabilità d'un avvenimento „, ma quale funzione di due variabili, cioè " probabilità dell'avvenimento b fra gli avvenimenti a „; e perciò devono esser date le due classi a e b. Inoltre, non si deve aggiungere la frase solita: " Supposto che i casi possibili siano egualmente possibili, o probabili, o verosimili „, la quale aggiunta crea il circolo vizioso tanto dibattuto; il quale però è solo apparente, poichè la frase accennata, mentre manca di precisione quale avvertimento per chi voglia fare un'applicazione pratica della formola, rispetto a questa è una vana superfetazione.

§ 5. — In pratica, per *probabilità di un avvenimento* s'intende una *valutazione numerica della legittimità dell'attesa* (speranza o timore) dell'avvenimento dichiarato. Ora a me sembra che soltanto *alcune* di tali questioni siano *applicazioni immediate* della (5); e cioè quelle in cui le classi a e b sono *ben determinate* dalla questione stessa ed in cui, ancorchè si *parli* di *un* individuo di a s'intende effettivamente di *riferirsi* ad *un qualunque* individuo di a e quindi al *numero* degli a (ad es., nelle varie questioni di probabilità relative al comune gioco del lotto, non si considera in particolar modo *una* delle estrazioni, ma il *numero* delle estrazioni diverse, cioè delle combinazioni o disposizioni di 90 oggetti a 5 a 5; e, riferendosi invece ad una lotteria, non si considera *un* biglietto, ma il *numero* dei biglietti emessi in relazione al numero ed al valore dei premi da sorteggiare).

§ 6. — Ma vi sono altri casi, in cui la questione è posta per *un solo avvenimento futuro* ed in cui la questione stessa *non determina* la classe a.

Dice il Peano: “ La questione “ qual'è la probabilità che domani piova „ non ha senso, perchè non sono enunciate le due classi a e b da cui dipende la probabilità. Vi si può rispondere completando la frase ellittica, per esempio così: la pluviosità in questo mese, o stagione, o in tutto l'anno, cioè il rapporto fra il numero dei giorni di pioggia e il numero totale dei giorni del mese, o stagione, o anno, è tanta „.

E sta bene, sotto l'aspetto aritmetico. Ma in pratica, un agricoltore, un navigante, ecc., quando pone la domanda accennata, non intende affatto che il *domani* di cui parla sia considerato come un *giorno qualunque*; una risposta che gli venisse data nel modo indicato, con *scelta arbitraria* della classe a, gli apparirebbe uno scherzo da dilettante di statistica. Potendo, egli si rivolgerebbe invece ad un meteorologo perfetto (fornito di dati esaurienti e di leggi infallibili) e gli chiederebbe senz'altro una *previsione sicura*; in mancanza di ciò, egli chiede al *meteorologo-statistico* una valutazione numerica della legittimità dell'attesa che domani piova, in un luogo determinato, *intendendo* ch'egli si valga delle *leggi note* e dei *dati meteorologici attuali*, estendendo eventualmente l'indagine nel tempo (ad istanti anteriori all'attuale) e nello spazio (ad una sfera avente centro in

quel punto e raggio opportuno), secondo il tempo che deve trascorrere dall'istante in cui la domanda *vien posta* a quello cui essa *si riferisce*.

Ed il meteorologo-statistico può seguire utilmente una via di mezzo fra la *valutazione arbitraria* e la *previsione sicura*, ricorrendo ad un concetto di *probabilità a quattro variabili*, che qui definisco:

$$(6) \qquad t, d \in \mathrm{Cls}\text{'}\,\mathrm{q} \,.\, t_1 \in t \,.\, d_1 \in d \,.\, a = t \cap x \ni [c(x) = c(t_1)] \,.$$
$$b \in \mathrm{Cls}\text{'}\,t \,.\supset.\, \mathrm{P}(t_1, c, d_1, b) = \frac{\mathrm{Num}\,[(a + d_1) \cap b]}{\mathrm{Num}\, a}$$

Prima di commentarla, si osservi che, tranne la nuova scrittura " $\mathrm{P}(t_1, c, d_1, b)$ ", tutte le costanti [§ 1] in essa adoperate sono logiche od aritmetiche (*), e perciò essa spetta all'Aritmetica; essa ha forma di implicazione e perciò è suscettibile di applicazioni [§ 2], fra cui conclusioni pratiche [§ 3], delle quali, come d'ogni altra, nè la Logica nè l'Aritmetica devono o possono rendersi garanti.

Ciò premesso, ecco un sistema d'*interpretazioni pratiche* delle *variabili* contenute nella (6): sia t la classe degli *istanti* e sia t_1 un istante *precisato* (quello in cui vien posta la domanda); sia d la classe delle *durate* (fra un istante arbitrario e un istante pure arbitrario ma *distinto* dal primo e *successivo* ad esso) e sia d_1 una durata *precisata* (quella che deve trascorrere dall'istante t_1 all'istante $t_1 + d_1$ cui si riferisce la domanda); sia c un *sistema di circostanze precisate* (ciascuna delle quali sia valutabile, qualitativamente o quantitativamente o in ambo i modi, in ciascun istante) qui considerato quale *funzione univoca* degli istanti; tale funzione *non* essendo necessariamente biunivoca, sia a l'insieme degli istanti x per ciascuno dei quali (in pratica, per ciascuno dei quali *è noto che*) " $c(x) = c(t_1)$ "; e sia b l'insieme degli istanti in cui (in pratica, in cui *è noto che*) *accadde* un avvenimento quale l'*atteso*; allora " la probabilità nell'istante t_1, rispetto alle circostanze c, che al termine della durata d_1 si avveri un avvenimento b " è la frazione che ha per denominatore il numero degli a e per numeratore il numero degli " $a + d_1$ " (istanti che seguono gli a di d_1) che sono dei b.

(*) La scrittura " Cls'q " significa " classe di quantità (numeri reali) ".

È chiaro che, se l'avvenimento fosse atteso non in un *istante* precisato " $t_1 + d_1$ " ma entro un precisato *intervallo continuo di tempo,* i cui estremi seguano t_1 delle durate d_1 e d_2 e che si potrà rappresentare con " $(t_1 + d_1)^{-}(t_1 + d_2)$ ", invece del gruppo di istanti " $a + d_1$ " si dovrà considerare il gruppo di intervalli " $(a + d_1)^{-}(a + d_2)$ ". E può anche darsi, come ho accennato, che, per uno studio più complesso della questione, la valutazione di c in ciascun istante esiga un'indagine retrospettiva per un intervallo continuo di tempo avente per secondo estremo t_1, il quale rimarrà la sola variabile di c quando la durata d' dell'intervallo stesso sia una costante già determinata quale funzione di d_1.

Per contro, volendo semplificar le cose, basta osservare che sempre

$$\text{Num}\,(a + d_1) = \text{Num}\,a$$

per concludere che la *probabilità* definita dalla (6) è la *frequenza* dei b fra gli " $a + d_1$ " quale è definita dalla (5). Ma la (6) costringe *più esplicitamente* della (5), chi voglia trarne un'applicazione *pratica*, a precisare alcuni dati essenziali della questione (circostanze che accompagnano o precedono l'istante della previsione e durata fra esso e l'istante dell'attesa). L'accorgimento nel servirsi di un tale procedimento, mediante una prima raccolta di dati statistici (che andrà man mano arricchendosi) e mediante una selezione sempre più accurata delle circostanze c — così che i risultati forniti dalla formola s'allontanino dal valore $\frac{1}{2}$ (*dubbio*), per accostarsi ai valori estremi 0 ed 1 (*impossibilità* e *certezza*) — conduce ad una determinazione *sempre più approssimata* delle *circostanze precorritrici* del fenomeno esaminato (che, anzichè meteorologico, potrà essere fisico, fisiologico, storico, ecc.) e rende così la statistica collaboratrice non trascurabile dell'indagine scientifica.

§ 7. — Un notevole divario fra le questioni pratiche accennate nel § 5 e nel § 6 sta nel fatto che per le prime *il numero dei casi possibili* si ottiene mediante *operazioni aritmetiche* determinate, da eseguirsi coi *dati numerici* della questione; mentre per le seconde lo si ottiene *contando i dati statistici* for-

niti da tabelle, la cui maggiore o minore estensione è del tutto indipendente dai dati della questione.

Ma è doveroso soggiungere che, se di *circostanze precorritrici* si è parlato soltanto a proposito delle seconde, a ben guardare, tale divario è solo apparente.

Invero, gli *atti* compiuti per imbussolare, mescolare ed estrarre i numeri d'una lotteria costituiscono *le sole circostanze precorritrici decisive* di ciascuna estrazione. Ma poichè quegli atti, quantunque possano sembrare innocentemente semplici e uniformi, nel loro insieme sono invece complicatissimi, così (quando non vi sia intenzione o sospetto di frode) si *rinuncia* a valutare la *dipendenza* dell'estrazione da essi; e, con decisione altrettanto comoda quanto ingiustificata, si *ammette* che essa ne sia *indipendente*!

È dunque tutt'altro che equo l'abituale diverso atteggiamento di fronte alle due categorie di questioni, per cui ogni divergenza fra i *risultati statistici* delle estrazioni *compiute* e le *probabilità calcolate* sulle estrazioni *possibili* viene attribuita al *caso*, mentre ogni divergenza analoga a proposito di fenomeni meteorologici, economici, storici, ecc., suscita troppo facili accuse di *ignoranza*. Tuttavia, esso trova la sua ragion d'essere nell'indole diversa delle circostanze precorritrici delle due categorie di avvenimenti: in quanto le prime, mentre sfuggono all'osservatore superficiale, non attraggono lo scienziato che le considera quali *modalità convenzionali* e *modificabili a piacere*; le seconde invece, essendo totalmente o parzialmente *estranee alla volontà umana*, eccitano la curiosità, così del profano che dello scienziato, a scoprirne le *mutue dipendenze*.

Genova, 13 maggio 1912.

Sulla possibilità di differenziare macroscopicamente parti distinte nella sostanza bianca del centro ovale.

Nota del Prof. A. CESARIS DEMEL.

(Con una Tavola).

Come è noto secondo Baillarger e come è ripetuto da tutti i trattatisti che ne riportano la descrizione e le figure, la sostanza grigia corticale degli emisferi cerebrali, in sezione trasversa, quando venga esaminata con l'aiuto di una lente, risulta costituita di parecchi strati. Questi sono precisamente sei: tre di sostanza bianca e tre di sostanza grigia, che regolarmente si alternano. Siccome il primo a partire dalla periferia è bianco, l'ultimo, il più profondo, è grigio, ed è in immediato rapporto quindi con la sostanza bianca delle circonvoluzioni. Ricordo incidentalmente come il secondo di questi strati bianchi corticali è visibile senza soccorso di lente, nella corteccia della regione occipitale ed è riconosciuto col nome di stria di Gennari. Queste differenze macroscopiche di colore corrispondono a differenze di struttura, e senza volere ora ripetere tutta la complessa struttura della corteccia possiamo dire che, in linea generale, gli strati bianchi corrispondono a regioni nelle quali si trovano fibre mieliniche in direzione trasversale, mentre negli strati grigi queste fibre mieliniche trasversali, senza essere completamente assenti, sono molto più rare. È anche qui dunque la maggior quantità di mielina a dare l'aspetto bianco al tessuto.

Invece, in tutta la sostanza bianca sottostante alla corteccia e fino dunque ai gangli ottico-striati, cioè nel centro ovale, gli anatomici, almeno a quanto mi consta, non descrissero strati o regioni speciali che fossero macroscopicamente discernibili per differenza di aspetto o di colore.

Se esaminiamo infatti il centro ovale messo allo scoperto, sia con un taglio frontale, sia con un taglio trasversale tangente al pavimento dei ventricoli laterali, si vede che in un cervello normale la sostanza bianca è omogeneamente ed egualmente bianca in tutta la sua estensione. Eppure il centro ovale

non ha, nè può avere, in ogni suo punto una struttura eguale, composto come è di fibre e di fasci di fibre di varia lunghezza, di vario spessore, che s'incrociano e s'intersecano in tutti i sensi. È noto infatti che con i varî metodi di tecnica istologica applicati, sia allo studio del cervello normale, completamente evoluto, sia e meglio, sul cervello embrionale nei suoi varî periodi di sviluppo, come fu indicato da Flechsig nel 1876, differenziando cioè i singoli fasci di fibre a seconda della loro successiva mielinizzazione, nel complicato intreccio di fibre che compongono il centro ovale si sono distinti e si distinguono tre grandi gruppi di fibre (fibre di associazione, fibre commessurali, fibre della corona raggiata o fibre di proiezione), ognuno dei quali è formato a sua volta da fasci distinti che è inutile ora il ricordare, perchè sono chiaramente descritti e disegnati in tutti i moderni trattati di anatomia.

Come poi vediamo avvenire nella sostanza bianca del midollo spinale, la quale pure in condizioni normali è omogeneamente bianca, e nella quale per speciali alterazioni degenerative possono i fasci ben distinti di fibre dai quali è costituita, individualizzarsi per caratteri macroscopici ed istologici facilmente riconoscibili (degenerazioni sistematiche del midollo spinale), lo stesso sappiamo oggi avvenire per i singoli fasci di fibre che costituiscono il centro ovale, che possono anche per alterazioni primitive o secondarie, macroscopicamente, e tanto più istologicamente, individualizzarsi. Abbiamo dunque lesioni sistematiche del centro ovale, la cui esistenza è sicura, ma la cui conoscenza oggi è meno precisa di quanto non siano le degenerazioni sistematiche del midollo spinale e tanto più quindi degne della nostra attenzione e del nostro studio.

Tra queste lesioni sistematiche la più nota è certamente quella messa in rilievo ed ampiamente illustrata con lo studio di molteplici casi (che sempre più ne convalidarono la primitiva interpretazione di causa, di sede e di natura) da Marchiafava (1) e dai suoi allievi, e da Rossi (2). È una degenerazione primitiva di origine tossica (alcool) esclusivamente localizzata alle fibre commessurali del corpo calloso, eccezionalmente anche alle fibre commessurali della commessura anteriore. Nel corpo calloso e nella commessura anteriore sono esclusivamente colpite le fibre della parte centrale, tantochè, ventralmente e dorsalmente, un

sottile strato di fibre è rispettato. La degenerazione poi si arresta subito lateralmente e non si continua quindi nel centro ovale. Macroscopicamente è riconoscibile per una minor consistenza della regione colpita che si affossa leggermente sulla superficie di taglio, e per un aspetto grigio o grigio-giallastro distinto; istologicamente dalla scomparsa delle guaine midollari delle fibre nervose, seguìta dalla scomparsa anche dei cilindrassi, che persistono solo là dove l'alterazione è meno progredita. Successivamente Sarteschi (3) in un caso sezionato e raccolto al mio Istituto, descrisse un'alterazione della parte periferica del centro ovale e di qui irradiantesi nella sostanza bianca delle circonvoluzioni, al tutto simile per l'aspetto macro- e microscopico a quella descritta da Marchiafava e come quella riferibile certamente all'alcoolismo. La stessa alterazione degenerativa, determinata dalla stessa causa tossica, si trovava dunque in questo caso in una sede diversa. Recentemente poi da me fu raccolto un caso nel quale le alterazioni degenerative per l'aspetto macroscopico ed istologico erano assolutamente simili a quelle descritte da Marchiafava e da Sarteschi e pure determinate da alcoolismo ed erano localizzate sia al corpo calloso ed alla commessura anteriore, sia alla parte periferica del centro ovale ed irradiantesi nella sostanza bianca delle circonvoluzioni. In questo caso furono dunque colpite contemporaneamente le due sedi nelle quali separatamente era stata descritta quest'alterazione degenerativa (fig. 1).

È utile il ricordare che tanto nel caso di Sarteschi come nel mio attuale, la sostanza grigia della zona degenerata non arrivava mai a raggiungere la sostanza grigia della corteccia, ma da questa si dimostrava sempre nettamente separata da una benderella bianca ben distinta, a margini netti, che per la sua regolare distribuzione viene quasi a formare un settimo strato bianco, il più profondo, da aggiungersi ai sei che ho già ricordati essere descritti dagli anatomici nella corteccia. Di questo caso finora unico, e molto interessante per l'insolita estensione dell'alterazione degenerativa, io ho fatto oggetto di attento studio e ne farò argomento di una prossima pubblicazione.

Per facilitarmi lo studio macroscopico del caso, io non ho voluto limitarmi a sezionare l'encefalo da me raccolto, ma ho praticati espressamente, a scopo comparativo, dei tagli a tutto

spessore e in varie direzioni in molti altri cervelli normali o patologici, presi allo stato fresco o già fissati ed induriti in formalina, come, a complemento dell'esame istologico, io ho creduto necessario allestire dei preparati di controllo da altri cervelli, di corpi callosi o commessure anteriori, di zone varie del centro ovale, per farmi una precisa e personale esperienza e sulla struttura normale di queste regioni e sopra eventuali incipienti stadii di fatti degenerativi che all'esame macroscopico non fossero stati ancora visibili.

Se queste ricerche mi furono di utile sussidio allo studio del mio caso, mi permisero anche di mettere in rilievo un fatto che parmi possa presentare un certo interesse e per gli anatomici e per gli anatomo-patologi, e sull'illustrazione di questo fatto voglio ora espressamente fermarmi.

Se noi pratichiamo dei tagli frontali o dei tagli orizzontali a tutto spessore negli emisferi cerebrali di un cervello uniformemente indurito per un lungo soggiorno in una soluzione diluita di formalina, noi vediamo che la sostanza bianca del centro ovale non presenta quell'aspetto omogeneo quale risulta invece all'esame macroscopico praticato sul cervello fresco, appena questo sia tolto dall'animale o dal cadavere. La tinta biancolattea della sostanza bianca del cervello fresco, si fa leggermente più scura con tendenza o ad un color giallo-pallido o a un color grigio appena sensibile, a seconda della concentrazione della formalina adoperata o del più lungo soggiorno del cervello nella soluzione stessa. Corrispondentemente vediamo la sostanza grigia corticale scolorarsi leggermente, per cui nell'insieme il contrasto di colore che fa così bene distinguere le due sostanze allo stato fresco, si attenua. In contrapposto se noi esaminiamo attentamente la superficie lucida della sostanza bianca così messa in rilievo (e per far questo occorre che la superficie di taglio sia perfettamente piana) noi vediamo che questa è ben lontana dal presentare un aspetto omogeneo, ma in essa si distinguono varî tratti ben differenziati per una diversa, distinta e più intensa colorazione, talora a contorni netti, talora a contorni indistinti. La prima volta che io mi accorsi di questa eventualità, pensai naturalmente ad un fatto accidentale e dipendente da una imperfetta ed ineguale penetrazione del fissatore in profondità

e quindi ad un ineguale indurimento del tessuto, o ad una pregressa alterazione degenerativa sufficiente a cambiare l'aspetto della parte lesa.

Che le due supposizioni fossero errate mi convinsi però subito quando, estendendo le mie ricerche a cervelli diversi di uomo e di animale, fissati per un tempo diverso in soluzioni di formalina variamente titolate, mi accorsi che il reperto si riotteneva con discreta costanza. Non reperto accidentale dunque, ma reperto riproducente una normale disposizione del tessuto che con metodo opportuno si può mettere in evidenza. Fatta questa grossolana constatazione, era interessante di determinare l'estensione, la sede di questi tratti differenziati. Dalle osservazioni che ho fatto fino ad ora appare evidentemente che la sede più frequente di questa differenziazione e dove questa presenta macroscopicamente più spiccati i suoi caratteri è la parte periferica del centro ovale, là dove cioè la sostanza bianca si va approfondando a costituire la parte centrale delle circonvoluzioni. Qui si ha una zona grigia che verso la parte centrale ha contorni indistinti, mentre dalla sua periferia partono delle digitazioni che hanno larga base e che si vanno assottigliando alla estremità libera e che hanno naturalmente varie dimensioni a seconda dell'ampiezza delle circonvoluzioni alle quali appartengono [1].

Queste digitazioni lateralmente hanno margini netti regolari, non raggiungono mai la sostanza grigia corticale ma da questa restano separati da un orletto di sostanza bianca che ha aspetto omogeneo ed uno spessore di poco inferiore al millimetro. Così su un taglio dell'emisfero noi vediamo succedersi (fig. 2-3-4-5) i seguenti strati: Sostanza grigia corticale; orletto

---

[1] Una analoga differenziazione si osserva anche in cervelli conservati lungo tempo in liquido di Müller come ho potuto vedere in cervelli conservati nel Museo del mio Istituto e raccolti molti anni or sono dal Prof. Maffucci. Aggiungo che la differenziazione da me descritta si intravvede anche in fotografie di cervelli sezionati dopo essere stati fissati in formalina, quali si trovano ad illustrare casi interessanti di svariate lesioni cerebrali. Un esempio nettissimo l'abbiamo nella tavola XX fig. 4 che accompagna il lavoro del Dürk (4) (“ Atti del primo Congresso internaz. dei Patologi „ Torino, 1911), dove si vede nel centro ovale dell'emisfero destro la differenziazione da me descritta.

bianco immediatamente subcorticale che segue regolarmente tutte le anfrattuosità della corteccia, zona grigia periferica al centro ovale con digitazioni marcate al centro delle circonvoluzioni: abbiamo cioè un aspetto simile, per quanto meno marcato e distinto nei suoi caratteri macroscopici, a quello descritto da Sarteschi ed ora trovato da me in un nuovo caso e dipendente da una alterazione degenerativa della parte periferica del centro ovale e da ciò ne verrebbe la logica deduzione che l'alterazione degenerativa stessa avrebbe trovata nella parte periferica del centro ovale, per la sua speciale costituzione, un luogo di minore resistenza per istituirvisi. Spetta ora alla ricerca istologica il determinare la natura di questa speciale costituzione. Ora, come ho detto, tanto in condizioni normali come in condizioni patologiche noi troviamo un orletto bianco distinto subcorticale. Quale significato dobbiamo dare a questo orletto?

Noi sappiamo che gli anatomici ammettono l'esistenza di speciali fibre di associazione che stabiliscono dei rapporti tra due regioni della corteccia più o meno lontane fra di loro nello stesso emisfero, e che hanno lunghezza e decorso sensibilmente diversi, tanto che se ne fanno scolasticamente sei gruppi distinti. Di questi, quelli più brevi sono quelli formati delle fibre arcuate o arciformi o fibre ad U, che prendono origine all'apice o sui lati di una circonvoluzione e vanno a terminare, dopo di aver circondata la scissura intermediaria, all'apice o sul lato di una circonvoluzione vicina; ciascuna di esse quindi prende la forma di U, la cui parte media abbraccia nella sua concavità il fondo della scissura ed i cui rami penetrano nelle circonvoluzioni contigue. Il numero di queste fibre varia a seconda delle regioni e, secondo Huguenin, nell'insula del Reil esse raggiungono il loro massimo sviluppo. Questa descrizione ci induce a ritenere che l'orletto bianco sia formato nella sua massima parte da queste fibre brevi di associazione, arciformi. Infatti la sua sede è identica e in più lo vediamo rispettato dalla alterazione degenerativa che, come ha dimostrato Marchiafava, si presume interessi unicamente le fibre commessurali. Ho detto più sopra che questo orletto bianco ha una disposizione molto simile a quella schematica, segnata dai trattatisti per le fibre arciformi, inquantochè invero non è assolutamente identica. Nella figura schematica, ad esempio, che è data dal Testut (5) (e che è riportata

anche da altri trattatisti), le fibre arciformi hanno una direzione che si scosta da quella che dovrebbero avere se l'orletto bianco da me descritto risultasse davvero dal loro insieme. Infatti qui le fibrille bianche arciformi, come sono segnate, non seguono esattamente gl'infossamenti della sostanza grigia e se ne scostano soverchiamente. Nella figura schematica invece del Poirier e Charpy (6) e nella quale insieme alle fibre di associazione sono segnate anche le fibre di proiezione, si ha una disposizione delle fibre arciformi appunto " molto simile „ all'aspetto macroscopico da me descritto. Se la corrispondenza che affermo è vera, ed anche qui l'esame istologico dovrà dimostrarlo, la figura schematica di Poirier andrebbe corretta nel senso che anche nella parte più profonda dell'insenatura si trovano le fibre di associazione a formare uno strato continuo, e così non si avrebbero solo fibre ad U con la concavità rivolta verso la corteccia, ma se ne avrebbero altrettante con la concavità rivolta verso il centro ovale.

Interpretato così l'orletto bianco, come dobbiamo interpretare la sostanza tenuemente grigiastra sottostante?

Ho detto come l'averla trovata in molti cervelli mi abbia fatto escludere l'ipotesi di una semplice accidentalità, aggiungo ora che questa esclusione è convalidata dal fatto che quando questa sostanza è visibile ha sempre lo stesso aspetto e la stessa disposizione, per quanto variino gli individui dai quali i cervelli provengono; indica dunque un qualche cosa di preformato che il metodo di fissazione con la formalina rende macroscopicamente visibile. In che veramente consista questa speciale struttura, verosimilmente in rapporto ad una minore quantità di mielina (che, come sappiamo, è quella sostanza che con la sua presenza dà il color bianco al tessuto, tanto che un conglomerato di fibre amieliniche ha un colore grigio), sia che questa minor quantità dipenda da un minor numero di fibre nervose, sia che dipenda da un più sottile rivestimento mielinico delle fibre stesse, io non posso ora con un'affrettata ricerca istologica istituita sui pezzi da me raccolti decidere, ma sarà necessario per farlo di raccogliere in fissativi diversi e necessari per i varii metodi di ricerca, materiale nervoso possibilmente fresco. Che questo aspetto grigio poi indichi un processo degenerativo sistematizzato, io sarei inclinato ad escludere e per

averlo incontrato in cervelli di persone che mai in vita avevano presentati sintomi di alterazioni nervose, e per averlo riscontrato in animali certamente normali. Che possa essere un fatto puramente cadaverico anche non credo, perchè non ho mai visto un rapporto tra la sua intensità e la distanza dal momento della morte. Fosse anche però un fatto cadaverico (nè io ho fino ad ora, considerata la data recente delle mie osservazioni, potuto fare una ricerca cronologica per deciderlo od escluderlo), non perderebbe il suo valore, giacchè dimostrerebbe pur sempre una più facile alterabilità e una minor resistenza più pronta ai processi autolitici cadaverici in una parte circoscritta del centro ovale. Per ora mi basta d'affermare che la zona così dimostrabile alla parte periferica del centro ovale non corrisponde sicuramente, per sede ed estensione, a nessuno di quei fasci ben sistematizzati che gli anatomici riconoscono nei varii sistemi di fibre che compongono il centro ovale, e per ora possiamo dire solamente che corrisponde a quella parte del cervello che, in alcuni casi di degenerazione grigia dei segmenti centrali delle fibre commessurali (corpo calloso e commessura anteriore), è contemporaneamente degenerata.

Ma nei cervelli fissati in formalina, oltre alla sostanza grigia subcorticale, si osservano in profondità altre parti nettamente differenziate per una colorazione grigia per quanto tenue ben visibile, che spicca sul fondo omogeneamente bianco del centro ovale e che in alcuni casi sembrano corrispondere a qualcuno dei fasci delle fibre di associazione e specialmente al fascio longitudinale della circonvoluzione limbica, ma sulla perfetta identificazione di queste fascie grigiastre coi fasci ora citati e con altre parti funzionalmente differenziate e note, io non posso ancora decisamente affermarmi e lo farò solo quando con successive ricerche topografiche mi sarò premunito da possibili errori di apprezzamento. Nel corpo calloso invece, e nella commessura anteriore dei cervelli che presentavano la differenziazione da me descritta, non ho mai potuto dimostrare alcuna differenziazione, e al taglio trasversale si presentarono sempre con una superficie biancastra omogenea. Come ho detto, per i miei esami io ho adoperati cervelli varii d'uomo e d'animale fissati per un tempo diverso in soluzioni di formalina, variamente e talora anche non ben titolate, e da ciò ne venne una

ineguaglianza da caso a caso nella nettezza e nella costanza dei reperti descritti. Bisogna dunque ora, ed io la sto facendo, istituire una ricerca sistematica per determinare quale sia la diluizione di formalina e quale la durata dell'immersione necessaria a differenziare il centro ovale degli emisferi nel modo migliore.

Per ora parmi di poter affermare che i migliori risultati si ottengono con una lunga immersione in tenui soluzioni di formalina (3-4 %); cervelli, infatti, fissati in queste condizioni e che erano stati preparati per servire allo studio anatomico macroscopico del cervello e gentilmente favoritimi dall' Istituto anatomico di Pisa, ed altri, pure di aspetto normale, da me raccolti, ed un cervello di cavallo, sono quelli nei quali potei dimostrare nella maggior chiarezza la descritta differenziazione. Per quanto dunque la mia osservazione sia ancora per molti punti manchevole, ho creduto utile renderla nota subito perchè gli anatomici, che possono facilmente controllarla su cervelli fissati nelle condizioni da me ricordate, ora mi aiutino a completarla e possa così poi la fisio-patologia utilmente valersene nel difficile e complicato studio delle localizzazioni cerebrali. Data l'importanza funzionale, ad esempio, che si vuol oggi dare alle fibre di associazione arciformi, tantochè si ritengono come il principale substrato anatomico dell'associazione delle idee, delle sensazioni, dei movimenti, ecc., dato il modo netto col quale se ne può fissare col mio metodo la sede e valutarne, dallo spessore dello strato che occupano, grossolanamente la quantità, sarà utile farne una ricerca comparativa nei cervelli delle varie specie di animali per vedere se, col crescere dell'intelligenza, proporzionatamente aumentino; e sarà anche utile ricercare, in certe psicosi, se queste fibre arciformi presentino alterazioni tali di quantità o di mielinizzazione, da condurre nelle benderelle bianche subcorticali delle alterazioni visibili macroscopicamente.

Qualunque possa essere l'importanza del fatto da me rilevato, in rapporto a possibili applicazioni anatomiche o fisiopatologiche, parmi intanto resti assodato e si possa quindi concludere che:

Adoperando per la fissazione e l'induramento del cervello deboli soluzioni di formalina, nel centro ovale degli animali superiori e dell'uomo, centro ovale che fino a ora si riteneva avesse nella sua

totalità un aspetto bianco omogeneo, si possono differenziare per una tenue colorazione grigiastra più intensa, delle parti distinte. Di queste, quelle subcorticali, ma separate dalla corteccia da un orletto bianco continuo, sono le più costanti a trovarsi e le più manifeste, e corrispondono per sede e per disposizione a quell'area periferica del centro ovale che presenta un' elettiva localizzazione di speciali processi degenerativi, che con maggior frequenza colpiscono le fibre commessurali del corpo calloso e della commessura anteriore.

Istituto di Anatomia patologica della R. Università di Pisa.
Maggio 1912.

LAVORI CITATI

(1) MARCHIAFAVA e BIGNAMI, *Sopra un'alterazione del corpo calloso osservata in alcuni alcoolisti*, " Riv. di patologia nerv. e mentale „, 1903, p. 544.
— MARCHIAFAVA, " Atti della Soc. Ital. di Patologia „, 1907.
— A. BIGNAMI, *Sulle alterazioni del corpo calloso*, ecc., " Policlinico „, Sezione pratica, 1907.
— MARCHIAFAVA e BIGNAMI, *Sopra una alterazione sistematica delle vie commessurali*, ecc, " Rendic. della R. Acc. dei Lincei „, 1910.
— MARCHIAFAVA, BIGNAMI, NAZARI, *Ueber System Degeneration der Kommissurvahnen*, etc., " Monatsch. f. Psych. u. Neurologie „, Bd. XXIX, 1911.
— MARCHIAFAVA, *Sulla degenerazione sistematica delle vie commessurali*, ecc., " Atti del 1° Congr. Intern. dei Patologi „, Torino, 1911.
(2) ROSSI O., *Sulla istologia patologica di una speciale alterazione descritta da Marchiafava*, ecc., " Riv. di pat. nerv. e mentale „, Giugno 1911.
(3) SARTESCHI, *Sopra una speciale alterazione della sostanza bianca in un caso di alcoolismo cronico*, " Riv. sperim. di freniatria „, vol. XXXVII, 1911.
(4) H. DÜRCK, *Ueber fast totale Verkalkung*, ecc., " Atti del 1° Congr. Intern. dei patologi „, Torino, 1911.
(5) L. TESTUT, *Trattato di anatomia umana*, Unione Tip. Edit. Torinese, 1898, vol. II, p. 354.
(6) P. POIRIER et A. CHARPY, *Traité d'anatomie humaine*, Paris, Masson, 1901, vol. III, p. 500.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

Fig. 1. Sezione frontale dell'encefalo, in corrispondenza della parte anteriore del corpo calloso in un caso di alcoolismo cronico (Caso inedito di A. Cesaris Demel, con degenerazione grigia della parte centrale del c. calloso e della commess. ant. e della parte periferica del centro ovale. Si vede distintamente l'orletto bianco che separa la sostanza grigia propria della corteccia della sostanza grigia dell'area degenerata). (Grandezza naturale).

Fig. 2. Sezione frontale di un encefalo umano ritenuto normale e fissato in formalina all'Istituto Anatomico di Pisa. Alla parte periferica del centro ovale si differenzia una zona grigiastra che manda digitazioni verso la corteccia senza raggiungerla (Grandezza naturale). Un'analoga disposizione si vede nelle tre figure seguenti 3-4-5.

Fig. 3. Sezione frontale del lobo frontale di un encefalo umano ritenuto normale e fissato in formalina all'Istit. di anat. patol. di Pisa. Spiccatissimo è l'orletto bianco subcorticale.

Fig. 4 e 5. Rispettivamente, sezione frontale e sezione longitudinale di un encefalo normale di cavallo fissato in formalina.

Osservazioni intorno alle ossa wormiane della fontanella "fronto-naso-maxillo-lacrimale" e intorno all'osso "lacrimale" nel Camoscio.

Nota del Socio LORENZO CAMERANO.

(Con una tavola).

Nella regione faciale del cranio del camoscio si trovano le cosidette *lacune* fra il nasale, il frontale, il mascellare superiore ed il lacrimale da alcuni autori denominate lacune etmoidali, da altri lacune lacrimali, le quali corrispondono alle fontanelle *fronto-naso-maxillo-lacrimali* di Maggi (1) e di altri autori. Lo sviluppo di queste fontanelle è molto variabile e, non raramente, nel cranio dei camosci non appaiono affatto, per il particolare sviluppo che assumono le ossa che le delimitano, frontale, mascellare, lacrimale, nasale.

Non raramente, almeno nei cranii da me osservati, si osservano nelle sopradette fontanelle ossa wormiane (2).

Queste ossa sono indicate dagli A. colla denominazione di ossa *maxillo-naso, lacrimo-frontali.* Essi vennero considerati da Staurenghi e da Ranke come *prefrontali* e ritenuti omologi del prefrontale dei Sauropsidi. Il Le Double li considera come ossa wormiane e fontanellari. Egli dice: " J'incline à voir plutôt " dans ces os anormaux et dans ceux qualifiés, chez l'homme,

(1) L. Maggi, *Fontanelle nello scheletro cefalico di alcuni mammiferi*, " Rend. Istituto Lombardo Sc. e Lett. ", serie II, vol. XXIII, 1890, pag. 439 e II, p. 580.

(2) Cfr. S. Bianchi, *Sopra alcune varietà del cranio osservate in feti umani ed in altri mammiferi*, " Monitore zoologico ", IV, 1893, pag. 11. — V. Giuffrida Ruggeri, *Osso nasale bipartito, postfrontale e altri wormiani nello scheletro facciale*, " Monitore zoologico ", XII, 1901. — Le Double, *Traité des variations des os du crâne de l'homme etc.*, Paris, Vigot, 1903, pag. 213. — Id., *Traité des variations des os de la face de l'homme etc.* Paris, Vigot, 1906, pag. 210.

“ de nom de préfrontal par Staurenghi et par Ranke des os
“ wormiens fontanellaires que des os homologues du préfrontal
“ des Sauropsidés (1), d'autant plus qu'il n'est pas très rare de
“ rencontrer dans les *Espèces porcine*, *ovine* et surtout *bovine*, et
“ généralement d'un seul côté, entre le frontal en haut, le ma-
“ xillaire en bas, le nasal en dedans, l'unguis en dehors, un os
“ appelé os *wormien fontanellaire-lacrymo-nasal* par Cornevin.
“ Cet os répond, en effet, à la fontanelle *naso-fronto-maxillo-*
“ *lacrymale* du fœtus des *Suidés*, des *Ovidés* et de *Bovidés*. Il a
“ été trouvé:

1	fois	sur	9	fœtus	de Bos	trouvés	par	Maggi
1	„	„	23	„	„	„	„	Bianchi
1	„	„	17	„	„	„	„	Le Double „.
3			49					

Il Le Double, nel suo lavoro posteriore sulla variazione delle ossa della faccia (op. cit.), conferma la sua interpretazione di ossa fontanellari e aggiunge la menzione di due altri casi stati osservati da Giuffrida Ruggeri (op. cit.), uno nell'uomo e l'altro nel gorilla. Non mi consta siano state fatte speciali osservazioni a questo riguardo nel camoscio. Ho avuto occasione di studiare una serie di 165 crani di camosci, maschi, femmine e giovani di varie età di numerose località delle Alpi, degli Abruzzi, dei Pirenei, ecc. Credo utile di pubblicare i risultati delle mie osservazioni intorno all'argomento che ci occupa.

Ho trovato 29 casi di ossa *naso-maxillo-lacrimo-frontale* più o meno ben sviluppati, vale a dire, 22 casi in 95 crani di maschi, 7 casi in 70 crani di femmine.

Nelle figure unite a questo lavoro ho rappresentato le principali forme che le ossa in questione presentano e non credo necessaria una minuta descrizione.

Osserverò che in cranii di individui non solo adulti, ma di età avanzata (fig. 2, 3, 4, 7) l'osso fontanellare si presenta spesso

(1) Cfr. intorno ai prefrontali, G. Perna, *Die Nasenbein. Eine Embryologische und vergleichend-anatomische Untersuchung*, “ Archiv für Anat. und Physiologie, Anat. Abt. „, 1906.

piccolo, irregolare, assimmetrico dai due lati. Esso si salda più o meno completamente col nasale e spesso anche non occupa che una parte della fontanella corrispondente.

In altri casi, è maggiore lo sviluppo dell'osso fontanellare (fig. 1, 6, 8) e, pur saldandosi col nasale, occupa intieramente lo spazio fontanellare, di cui assume la forma. Nel caso rappresentato nella fig. 8 la fusione dell'osso fontanellare col nasale è già avanzata nella parte sinistra, mentre nella parte destra non è ancora avvenuta.

Nel materiale da me esaminato, oltre i casi sopra menzionati nei quali è ancora ben visibile la traccia della sutura dell'osso fontanellare col nasale, si trovano pure frequenti i nasali, che colla loro forma nella regione fontanellare lasciano supporre la presenza dell'osso fontanellare totalmente e completamente saldato col nasale.

Non credo tuttavia che, nei camosci, nel caso di un nasale, che con un suo prolungamento laterale viene a riempire la fontanella, si possa senz'altro conchiudere trattarsi di un osso fontanellare che si è saldato col nasale stesso.

Le figg. 5 e 10 della tavola unita a questo lavoro rappresentano nasali di individui assai giovani, che si protendono nello spazio fontanellare, ma in cui non è visibile traccia alcuna di sutura con un possibile osso fontanellare. Simile forma del nasale ho osservato anche in un cranio di quattro mesi di età. In altri crani di individui pure giovanissimi la fontanella in questione è invece amplissima e il nasale non presenta nel margine esterno, che confina con esso, nessun accenno a prolungamento. Si tratta in questo caso probabilmente di un vero processo del nasale (1), come talvolta si verifica anche nell'uomo, che si spinge verso l'esterno.

I nasali dei camosci, d'altra parte, si presentano nella loro parte confinante col frontale e colla fontanella molto variabili di forma, come avrò occasione di mettere in chiaro in un prossimo lavoro.

---

(1) Cfr. G. Perna, op. cit., tav. VIII, pag. 35 e 36. — Intorno alla morfologia delle ossa nasali cfr. anche A. Civalleri, *Osservazioni sulle ossa nasali.* Ricerche fatte nel Laboratorio di Anatomia normale della R. Università di Roma e in altri Laboratori biologici, XI, 1906.

In un cranio di individuo assai giovane (fig. 10) osservo che la fontanella *fronto-naso-maxillo-lacrimale* è eccezionalmente più larga che alta: in essa si nota dalle due parti un piccolo osso fontanellare sottile, che è molto più avvicinato al lacrimale che non al nasale, senza tuttavia saldarsi col primo.

Le ossa fontanellari sopradette si possono saldare anche col lacrimale? È questa una questione che col materiale da me esaminato non si può risolvere con sicurezza. In due cranii, uno di femmina delle valli Piemontesi ed uno di maschio delle valli Ossolane (figg. 15 e 16), la fontanella *fronto-naso-maxillo-lacrimale* non esiste o è ridotta a porzione assai piccola e il margine esterno del nasale pare a contatto col lacrimale. Il lacrimale presenta tuttavia una traccia evidente di fusione con un osso di forma triangolare, col vertice in alto a contatto col frontale, il quale viene ad occupare lo spazio fontanellare, che in altri cranii è ben spiccato. Supposto eliminato questo osso, il margine risultante del lacrimale verso lo spazio fontanellare avrebbe la forma che si osserva in numerosi casi.

Si potrebbe credere alla fusione di un osso fontanellare col lacrimale, poichè nei casi di divisione del lacrimale in due parti trasversalmente, di cui dirò più sotto, la sutura che indica la divisione, ha un comportamento diverso e si trova in cranii in cui lo spazio fontanellare è spiccato od è riempiuto da un osso fontanellare saldato col nasale (fig. 11). Ad ogni modo credo sia opportuno fare in proposito più ampie ricerche.

*
* *

L'osso lacrimale nel suo sviluppo e nella sua forma ha speciale importanza fra i caratteri tassonomici degli ungulati (1) e presenta spesso notevoli variazioni di sviluppo e di forma anche fra gli individui della stessa specie.

---

(1) Cfr. T. Knottnerus-Meyer, *Ueber das Tränenbein der Hufthiere*, " Archiv für Naturg. ", 73, I, 1907. — Id., *Ueber die systematische Bedeutung des Tränenbeins für die Gattung Bison*, " Zool. Anz. ", XXXV, p. 589 (1910). — M. Hilzheimer, *Zur systematischen Bedeutung des Tränenbein*, " Zool. Anz. ", XXXVI, 1910, pag. 42.

Nella serie di cranii di camoscio sopra menzionata, da me presa in esame, ho osservato alcuni casi di divisione dell'osso lacrimale, che credo opportuno di pubblicare.

In un cranio di maschio adulto della valle d'Aosta il lacrimale si presenta nettamente diviso trasversalmente in due porzioni quasi eguali. Le due porzioni si sono in parte saldate: ma la sutura è ancora assai evidente. I due lacrimali sono a questo riguardo simmetricamente conformati (fig. 14).

In un cranio di individuo femmina giovanissimo, di circa nove mesi, di val Bavona la divisione trasversale del lacrimale destro in due parti è pure evidentissima. Nel lacrimale sinistro non appare (fig. 11).

In un cranio di un altro individuo pure di femmina giovanissima (di circa nove mesi) di val Bavona il lacrimale sinistro presenta una sutura trasversale simile a quella dell' individuo precedente.

In un cranio di un individuo maschio adulto delle valli Piemontesi (fig. 13) è pure evidente la divisione simmetrica nei due lacrimali, in due porzioni, ma non più, come nei casi precedenti, quasi di eguale grandezza, ma in una porzione superiore più grande e in una porzione inferiore più piccola. Anche un po' diversa è la direzione della sutura.

In altri due cranii, uno di femmina adulta di val Bavona (fig. 9) ed uno di un maschio adulto di val Bavona (fig. 12), i lacrimali presentano pure spiccati indizii di una divisione trasversale.

Questa speciale conformazione del lacrimale è assai rara.

Il Le Double (1) dice: " La division de l'unguis en deux " pièces articulées entre elles au moyen d'une suture transver- " sale a été rencontrée une fois par Hyrtl (Istituz. di Anat. del- " l'uomo, 3ª ediz., trad. ital., Napoli, 1877), et celle du même " os en deux fragments unis par une suture verticale, a été " observée par Thomson (2) sur un crâne gallo-romain et sur " le crâne d'un indigène des îles Carolines „.

---

(1) Opera citata (1906).

(2) *The orbito-maxillary frontal suture in man, in the apes, with notes on the varieties of the human lachrymal bones*, " Journ. of anat. and physiol. „, 24 (1890), pag. 348-357.

Lo stesso Le Double (1) in un precedente suo lavoro dice: " La division de l'unguis en deux par une suture verticale a " été notée une fois par Hyrtl, et la division de l'unguis en " deux par une suture transversale a été observée deux fois par " M. Thomson sur une crâne gallo-romain et le crâne d'un in- " sulaire des Carolines ".

Nel primo dei brani sopra riferiti del Le Double si nota un errore di trasposizione di parole, che è bene aver presente.

Il Le Double, nel suo volume citato sulle variazioni delle ossa della faccia, stampato nel 1906, parla delle variazioni di divisione del lacrimale colle stesse parole usate nella sua precedente pubblicazione sulla morfogenia e sulle variazioni del lacrimale, stampata nel 1900; soltanto dice che il caso di Hyrtl è di una sutura *trasversale* mentre devesi leggere: sutura *verticale*, e i casi di Thomson, dice, sono di suture *verticali*, mentre devesi leggere: suture *trasversali*.

L'Hyrtl infatti parla nel suo caso di una sutura verticale, e il Thomson così si esprime: " In a Gallo-Roman skull the la- " crymal bone was well developed, but distinctly divided into " upper and lower segments by an open suture ".

Intorno alla divisione del lacrimale si confronti anche il lavoro del Macalister (2) il quale dice: " Development of two " detached ossicles in place of a normal bone. This I have once " found in a Negro skull. The lower of the two ossicles was " the larger, and formed a small part of the lachrymal groove, " as well as the lower part of the orbital plate behind it; " the upper corresponded to the top of the orbital plate of " normal lachrymal bone: they are separated by a membranous " interval ".

(1) *Essai sur la morphogénie et les variations du lacrymal etc.* Nancy, Berger, 1900. — Bibliogr. Anat., 3, 1900.

Cfr. anche S. Bianchi, *Sulle varietà dell'osso " unguis " ecc.*, " Gazzetta degli Ospedali ", Milano, Vallardi, 1886. — Erich Zabel, *Varietäten und vollständiges Fehlen*, Anatomische Hefte, XV, vol. I, 1890, p. 155 e seg.

(2) A. Macalister, *Notes on the Varieties and Morphology of the Uman Lachrymal Bone and its Accessory Ossicles*, " Proc. Roy. Society London ", XXXVII, 1884, pag. 230.

SPIEGAZIONE DELLA TAVOLA

Fig. 1. Ossa nasali di camoscio ♂ delle Valli Piemontesi. Adulto.
„ 2. „ „ ♂ „ „ „
„ 3. „ „ ♂ „ „ „
„ 4. „ „ ♂ delle Valli Ossolane. Adulto.
„ 5. „ „ ♀ dell'età di nove mesi circa di Val Bavona.
„ 6. „ „ ♂ delle Valli Piemontesi. Adulto.
„ 7. „ „ ♂ „ „ „
„ 8. „ „ ♀ di circa undici mesi di Val Bavona.
„ 10. „ „ ♀ di circa sei mesi di Val Bavona.
„ 9. Lacrimale di camoscio ♀ di Val Bavona. Giovane.
„ 11. „ „ ♀ di circa nove mesi di Val Bavona.
„ 12. „ „ ♂ di Val Bavona. Adulto.
„ 13. „ „ ♂ delle Valli Piemontesi. Adulto.
„ 14. „ „ ♂ della Valle d'Aosta. Adulto.
„ 15. „ „ ♂ delle Valli Ossolane. Adulto.
„ 16. „ „ ♀ delle Valli Piemontesi. Adulto.

Le figure sono tutte di grandezza naturale.
In tutte le figure: f = frontale; l = lacrimale; n = nasale; m = mascellare; b = zigomatico; a = osso frontanellare.

Relazione sulla Memoria di LUIGI MEINERI, *Sui Muscoli dorsali del piede nell'Uomo.*

Lo strato muscolare del dorso del piede, generalmente noto col nome di muscolo pedidio, fu già molte volte argomento di studio per parte degli anatomici sia per ricercarne le varietà, sia per istabilire se lo si debba ritenere costituito da un solo muscolo o da due, sia ancora per trovare il suo omologo nell'arto superiore. Ma se i varii Autori si trovarono d'accordo nel ritenere come dipendenti dal muscolo pedidio tutte le formazioni muscolari soprannumerarie del dorso del piede, vennero invece a risultati discordanti per quanto riguarda le altre due questioni.

Le indicate considerazioni ed il desiderio di portare qualche luce sui punti controversi indussero lo studente Luigi Meineri, Aiuto-settore nell'Istituto anatomico di Torino, ad intraprendere delle ricerche sistematiche.

Egli dissecò accuratamente centotrenta piedi umani ed esaminò anche gli arti posteriori di diverse scimmie. Dopo tali ricerche può con sicurezza stabilire che la muscolatura del dorso

del piede è formata da due muscoli distinti: l'estensore breve dell'alluce e l'estensore breve delle dita. I due muscoli, specialmente il secondo, vanno soggetti a numerose varietà consistenti nell'aumento o nella diminuzione dei loro fasci costitutivi e nelle anomale connessioni con i muscoli vicini. Riguardo ai fasci soprannumerarii del dorso del piede il Meineri fa questa osservazione importante che non tutti i fasci traggono la loro origine dal muscolo pedidio, ma che invece un certo numero derivano dalla muscolatura interossea e si distinguono dagli altri per la posizione e per i rapporti. Infatti essi sono posti sul secondo spazio interosseo, quasi sempre si uniscono con capi accessorii del sottostante muscolo interosseo dorsale, mentre sono indipendenti dai muscoli estensori brevi.

L'A. entra anche nella questione delle omologie fra i muscoli dorsali del piede ed i muscoli dorsali della mano, e su questo argomento conchiude: 1° che manca all'arto superiore un muscolo il quale si possa ritenere rappresentante dell'estensore breve dell'alluce, giacchè l'estensore breve del pollice, che sembrerebbe esserne il corrispondente, ha per omologo il tendinetto mediale dell'estensore lungo dell'alluce; 2° che l'estensore breve delle dita del piede è rappresentato nella mano dall'estensore proprio dell'indice e da altri muscoli anomali, cioè dall'estensore proprio del dito medio e forse anche dall'estensore proprio dell'anulare; 3° che tutti i muscoli soprannumerarii del dorso del piede, a seconda che dipendono da una delaminazione del piano muscolare estensorio (pedidio) o dai muscoli interossei, hanno i loro corrispondenti al dorso della mano in muscoli aventi analoga origine ed analoga disposizione.

Nella memoria sono descritte minutamente le principali variazioni della muscolatura dorsale del piede; servono di corredo buone figure dimostrative. Le questioni toccate dall'Autore vi sono ampiamente discusse ed i risultati raggiunti sono importanti; tutto ciò ci induce a proporre che lo studio del Meineri venga accolto per la stampa fra le *Memorie* accademiche.

L. Camerano
R. Fusari, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 9 Giugno 1912.

PRESIDENZA DEL SENATORE COMM. GIUSEPPE CARLE
SOCIO ANZIANO

Sono presenti i Soci: Renier, Pizzi, Stampini, D'Ercole, Brondi, Sforza, Einaudi, Baudi di Vesme e De Sanctis Segretario. — Scusa l'assenza il Presidente Boselli.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente, 19 maggio 1912.

Il Presidente dà lettura di una circolare della Commissione per le onoranze al nostro compianto Socio corrispondente G. B. Monticolo.

È presentato il *Discours prononcé par S. E. Boselli à l'occasion des travaux d'amélioration à l'Hôpital Mauricien d'Aoste* (Aoste, 1912) inviato in omaggio all'Accademia dall'Autore.

Per l'inserzione negli *Atti* il Socio Stampini presenta alcune *Note fonetiche sul parlare di Bitonto (Bari)*, parte I: *Il vocalismo*, del prof. Clemente Merlo;

il Socio Einaudi uno scritto su *L'ofelimità delle quantità iniziali e l'equilibrio economico*, del Dr. Gino Borgatta.

D'ufficio è presentato dal Segretario De Sanctis un lavoro inviato dal Socio nazionale Savio su *Pietro suddiacono napoletano agiografo del secolo X* (Nota 2ª).

Offre inoltre il Socio De Sanctis una sua Nota intitolata: *Contributi alla Storia dell'impero Seleucidico: la guerra laodicea e*

la guerra fraterna ed una del prof. Vincenzo Costanzi, *La presunta egemonia dei Caoni nell'Epiro con un'appendice sulla nazionalità degli Epiroti.*

Per le *Memorie* sono presentati i seguenti lavori:

dal Socio Pizzi, *Il Cantico dei Cantici dell'India,* di Emilio Pinna;

dal Socio Stampini, *Appunti sull'ellenismo nella poesia arcaica latina*, di M. Lenchantin De Gubernatis;

dal Socio Sforza una propria monografia, intitolata: *Viaggi di due gentiluomini lucchesi del sec. XVIII*, Parte III: *Viaggio a Venezia del marchese Cesare Lucchesini (1792-1793)*;

dal Socio De Sanctis, *Le battaglie di Cos e di Andro e la politica marittima di Antigono Gonata*, di Emilio Pozzi.

Il Presidente delega i Soci Pizzi e Schiaparelli a riferire in una prossima adunanza intorno allo scritto del Pinna e i Soci Stampini e De Sanctis a riferire intorno a quelli del Lenchantin e del Pozzi.

La Classe prende poi cognizione della monografia del Socio Sforza e con voto unanime (astenendosi l'Autore) ne delibera a scrutinio segreto la inserzione nelle *Memorie* accademiche.

LETTURE

Note fonetiche sul parlare di Bitonto (Bari)[1].

Nota del Prof. CLEMENTE MERLO.

PARTE I.

VOCALISMO

A. — VOCALI TONICHE.

Ricordo prima gli esiti di basi con -E, -A, -O finale (I), poi quelli di basi con -Ŭ, -Ī o metafonètici (II); e dentro ciascuna delle divisioni maggiori, prima gli esiti piani di basi

[1] Attingo dal piccolo '*Lessico dialettale bitontino-italiano*' del Sr Giacomo Saracino (Molfetta 1901), messo cortesemente a mia disposizione dal chiaro Sr Dre Giuseppe Ceci, tanto benemerito degli studi pugliesi. Un abbozzo di vocalismo bitontino, dovuto a un Sr Modugno, vidi anni sono nello studio del Salvioni e me ne valsi per le mie '*Stagioni*', ma più non ne ebbi notizia.

Il bitontino è dialetto di tipo pugliese settentrionale; ha comune col barese il semi-vocalizzarsi del -L- preceduto da vocale velare (*cuèue* **cuu̯-* COLARE, *-uèue* -ŬLARE; *dàttue* -**uu̯e* DACTYLU, *mèrue* MĔRULA, ecc.), fenomeno franteso interamente dall'ABBATESCIANNI ('*Fonol. del dl. barese*', § 68).

Alla grafia *scec*, *scech* del lessichetto sostituisco la *šk*.

Qualche sigla. Con *REW.* rimando al *Romanisches etymolog. Wörterbuch* di W. Meyer-Lübke (p.te 1-4); con '*Note lomb. sic.*', '*Spig. sic.*', '*App. mer.*', '*Oss. varie*', '*Fonet. e morf. delle parl. merid. d'It.*' rimando ai lavori del Salvioni, pubblicati rispettivamente in *Memorie del R. Ist. Lombardo* XXI, 255-302, in *Rend. R. Ist. Lomb.* XL, 1046 sgg., 1107 sgg., 1143 sgg.; XLI, 880 sgg., XLIII 609 sgg., in *Studi Romanzi* VI, 5 sgg., in *Rend. R. Ist. Lomb.* XLIV, 759 sgg., 933 sgg., e nella Miscellanea commemor. del cinquantenario dell'Accademia scient.-letteraria di Milano; con '*Esiti di lat. -GN-*', '*Sdrucc. nel dl. di Molfetta*', '*Note it. centro-merid.*', '*Less. etim. del dl. di Andria*' ai miei lavori, pubbl. rispettivamente in *Mem. R. Accademia* di Torino LVIII, 150 sgg., ibid., 157 sgg., in *Revue de Dialectologie Romane* I, 240 sgg., in *Apulia* (Append. al vol. II). Con cons. rimando alla 2a parte di questo studio, con less. al '*Lessico etimologico del dl. di Bitonto*' a cui sto lavorando e di cui non tarderà ad apparire la prima parte (A-F).

piane o sdrùcciole di sillaba aperta (*a*), poi gli sdrùccioli di sillaba aperta e piani e sdrùccioli di sillaba chiusa (*b*), gli ossìtoni (*c*), i casi di iato (*d*), i casi di sandhi o fonètica sintàttica (*e*). Quanto all'Ī', all'A' e all'Ū', le rubriche I e II son fuse in una sola.

Ī'

§ 1 a). < *òi*: *chestòipe* (dev. di (CO(N)STIPARE) less.; *vòite* VĪTA, VĪTE, *zòite* 'zita', *sciapòite* scipito; *spòiche*[1], *meddòiche* 'mollica', *fòiche*, *vòiche* VĪCU n. l., *veddòiche* 'bellico'; *alòice* 'alice'; *prefòice* caprifico (v. cons., -K-); *pòile* PĪLA, *-òile* -ĪLE (*canar.*, *mann.*, *varr.*, ecc.), *vaciòile*, *fòile* 'filo'; *ciòime* 'cima', *scròime* *REW*. 2661, *-òime* -ĪME(N) (*cacchi.*, *chiand.*, *nghi.*[1], *nzerr.*, ecc.), *spòine*, *sendòine* SENTĪNA, *-òine* -ĪNU, -A, ecc. (*mar.*, *chesci.*, *chiappar.*, *stend.*, *trai.*, *pedeci.*, ecc.; *cavadd.*, *far.*, *frecci.*, *gadd.*, *pend.*; *navand.* s. pl.), *acquatòine*, ecc.; ≈ S + J: *-òise* -ĪSIA ([*camm.*,] *cen.*). Ancora, con -JJ- scempiato[2], *meròisce* 'meriggio', less. ≈ Piani da sdruccioli: *scròive* 'scrive(re)'; *dòice* DĪCE(RE), *sdòice*.

b). < *i*: *vicue* VĪCŬLU, *spìque* (dev. di SPĪCŬLARE), *-ìque* -ĪCŬLU, -A (*ress.* less., ecc.; *ard.*[3], *rad.*, ecc.); *pìnue* **pinula*; *accìtese* OCCĪDE(RE) + SE, ecc.; — *-iscene* -ĪGĬNE (*fl.* FULĪGINE, *pet.* IMPĔTĪGINE). *Ngènere* (da **ngiòine* 'uncino'[4]) è plur. anal. sul modello sing. *-í-*, pl. *-è-* (*dìscete* DĬGĬTU, pl. *dèscetre* -ŎRA).

≈ *-ìcchie* -ĪC(Ŭ)LA (*nat.* ANATĪCULA *REW*. 440, ecc.), *-igghie* -ĪG(Ŭ)LA (*can.* cons., -GL-, ecc.), *vrìgghie* *BRĪDLA (v. cons., -GL-); *-idde* -ĪLLA (*asc.* AXĪLLA, ecc.), ecc., *-ìsse* ĪR(E) + SE (*send.* 'sentirsi', ecc.); ≈ nessi di cons.[5] + J: *lizze* LĪCIU, *pizzue* less.,

---

[1] Nel lessico *spóiche*, *nghióime*, ma sono errori di stampa evidenti.

[2] V. '*Sdrucc. nel dl. di Molfetta*', a p. 168.

[3] Cfr. il sic. *ardicula*, ecc.

[4] Manca al lessichetto.

[5] Che non sia R o S.

stìgghie *(TE)STĪLIA, *dìgghiire* -ĪLIA + ŎRA, *pìgne* PĪNEA, *sìgne* SĪMIA; ecc.

c). < *-òie*: *-dòie* -'dì' in *menzad.* mezzodì, *sciuved.*[1] 'giovedì', ecc.; *taròie* 'tarì' less.; *-òie* -Ī(RE) (*sciòie* *JĪRE, *ass.* EXĪRE, *ches.*, *dremm.*, *mbr.*, *men.*, ecc.).

d). < *-òi-*: *-òie* -'ìa' (*carp.* *REW.* 1712, *masc.* 'magìa', *regal.*, ecc.; *decer.*; *ciucciar.*, *fessar.*, *uappar.*, ecc.); *-òie* -Ī(V)A (*al.* 'oliva', *less.* 'lisciva'; *vacand.*, ecc.). Qui anche *vòie*[1] VĪA, *crecevòie* 'crocevia'.

e). *zìte-del-úucchie* « pupilla », *fìche-d-ínie* 'fico d'India', *cìme-de-ręupe* 'cima di rapa', *fìle lúunghe* 'filo lungo', *gaddìne-de-Críste* « coccinella », ecc., di contro a *zòite*, *fòiche*, *ciòime*, *fòile*, *gaddòine* (v. qua sopra); *ci* QUĪ (v. *ci nam bèive*, *ci vènne*, ecc.); ~~~ *accìta-pedúcchie* 'uccidi pidocchi', *gìralíitte* e sim.; *dice-e-sdǫice* DĪCE(RE)...; *diaterze* less., *assí fòre carręure* e sim. EXĪRE, di c. a *dòie*, *assòie*; ~~~ *alì salęute* di c. ad *alòie*, ecc. ecc.

Ē′ Ĭ′ (= prerom. ẹ).

§ 2 I a). < *ài*: *ghiàive* GLĒBA, *nàive* NĬVE; *cràite* CRĒTA, *sàite* SĒTA, *ghiàite* -BLĒTA, *paràite* 'parete'; *chiàiche* 'piega'; *sàire*, *statàire* STATĒRA, *pàire* 'pera', *cannàile*, *tàile* TĒLA; *catàine* 'catena', *chiàine* 'piena', *ràine* 'rena', *stràine* STRĒNA, *vàine* VĒNA, *màine* (dev. di MĬNARE); *pràise* 'presa', *sciàise* (DE)SCE(N)SA, *tàise* 'tesa'; con -JJ- scemp., *cràisce* CORRĬGIA.

b). < *è*: *sètue* SĒTŬLA, *facètue* FICĒDŬLA[2]; *sèmue* SĬMĬLA, *macènue* MACHĬNŬLA Salv. in '*App. mer.*' 45; *scèsciue* « giuggiola' » less. Plur. in -ŎRA: *dèscetre* (v., più sotto, *dìscete*). E *mbèsue* ci nasconderebbe mai un IN PESULŌ?

~~~ *-ètte* -ĬTTA (*acc.* 'accétta', ecc.), *mètte* MĬTTĔRE, *sècche* (dev. di SĬCCARE) less., *sècchie* SĬT(U)LA, *rècchie* ORĬCLA, *-ècchie*

---

[1] Nel lessichetto *sciuvedóie*, *vóie*, manifesti errori di stampa.

[2] V. '*Note it. centro-merid.*', a p. 244, n. 3.
~~~

-ĭc(ŭ)la (*lend.*, *monach.*, *sandann.*, *spann.*, *varel.*, ecc.), *-uècchie* -ŭl + ĭc(u)la (*amin.*, *cresci.*, *veq.*), *vèrghe* vĭrga, *vèrde*; *ièdde* ĭlla con prost. di *i̯*; *lèngue* ‘ lingua ’, *tènge* tĭngĕre, *sènghe* (v. cons., -g+n-), *èrmece* imbrĭce; *-èsse* -ĭssa (*petten.*, ecc.), *crèsce* crēscere, *-èsce* -ēscĕre (*adu.* adolēscere less., *ammar.*, *angall.*, *stredd.*, ecc.), *rapèste* rapĭstra, *frèške* (v. cons., -s+kl-); 〰 nessi di cons.[1] + j: *sècce* sēpia; *rèzze* rētia, *capèzze* -ĭtia, ecc.

c). < *-àie*: *andràïe* ‘ in trẹ ’ less.; *-àie* -ē(re) (*cad.*, *cap.*, *fet.*, *ten.*, *ved.*, ecc.).

d). < *-ài-*: *matràie* *matrẹ́(i̯)a *μᾱτρυιά* less.

§ 3 II a). < *-òi*: *sòive* sēbu; *trappòite* trapētu (v. cons., -p-), *spòite* *spĭtu; *pòile* pĭlu; *chiòine* plēnu, *nzòine* in sĭnu; *-òise* ‘ -eso ’ (*app.*, ecc.); — *-òise* ‘ -esi ’ (*terr.* ‘ tornesi ’, *tran.*, ecc.); *vòite* ‘ vedi ’. Ancora, *peddòite* pullĭt(r)u e, con -jj- scempiato, i deverb. *nghelòisce* ‘-éggio ’ less., *scattòisce* (v. *scattescèue*), *stambòisce* (v. *stambescèue*), *ualòisce* less.

b). < *i*: *-ìvue* -‘ évolo ’ (*chec.*, ecc.), *cìciue* cycinos *REW.* 2435, con suff. scambiato (v. cons., -l-), *dìscete* dĭgĭtu, ecc.; *pirde* *pìreto (v. cons., -d-).

〰 *titte* tēctu, *stritte* strĭctu, *frìdde*; *sìcchie* sĭt(ŭ)lu, *-ìcchie* -ĭc(u)lu (*cap.*, *Casal.* n. loc., *sang.* sanguĭcŭlu, ecc.), *diavuìcchie*; *-ìgghie* -*ĭg(ŭ)lu (*crett.*, *funner.*, ecc.); *circhie* cĭrc(ŭ)lu, *strìppue* ‘ sterpolo ’, *iìdde*[2] ĭllu con *i̯* prost., *-ìdde* -ĭllu (*capidde*, *cann.*, *chiatt.*, *feng.*, *mbrev.*, *mel.*, *mesqu.*, *nezz.*, *pend.*, *pezz.*, *vress.*), *-uìdde* -ŭl-illu (*credd.*, ecc.), *cinde* cĭnctu, *tinde*, *iìnde* ĭntus con *i̯* prost., *lestinge* lentisco (v. cons., k); *canistre* canĭstru, *capiste* capĭstru, *frìške* (v. cons., -skl-), *frìškue* less. e cons., -skl-); *nigre* in *alben.* less.; — *-ìcchie* -ĭc(u)lī (*canel.*, *fesu.*, ecc.); *chidde* quelli; *linne* -*nene (dal plur.); *re stidde* le stelle (pl. anal.), ecc.; 〰 nessi di cons.[3] + J: *vrìcce* (cfr. calabr. *vricciu*); *carìzze*, *scapìzze*

---

[1] Che non sia R o S.

[2] Nel less., *ìidde*; ma deve essere un error di stampa per *iìdde* (v. *ièdde*).

[3] Che non sia R o S.

(deverb. di *scapezzèue*), *iizze* (v. cons., -TTJ-); *acchessigghie* (deverb. di *acchessigghièue*), *lecìgne* ' lucigno(lo) '. Di *cus* codesto e *cudde* quello, v. cons., -K+u̯-).

d). < -*oi*-: *patròie* **patrẹ́(i̯)o* less.

e). *pìle a la mẹ́nne*, di contro a *pòile* (v. qua sopra).

Ĕ́ (AE, η).

§ 4 I a). < *èi*: *pèite* PĔDE, *trepèite* ' tre(p)piède '; *spèire* SP(H)AERA, *mèile* MĔLE in *sucam.*; *pestèime* ἀπόστημα; ⩳ R+J: -*èire* *-ĔRIA (*arc.*, *fel.*, *frasc.*, *nev.*, *pagghi.*, ecc.). Ancora, *prèine* PRAEGNA [1] e *pèite* PĔT(R)A, *arrèite*, *drèite* -RĔT(R)O, *frèive* FĔBRE. ⩳ Piani da sdrùccioli: *arrecèite* -' richiède(re) ', *sprèime* ' sprème(re) '.

b). < *è*: *rètene* ' rèdina '; *fèrue* FĔRŬLA, *mèrue* MĔRŬLA e *pècre* ' pècora ', *ètre* HĔDĔRA, *nèpte* NĔPĔTA, se l'ettlissi è recente; ⩳ *iètte* FLĔCTA (v. cons., FL-), *sètte* SĔPTEM, *pèttene* PĔCTĬNE; *sèrchie* (v. cons., -TL-); *sèrre* SĔRRA, *tèrre* TĔRRA, *sfèrre* (dev. di ' sferrare ') less., *ièrte* ĔRCTA con prost. di i̯, *nzèrte* less., *mbèrtue* fertile (v. cons., -L-), *sfèrtue* sterile, *mèrde*, *vèrme*, *scèrmete* MĔRGĬTE e *GĔRMĬTE, *cèrne* CĔRNĔRE, *pèrue* pergola (v. cons., -RG-); *sèdde* SĔLLA, *fèdde* OFFĔLLA, *scemmèdde* GEMĔLLA, -*èdde* -ĔLLA (*canegghi.*, *cang.*, *cann.*, *carven.*, *chemmar.*, *credd.*, ecc. ecc. [2]), -*èddre* -ĔLL-ŎRA (*camban.*, *mazzar.*, *nzet.*, ecc.), *aghestenèdde* less., *cèlze* CĔLSA; *scemmènde* JŪMĔNTA, *dènte* DĔNTE, *semmènde* SEMĔNTE, *vènde* ' vèntre ', *arrènne* ' arrèndere ', *stènnese* ' stèndersi ', -*ènne* -ĔNDO (*scherz.*, ecc.), *ièsse* ĔSSE(RE) con prost. di i̯, *èsse* EXĬT; ⩳ nessi di cons. [3] + J: *grègne* (v. cons., -MJ-) [4].

c). < -*èie*: *rèie* in *cazze de*- [5] less.; *ièie* ' è ' (i̯ prostetico); [*gelèie* ' gilè '].

---

[1] V. ' *Esiti di lat.* -GN-', a p. 155.

[2] Talora potrebbe pur trattarsi di -ĬLLA.

[3] Che non sia R o S.

[4] E in *ficchetemènze* less. si nasconderà un IN MĔDIŌ?

[5] Di contro al tosc. *rẹ*.

e). *pèt-a- pẹ́ite* « piede avanti piede ».

§ 5 II a). < *ìi*: *fìite REW.* 3407 [1]; *mìire* MĔRU; *scìile* ' gèlo ', *cìile* CAELU; - *crìipe!* crepa! [2]; ≋ R+J: *-ìire* *-ĔRIU (*ascidd.*, *canden.*, *canel.*, *femen.*, *fem.*, *fenn.*, *frast.*, *maten.*, *mazz.*, *mešk.*, *remmat.*, *scequ.*, *train.*, *uand.*, ecc.). Strano *nagghiòire* ναύκληρος, quasi da ẹ', di contro all'andr. *naĝĝịₑrə*, ecc.

b). < *ìi*: *tìineme* ' tienimi ' [3] e *cìifle* ' cèfalo ', se l'ettlissi è recente;

∼ *lìitte* LĔCTU, *pìitte*, *mbìitte* ' in petto ', *assìitte* (deverb. di *assettèue*); *fìirre* FĔRRU, *vìirne*, *mbìirne* ' infèrno ', *lacìirte* LACĔRTU, *demìirte* DEMĔRTU, *spìirte* ' spèrto ', *addavìirte*, *sepìirchie* ' sopèrchio ' l e s s., *-ìidde* -ĔLLU (*ac.*, *an.*, *callar.*, *camban.*, *cang.*, *capp.*, *cares.*, *cavat.*, *checchem.*, *checen.*, *chembar.*, *cicer.*, *crett.*, *descet.*, *fan.*, *fucar.*, *gammar.*, *gangar.*, *ghiumer.*, *macen.*, *mart.*, *mazzar.*, *meser.*, *monecac.*, *mulec.*, *ngen.*, *peddetr.*, *prett.*, *raffan.*, *rastr.*, *škumar.*, *scenecch.*, *scequar.*, *sciangar.*, *stambar.*, *tass.*, *ved.*), *cìilze* CĔLSU; *tìimbe*; *lìinde*, *cìinde*, *vìinde*, *argìinde*, *palmìinde*, *chiangiuìinde* (v. c o n s., -L-); — *dìinde* ' dènti ', *parìinde* ' parenti ', *vìirme* ' vermi ', *sìirpe* ' sèrpi ', ecc.; ≋ nessi di c o n s. [4] + J: *pìizze* ' pèzzo ', *arrepìizze* (deverb. di *arrepezzèue*), ecc.; [*mìinze* mèzzo].

Qui anche *chìitre* κλῆθρον; v. ' *Less. etim. del dl. di Andria* ' a p. 12, § 6 B.

A'

§ 6 a). < *èu*: *rèupe*, *chèupe*, *senèupe* σίνᾱπυ (cfr. nap. *senàpo*, ecc.), *vèuve* ' bava ', *grèuve* GRAVA *REW.* 3851, *fèufe* ' fava ', *trèuve* ' trave ', *frèute* fratello, *-èute* -ATU, -A (*abbamb.*, *allep.*, *am-*

---

[1] Il M e y e r - L ü b k e che già pensò a FETUS (« F. das sich zu FETOR verhält wie DECUS zu DECOR »; v. R. Gr. II, § 15), ora vi legge, e parmi a ragione, un deverbale.

[2] V., quanto alla vocal turbata nella 2ª persona sing. dell'I m p e r a t i v o p r e s e n t e, quel che ne ho scritto in ' *Less. etim. del dl. di Andria* ', a p. 10, n. 3.

[3] V. qua sopra la n. 2.

[4] Che non sia R o S.

marech., *castr.*, *schegn.*, *schetu.*, ecc., *chiangh.*, *lev.*, *remm.*, *tavu.*; *aminu.*, ecc.; *checchegghi.*; *aur.* AURATA, *cach.*, *chiitr.*, *ghevrenn.*, *granen.*, *guvet.*, *nghian.*, *ped.*, ecc.), *-èute* -ATE (*sand.*, ecc.), *grèute* GRADU, *vèute* VADU; *nèuche* less., *vrèuche* BRACA, *bastenèuche* PASTINACA (v. cons., P-), *lèuche* lago[1], *chièuche* PLAGA; *lèune* 'lana', *-èune* -ANU, -A (*att.*, *gaggi.* 'gabbiano', ecc.; *camb.*, *fend.*, ecc.), *chièune* 'piano', *grèune*, *mèune*, *chèune*, *pèune*, *mbèume* 'infame'; *rèume* 'rame', *ndrèume* INTRAME, *škèume* (deverb. di EXCLAMARE), *schèume* less.; *pèule* 'pala', *schèule*, *sèule* 'sale', *-èule* -ALE (*cann.*, *dent.*, *discet.*, *gangh.*, *marg.*, *sen.*, ecc.), *mèure*, *amèure*, *chemb.*, *chemmèure*, *cheddèure*; *chèuse* CASA, *nèuse*, *spèuse* EXPA(N)SA, *trèuse* TRA(N)SIS, ecc.; ≈ R, S + J: *-èure* -ARJU, -A (*castagn.*, *cedd.* CELLARJU, *ferr.*, *gadden.*, *lagan.*, *pagghi.*, *pedequ.*, *pegnat.*, *serequ.*, *tavrenn.*, ecc.; *calch.* CALCARIA, *call.*, *carr.*, *fech.*, *mann.*, *uav.*, ecc.); *vèuse* BASIU, *Velèuse* BLASIU. Ancora, con -JJ- scempiato, *rèuce* RAJA, *rèusce* RADIU, *pèuce* (v. cons., -JJ-), *checchevèuce* -AJA *REW.* 1898, *scarafèuce* SCARAFAJU.

Chièie « chiave » ch'è pur di Molfetta (*chiè*), Taranto (*chièia*), Matera (*kjeje*, da *ẹ́*), ecc., sarebbe mai un imprestito greco?[2] (v., qua sopra, *chìitre* κλῆθρον).

b). < *à*: *-àteche* -ATĬCU, -A (*chenn.*, *fum.*, ecc.); *ràteche* 'radica', *gràtere* (pl. di *grèute* GRADU), *àc-*, *àscene* ACĬNU, *màcene*, *nàchere* (pl. di *nèuche*), *-àque* -ACŬLU (*avet.*, ecc.), *làghene* LAGANA, *gàvete* GABATA, *tàvue* TABŬLA, *gràvete*, *-àscene* -'ag(g)ine' (*nann.*, *pr.* '*peraggine', *prebb.*, *recchi.*, ecc.), *màneche*, *ràsue* (dev. di *RAS-ŬLARE); *jàveche* **jacheve* JACOBUS; [*càlme* (cfr. tosc. *calmo* *REW.* 1485), *càpre* *'capora'], ecc. Qui anche *àire* *ARI^{i}A aja[3] e *àrie* *ARE^{i}A aria; v. '*Less. etim. del dl. di Andria*' § 6 *b* e più avanti il § 27bis.

---

[1] Strano *fâche* faggio.

[2] È un sospetto che mi comunicava or non è molto il Salvioni in una delle conversazioni che sono e rimarranno tra i miei maggiori conforti.

[3] Ma *ere* nel n. loc. *Ere de Léie* 'Aia di Leo'; e si spiegherebbe da fonetica sintattica (ted. *Allegroform*).

~~~~ *chiàppe* *CLAPPU less.; *-àcchie* -AC(U)LU (*serr.*, *tum.* *TŬMACCLU less., ecc.), *quàgghie* COAGULU, *màgghie* *MAGGLA, *-àgghie* -*AG(Ŭ)LA (*ten.*, ecc.), *all-andrasàtte* -INTRANSACTA, *làtte*, *chemmàtte*, *cataràtte* CATARACTES; *gàdde* 'gallo', *cavàdde*, ecc., *pàlte* *PALTA (v. cons., -L+T-), *càlle* CALDU, *càlce* 'calce' e « calcio », *nzàlze* IN SALSA, *àlze*, *càlze* « calzoni », *sàlme* 'salma' less.; *fàrre*, *làrde*, *càrne*, *àrse* ARSU, *àrve* *arvre (v. cons., -R+B-); *cànne* CANNA, *chiànghe* PLANCA, *chiànde* s. f. 'pianta' e « pianto », *-ànde* -ANTE (*ašqu.*, ecc.), *-ànne* -ANDA (*fegghi.*, ecc.), *-ànne* -ANDŌ (*appap.*, *attend.*, ecc.), *cànge* 'cambio', *avànze*; *àsse* AXE, *camàstre* *REW.* 2310, *àscre* (v. il § 22 *b*), *àcque* *AQQUA, *-àsse* 'arsi' (*abbegn.*, *abbett.*, ecc.; *fàsse*); ≈≈≈ nessi di cons.[1] + J: *arràgge!* 'arrabbia'! less., *càgge* CAVEA; *fàcce* *REW.* 3130, 1[2], *chiàzze* *PLATTIA, *-àzze* -*ATTIU, -A (*castagn.*, *caten.*, *checumar.*, *ghev.*, *pep.*, *set.*, *cannedd.*, ecc.; *len.*); *pàgghie* PALEA (come *àgghie* ALLIU), *-àgghie* -ALIA (*acqu.*, *frag.*, *ngen.* INGUĬNALIA, *tacc.*, ecc.); *-àgne* -ANEU, -A (*temb.*; *cast.*, *foc.*).

Di *chìitre* κλῆθρον, v. qua sopra (§ 5, *b*).

c). < *-èue*: *-èue* -A'(TE) (*malanechetèue* '-iniquità'); *-èue* -A(RE) (*dèue*, *fèue*, *stèue*; *men.*, *nech.* NĔCARE, *abbamb.*, *abbann.*, *-escèue* '-eggiare', ecc. ecc.). *á*[3] in *cumbá!* 'compa(re)'! (vocat.) e in *dá* ÍLLÁ(C), di contro agli andr. *kəmbẹ́*, *ddẹ́* come *dẹ́* DARE e sim.

e). *fràte giúste*, ecc., *Làche de chìitre*, ecc., nn. ll., *tràve lúunghe*, *pàne cúutte*, *Làme carevíune*, ecc., nn. ll., di contro a *frèute*, *lèuche*, *trèuve*, ecc. (v. qua sopra); ~~~~ *dà ndẹ́rre* e sim., *feccà jínde* 'ficcar dentro' rimboccare, *attaccà la mẹ́une*, ecc., di contro a *dèue*, *fecchèue*, *attacchèue* (v. qua sopra).

---

[1] Che non sia R o S.

[2] O 'faccia'? (v. '*Less. et. del dl. di Andria*', a p. 11, n. 5).

[3] Non si badi all'accento; tra i due *a*, quello degli sdrucc. di sill. ap. e degli sdrucc. e piani di sill. chiusa (scritto *à*) e quello dell'ossitonia (scritto *á*) non deve correre nessuna differenza.
~~~~

Ŏ′

§ 7 I a). < *òu*: *persecòuche* PERSĬCA + *PRAECŎCA, *selòuche* ‘si lòca’ less., *ròute* RŎTA, *nòuve* NŎVA, *còure* ‘cuore’, *fòure* FŎRĬS, *sòule* *SŎLA, -*òule* *-(I)ŎLA (*castagn.*, *var.*, *vener.*, ecc.), *vòule* ‘vuole’, *bòune* BŎNA, *ròuse* RŎSA e, con -JJ- scempiato, *iòuce* HŎDIE (*i* prost.).

b). < *ò*: *òmene* HŎMINE, *lepòmene* Salvioni in ‘*Oss. varie*’, 120; *ròsue*[1] s. pl. (v. ‘*Sdrucc. nel dl. di Molfetta*’, a p. 165, n. 8);

〰 *mòrte*, *pòrte*, *spòrte* SPŎRTA, *tòrce* *TŎRCĔRE, *scòrze* ‘scòrza’; *lònghe* in *cannal.*, *dònnue* ‘donnola’, ecc.; 〰 nessi di cons.[2] + J: *fògghie* FŎLIA, *vògghie* in *malav.*; *còzze* *CŎTTIA (per *CŎCCEA; cfr. mater. *cheəzzə*, -ŏ′-), ecc.

c). < -*òue*: *mòue* MŎ(DO); [*comòue* ‘comò’]. La ragion dell’-*ò*- di *dòne* ILLŎ′(C) sarà da veder nell’epìtesi.

d). < -*òu*-: *gròue* gru (cfr. sic. *groi* e Meyer-Lübke in ‘Einführ.²’, § 109).

e). *scòlabroute* ‘*scolabrodo’, [*bonavogghie* e sim.].

§ 8 II a). < *ùu*: *fùuche* FŎCU, *lùuche* LŎCU less., *precùuche* *PRAECŎCU; *ùuve* ‘uòvo’, *stùule* STŎLU, -*ùule* -*(I)ŎLU (*magghi.*; *chiumazz.*, *mestazz.*, *pedezz.*, ecc.), *vùule* (deverb. di VŎLARE; v. *R. de Dial. Rom.* I, p. 415, n. 4); *a bùune a bùune* less., *trùune* (dev. di *TRŎNARE); ecc.

b). < *ùu*: *vùumeche* (dev. di *VŎMĬCARE)[3];

〰 *cùutte* CŎCTU, *ùucchie* ‘òcchio’, *vrennùucchie* less.; *mùurte*, *tùurte*, *ùurte*, *pùurche*, *nannùurche* -ŎRCU, *ngùurpe* ‘in còrpo’, *cùurve* CŎRVU, *ùursce* HŎRDEU, *scùurze* SCŎRTEU; *cùudde*, *ngùudde* ‘in còllo’, *mùudde* ‘mòllo’; *sùunne* SŎMNU, *lùunghe* LŎNGU,

---

[1] Nel less. *rósue*, ma è error di stampa evidente.

[2] Che non sia R o S.

[3] *Scioque* « passatempo » sarà un plurale neutro doventato femminile (tipo *legna* e sim.)? V. ‘*Sdrucc. nel dl. di Molfetta*’, a p. 166.

cùunzue less. (cfr. lett. *conciol-ino*); *ùusse*, *grùusse*, *tùuste* TŎSTU, *tùusche* 'tòsco', *vrùuspe* (v. cons., BR-); ancora, *cùuppe* *CŎPPU (cfr. it. l., tosc. *còppa*, ecc.), *chiùuppe* *PLŎPPU (v. '*Sdrucc. nel dl. di Molfetta*', a p. 160, n. 4); ≈ nessi di cons.[1] + J: *cùucce* *CŎCCEU less., *sùuzze* less., *stùuzze* tozzo, *-ùuzze* '-òzzo' (*perr.*, *pescr.*, *verr.*), *cùuzzue* less., *-ùuzzue* '-òzzolo, -i' (*carr.*, *canar.*); *ùugghie* ŎLEU, *sfùugghie* (deverb. di 'sfogliare'), *spùugghie* (deverb. di 'spogliare'), ecc. Di *fùurce*, v. '*Sdrucc. nel dl. di Molfetta*', a p. 160, n. 5 e cons. (-R+B-).

e). *sciuvedòie*[2] giovedì.

ō′ ŭ′ (prerom. ọ′).

§ 9 I a). < *àu*: *scàupe* SCŌPA, *làupe* LŬPA; *làute* LŬTA, *nepàute* 'nipote', *càute* *CŌDA, *dàuche* DŌGA; *vàuce* VŌCE, *nàuce* NŬCE, *cràuce* CRŬCE; *gàule* GŬLA, *-àule* *-ỌLA[3] (*tagghi.*, *mazz.*, *tragn.*; *cazzar.*, *grattar.*, *pendar.*, *spasar.*, *spenar.*; *cammes.*, ecc.); *-àure* -ŌRE (*am.* 'umore', *ašc.*, *bamb.*, *call.*, ecc.), *-atàure* -ATŌRE (*ammarr.*, *pes.*, *spru.*, ecc.), *chesetàure*, *venetàure* VĪNĬTŌRE; *sopanàume*; *-àune* -ŌNE (*calandr.*, *calz.*, *canal.*, *cand.*, *cap.*, *capecar.*, *capet*, *capezz.*, *card.*, *cavadd.*, *cegn.*, *cendr.*, *cepp.*, *ched.*, *cheggi.*, *chiastr.*, *crap.*, *credd.*, *fengidd.*, *gammett.*, *maccar.*, *mel.*, *mend.*, *merr.*, *merz.*, *mesqu.*, *nzet.*, *pend.*, *pest.*, *renen.*, *škard.*, *squagghi.*, *stedd.*, *step.*, ecc.; *callar.*); *-àuse* -ŌSA (*pel.*, ecc.), *cemàuse* *CIMŌSA; ≈ R + J: *pastàure* 'pastọia', *salzamàure* 'salamọia' + SALSA; *-atàure* -ATŌRIA (*accann.*, *accapezz.*, *acciaff.*, *accrecci.*, *angapp.*, *appezzec.*, *auand.*, *azzepp.*, *cazz.*, *cev.*, *schiang.*, *spend.*, *spequ.*, ecc.). Ancora, *assàupe* -SŬP(R)A.

b). < *ò*: *còteche* CŬTĬCA, *checòmere* CUCŬMĔRE, *pòmece* PŬMĬCE; *còleche* (dev. di *CŌLCARE; less.); [*mòrue* (v. cons., -R+G-)]. Plur. in -ŎRA: *candònere*, [*nòtre*, pl. di *nùute* NŌDU].

---

[1] Che non sia R o S.

[2] Nel lessich. *sciuvedóie*, error di stampa evidente.

[3] V. '*Sdrucc. nel dl. di Molfetta*', a p. 164, n. 4.

∼ *vòtte* BŬTTE, *gnòtte* *INGLŬTTĔRE; *vòcche* BŬCCA, *chenòcchie* *CONŬCCLA; *còrre* CŬRRĔRE, *còrte* 'corte' less., *vòrse* 'borsa'; *mbòdde* AMPŬLLA, *ròdde* less. (da AREA), *-òdde* -ŬLLA (*cazz., chiang., galett., palett., zapp.*), *fòlce* *FŬLCĔRE, *pòlve* 'polve'; *ròmbe* RŬMPĔRE, *pònde* 'punta', *sciònde* JŬNCTA, *ònge* ŬNGĔRE, *pònge* PŬNGĔRE, *ògne* *ŬNGLA, *cònze* (deverb. di *chenzèue*), *pònde* 'ponte', *iònde* 'fionda'; *tòsse* TŬSSE, *mòsche* MŬSCA, ecc.; *òtre* 'ótre' [1].

e). *còterússe* 'codirosso', *nòcepẹ́sche* less.; *nzòpanẹ́use*, *sòpamẹ́une* e sim.; *a dò pọrtene, da dò vìine* e sim., di contro a *càute, nàuce, assàupe* (v. qua sopra).

§ 10 II a). < *ìu*: *nìute* NŌDU; *-ìule* *-ỌLŬ (*cresc.* less.; *carvenar., erar., ervar., fafar., grattar., pagghiar., papar., pedar., pendar., rẹnar.*, ecc.; *cinar.* **cinerar.*); *ndìune* 'in dono'; *-ìuse* -ŌSU (*mbraqu., mecch., mend., precch., sprecchen., uall., vav., vemequ., vrever., zerr.*); — *nepìute* 'nepoti' less.; *-ìune* '-oni' (*a-n-anghest.* less., *carev., maccar., uagn.*); ≈ R + J: *fletìure* *FULTŌRJU (v. '*Sdrucc. nel dl. di Molfetta*', a p. 164, n. 1), *-atìure* -ATŌRJU (*addacqu.,* [*allarg.*], *chiand., pes., pest., rašk., seng., škard., tezzu., tr.*).

b). < *u*: *gùvete* CŬBĬTU, *tùmene* TŬMŬLU; *lùmere* **mùrele* less.; *cùscete* (deverb. di COGĬTARE), [*scùple* SCŌPŬLU '*Sdrucc. nel dl. di Molfetta*', p. 166, n. 7; *ghiùrme* GLŌMERU;- *mùrue* **mun(n)ulu* (v. cons., -L-), *fùneche* 'fọndaco'];

∼ *segghiùtte* *SIGGLŬTTU; *mùcche* *MŬCCU, *-ùcchie* -*ŬCCLU (*ped., scen.*); *tùrde, fùrne, attùrne, ùrse*; *pùdde* PŬLLU, *repùdde* '*Sdrucc. nel dl. di Molf.*', p. 165, *medùdde, -ùdde* -ŬLLU (*mes., paci., petr., spec.* SPĪC., *zapp.*; *pezzar.*), *pùlpe, fùlte, sùlche, rùmme* RHŌMBU, *scrùmme* SCŌMBRU, *chiùmme* PLŬMBU, *lùmme, palùmme*; *tùnne* 'tọnno', *tùnne* TŬNDU, *pùnde, accùnde* less., *ciùnghe* 'ciọnco', *sciùnge* giunco (v. cons., K), *frùgne* furuncolo, *avrùnze* brọnzo, *strùnze* strọnzo, *rùsse*; — *dùlce* 'dolci', ecc., *d-ùgne*

---

[1] *U* in *cùgghie* CŌLEA less., *rùgne* 'rogna', [*sùgne* 'sugna']; e la ragione sarà da vedere nella palatale seguente.

unghie, *lestùcce* stoppie (plur. analog.); ≈ nessi di cons.[1] + J: *chetùgne* *COTŌNEU, *fafùgne* FAVŌNJU, *cùgne* CŬNEU; *nùzze* less., *pùzze* *PŬTTIU, ecc.

ū'

§ 11 a). < *ìu*: *pìupe* PŪPA; *sìuche* SŪCU; *lìuce* LUCE; *-ìute* -ŪTU (*bomben.*, *cern.*, *crenn.*, *canar.*, *cav.*, *lengh.*, *man.*, ecc.), *strennìute*, *tavìute* less., *salìute* salita; *crìute* CRŪDU, -A; *tìufe*; *aghìue* ŪVA (v. cons., -V-); *mìure*, *schìure*, *dìure*, *tìure* (dev. di 'turare'), *-ìure* -ŪRA (*cind.* CINCTŪRA, *fatt.*, *pend.*, *šket.*), *-atìure* -ATŪRA (*abbrac.*, *ammacc.*, *bett.*, *cem.*, *macen.*, *mban.*, *mucqu.*, *scall.*, *scapezz.*, *svlet.*, ecc.), *-etìure* -ĬTŪRA (*apretìure* APERITŪRA[2], *cern.*, *renn.*, ecc.), *chesetìure* *CO(N)SUTŪRA; *nghìule* 'in culo'; *škìume* 'schiuma', *fìume*, *-ìume* -ŪME(N) (*chest.* 'costume', ecc.); *ìune* ŪNU, -A, *lìune*, *fìuse*, *chìuse* 'chiuso' in n. l., *prettìuse*, *sìuse* SŪSU; con -JJ- scempiato, *fìusce!* fuggi! ≈ Piani da sdruccioli: *achìute* '-chiude(re)', *annìuce* INDŪCE(RE), e *rìusce* *RŪJ(J)Ĕ(RE), *strìusce* *STRŪJ(J)Ĕ(RE).

b). < *ù*: *angùdene* 'incudine', *verrùque* '*Sdrucc. nel dl. di Molf.*', p. 166, n. 9, e *-ùscene* -*ŪJ(J)ENE (*gest.*[3], *pal.*); [*cùcle* 'cuculo'];

~ *assùtte* asciutto; *sùgghie* *SŪBBL-; *ciùffe*; *pùrghe*, *nùdde* NŪLLA; *lùstre*, *muške* 'muscolo' less.; ≈ nessi di cons.[4] + J: *-ùzze* '-uzzo, -a' (*cannedd.*, ecc.). *Fròttere* (da **frùtte*[5] FRŪCTU) è un plurale analogico (v. Salvioni in *R. de Dial. Rom.* I, 104).

c). < *-ìue*: *chìue* più.

e). *cùle de ręupe* 'culo di rapa' less.; *sùcaméile* SŪCAMĔLE less.; *assùcapánne*, *stùtacannáile* less., ecc., di contro a *nghìule*,

---

[1] Che non sia R o S.

[2] Da APERTŪRA ci aspetteremmo *aprettìure* (v. cons., R).

[3] V. il cons. (T-) e il less.

[4] Che non sia R o S.

[5] Manca al lessichetto.

sìuche, ecc. (v. qua sopra); — *chiù brútte* ' più brutto ' di contro a *chiìue*; ecc.

Dittonghi.

Di AE′ (= prerom. *ę́*), v. i §§ 4-5.

§ 12. Ad *ái̯* romanzo risponde il monottongo *ę́*, donde regolarmente *-èie* nell'ossitonia: *crèie* **crai̯* CRAS, *pescrèie*; *mèie* **mai̯* *MAS [1] MAGIS, *pagamèie* cattivo pagatore (cfr. il § 4 I, c).

§ 13. ÁU. Ancora qui, come ad Andria (v. ' *Less. et. del dl. di A.* '; § 14), sempre, quale che sia la vocal finale, l'esito di un *ǫ́* non metafonetico: I a) *càuse* cosa; [*càule* cavolo [2]]. II a) *làure* LAURU, *pembedàure* pomodoro. In protonia sintattica *o*: *cose dúlce*, *cole ghézze* less.

---

[1] V. *Zeitschr. f. rom. Phil.*, XXX, p. 442.

[2] Il Meyer-Lübke in *REW.* 1778 legge nel bar. *kolə* un CAULIS, nel sic. *caulu* (non *caula*) un CAULUS; può essere, e può non essere (v. bar. *lórə* LAURU, *órə* AURU, ecc.).

Specchio del vocalismo tònico.

	Sillaba aperta		Sillaba chiusa e sdruccioli di sillaba aperta		Ossitonìa		Iato	
	dati -A, -E, -O	dati -Ŭ, -Ī	dati -A, -E, -O	dati -Ŭ, -Ī	dati -A, -E, -O	dati -Ŭ, -Ī	dati -A, -E, -O	dati -Ŭ, -Ī
Ī′	*òi* (*i*) (*)		*ì*		-*òie* (*ì*)		-*òi*- (-*ì*-)	
Ẹ́	*ài* (**e*?)	*òi* (*i*)	*è*	*ì*	-*àie* (**è*?)		-*ài*- (*-*è*-?)	-*òi*- (*-*ì*-?)
Ĕ′	*èi* (*e*)	*ìi* (**i*?)	*è*	*ìi* (**i*?)	-*èie* (*-*è*?)			
A′	*èu* (*à*)		*à*		*èue* (*à*)			
Ŏ′	*òu* (*o*)	*ùu* (*u*)	*ò*	*ùu* (*u*)	-*òue* (*-*ò*?)		-*òu*- (*-*ò*?)	
Ọ′	*àu* (*o*)	*ìu* (**u*?)	*ò*	*ù*				
Ū′	*ìu* (*u*)		*ù*		-*ìue* (-*ù*)			

N.B. L'esito della vocal tònica nella protonia sintàttica segue tra parentesi; se non è attestato, gli precede il solito asterisco.

B. — Vocali di sillaba debolmente accentata.

Tra le caratteristiche fonetiche più notevoli del dialetto bitontino e finitimi[1] è il ridursi a vocal neutra di ogni vocale di sillaba debolmente accentata, l'ī e l'ū compresi. Solo l'*a* di sillaba protonica si regge costantemente; e poichè l'affievolimento può arrivare al dileguo, così l'*e* come l'*o* protonici talora si rafforzano in *a*, specialmente nell'iniziale assoluta. Non altrimenti si spiega, secondo me, l'*a*- da E- O-, proprio delle estreme Marche, non men che dell'estrema Sicilia. Anche ad Arcèvia, *adóre* 'odore', *artíca* (all. ad. *urt*-), *accóre* 'occorrere', *abbedé* (all. ad *ubb*-), *asservá* 'osservare', *almàe* (e *arm.*) ormai, *arluóggio*, *agni* 'ogni' (protonia sintatt.); non s'avvede il Crocioni che la legge è italiana centro-meridionale e tenta di chiarir l'*a*- di queste voci da " confusione con AD- o con RE- prefissi „ (sic)[2].

Una traccia preziosa dell'*o* (*u*) di sillaba protonica è nello *u̯* propagginato dietro al *k* della sillaba tonica seguente o susseguente: *scequèue* JŎCARE; *vemequèue* *VŎMĬCARE (v. sotto). Il fenomeno ch'è di molti dialetti italiani centro-meridionali, particolarmente degli abruzzesi e dei pugliesi settentrionali, che va perdendo terreno ogni dì più, è stato messo in bella luce, or non è molto, dal Salvioni (v. '*Osserv. varie*', a pp. 765-766).

Distinguo, anzitutto, tra vocali protoniche (I) e vocali postoniche (II); trattando delle protoniche, tra iniziali (A) e interne (B); trattando delle postoniche, tra interne (A) e finali o uscenti (B):

---

[1] Potremmo dire abruzzesi e pugliesi settentrionali. Nel Molise si reggono pur l'-A finale e l'ī, ū protonici.

[2] '*Il dialetto di Arc.*' Roma 1906, § 33.

I. Vocali protoniche.

A) Iniziali :

§ 14. — La vocale A- si mantiene di regola pur nell'iniziale assoluta: *accètte*, *acquàgghie*, *alòicë*, *alzèue*, *amèure*, ecc. ecc. (less.); *abbannèue*, *abbachèue*, *abbambèue*, ecc., *addaccèue*, ecc., *arrasèue*, *aduèsce*, ecc.; *acchemegghièue*, *addemerèue*, *accapezzèue*, *accrecciatàure*, *accannatàure*, *ammaccatìure*, *ammarratàure*, ecc.; *accapezzatàure*, ecc. Rara l'aferesi: *ràine* 'réna' (e *renarìule*) [1], *ròdde* (da AREA) less., *natìcchie REW.* 440, *natrèdde* '(a)natrèlla'; [*pestèime* 'postèma', *pettegòine* less.]; *mbodde* AMPULLA, *sparge* asparago;- *ghiàite* **aggh-* (v. cons., -BL-). Relativamente frequente la prostesi di *a*-; non solo in sostantivi femminili, ma in sost. maschili, in verbi, dove a chiarirla non soccorre l'-*a* dell'articolo femminile: *aghìue* UVA (v. cons., -V-), *asciateche* sciatica; *avrùnze* bronzo; *achìute* chiudere, *aiatèue* FLATARE. Cotesta predilezione per la prostesi di *a*- (e di AD-, IN-, v. cons.) si può ritenere una vera e propria caratteristica italiana meridionale. Di *iàbbue* APALU, di *ualèue* HALARE e *ualòisce*, v. Prostesi. § 15. — Le altre vocali cadono di regola nell'iniziale assoluta o si rafforzano in *a*- [2]: *a*) aferesi: *naltarèue, nande pendòine, nanze, narvuèue, ndaccèue, ndarlèue*, ecc. (less.), *ndrèume* *INTRAME, *ngammòise*, *nganne* IN CANNA, *ngenagghie* INGUINALIA, *nghianèue* IMPLANARE [3], ecc. (less.), *nzacchèue* *INSACCARE, *nzàlze* IN SALSA, ecc. (less.); *gnastrèue* 'impiastrare', *gnòtte* (v. cons., -NGL-), *mmaste* «basto» [4], *mestetrèdde* (v. cons., -NV-), *mbacànde* IN VACANTE, *mbamèue* 'infamare', *mbarnatìure*, ecc. (less.), *mbregghièue*, ecc. [5]; - *renenèdde*

---

[1] Anche *arrenèue* è un (*a*)*renare* con prostesi di *ar*- (v. *arr*- da AD+R-).

[2] L'*e* (= E, I), particolarmente davanti a N(M) + cons. e a vibrante.

[3] Manca al *REW*; v. nel less. gli esiti ital. centro-meridionali.

[4] Con prost. di IN-; su 'imbastare'.

[5] Altri potrebbe pensare ad aferesi di *a*- secondario (v. *angappèue*, ecc., *agnòie*, *ammerse*, ecc.; qua sotto, nello stesso paragrafo (*b*)).

HIRUND-, *renenàune*; *dà* ILLAC, *dòne* ILLO(C)+NE, ecc. [[I-, E-]]; ~~~ *rècchie* ORĬCLA (e *recchiàscene* -AGINE, less.), *rescedde* (da *ORUM), *rìghene* 'orígano'; *fèdde* OFFELLA, ecc.; — *ngènere* § 1, *b*, *ngenìidde* less. [[O-, U-]][1]. — b) rafforzamento: *andrasatte* INTRANSACTA, *an-anghestìune* less., *andràie* 'in tre', *angallèsce*, *angappèue*, ecc. (less.), *angarrèue*, *angùdene*, *annìuce* INDUCERE, *an-ògne an-ògne* less.; *agnòie* empire, *ammerse*, *ambrevoise*, *ammenghe*, ecc. (less.); -*alefànde*; *arvuèute* (da ERVUM); — *assòie* EXĪRE (di contro a *èsse* EXĬT); — *adequeute* [I-, E-]; ~~~ *abbracatìure* OBR- less.; *accasiàune* 'occ-', *acchièule* e, verisimilm., *acchiamendèue*; *accìtese*; *ardòie* 'ordire', *ardique* less.; *alòie* 'ulive', [*uavèure* *av- 'ovaia'][2]; — *amàure* 'umore', *aškuàie* (e -*ànde*, -*àure*) less. [[O-, U-]].

B) di SILLABA INTERNA:

§ 16. — Ad A protonico di sillaba interna risponde *a*, si può dir senza eccezione: *cacàgghie*, *cachèue*, *cadàie*, *cambèue*, *candàune*, ecc., *capàie*, *capàune*, *capèue*, -*èzze*, -*icchie*, ecc., *cardàune*, *carìzze*, ecc., *catàine*, *cavìute*, *crapàune*, *dannèue*, *fanìidde*, *faròine*, *fragagghie*, *gaggèune*, *granèdde*, *lacìirte*, *lambèue*, *macènue*, *magghiùule*, *mammèure*, *manìute*, *mannèure*, *mannòile*, *masciàise*, *mazzàule*, *paràite*, *parìinde*, *pastàure*, *quagghièue*, *rasàule*, *rastrìidde*, *sangìcchie*, *sbambèue*, *scarpìidde*, *spannècchie*, *staddigne*, (*s*)*tagghièue*, *tassìidde*, *vaciòile*, *varràune*, -*òile*, *vavìuse*, *zappùdde*; *calchèure*, *scalfèue*, *palmìinde*, *calzàune*, *callèure*, *scallèue*, ecc.; *chiandòime*, *chiavèure*, *schianèue*, *škamèue*, *škanèute*, *škardàune*, ecc.; — -*atìure* -*atàure*, -*atìidde* -*atèdde*, -*arìule* -*aràule*, -*arìidde* -*arèdde*, -*aròine*, -*aròie*, ecc., *arrasèue*, *devachèue*, *angallèsce*, ecc. [[-A + ⊥]]; ~~~ *calandràune*, *cambanèddre*, *canarìute*, *canaròile*, *castagnèure*, *cavaddàune*, *fafarìule*, *gramenèue*, *grattarìule*, *laganèdde*, -*èure*, *lazzaròule*, *macca-*

---

[1] O aferesi di *a*- second. da o- (u-)? (v. sotto).

[2] *Assemèue* (molf. *assemé*, ecc.) « annasare », di contro all'irp., nap., ecc. *osemá*, *usemá*, ci nasconderà una aferesi (**semare*), seguita da una prostesi (sui comp. in *ass*- da AD + S-).

ràune, *narvuèue*, *navechèue*, *raffanìidde*, *raškatìure*, *sarcinìidde*, *sfattescèue*, *sgammettèue*, *spasaràule*, *trappeteùre*, *vacandòie*, *rangarìidde*, *varvarèdde*; *calcenèure*, *callaràune*, *callarèule*, *scallatìure*, ecc.; *chiandatìure*, *schiangatàure*, *sciacquatàure*, *sciascenèue*, ecc.; — *spaccarescèue*, [*tagghiatrìidde*], ecc. [[-A + - + ˊ]] ⁓ Protonia sintattica: a) composti: *cannalònghe*, *mammarànne*, *pezzamaròine*, *tataránne*; *malalèngue* e sim., *menzalèngue* e sim., *primafegghiànde*; *acquanàive*; *sopamèune* e sim., *sottacànne* e sim.; — (*ad*)*daccialàrde*, *assucapànne*, *cacamargèule*, *cacciamèune* e sim., *conzacallèure* e sim., *ferraciùcce*, *ficcafùuche* e sim., *grattachèuse*, *mangiachennàteche*, *ngannapastàure* e sim., *nghiappachèune*, *papamòsche*, *paralìume*, *parapìgghie*, *passamèune*, *portavaciòile*, *sanamalèute*, *spaccachianghe*, *spassatìimbe*, *stutacannàile*, *sucamèile*, *tagghiafùurche*, *uardaspàlle* e sim., *zombafùusse* e pur *appennarròbbe* (analog.?) b) *a* da *-e* <-A (§ 24): *cotta còtte* ‘ còtta còtta ’, ecc.; *fegghièuta frèške*, *gràveta gròsse*, *acqua sànde*, *pica gendòile*, *pizza dòlce*, ecc. ecc. c) particelle proclitiche: *a* AD (*a bèive*, *a bùune*, *marce a pèite*, ecc.), *da do* DE AD DE UBI, *au* A(D)(IL)LU, *a*(*l*)*l*(*a*) A(D)(ĬL)LA (*all'ammerse*, ecc.), *de la* DE(ĬL)LA, ecc., *na* ‘ una ’ (*na magghie*, ecc.), *ca* *QUA (*ca te tenghe*, *ca nan èsse*, ecc.) § 17. — Ogni altra vocale protonica di sillaba interna, l'Ī e l'Ū compresi, si ridusse a vocal neutra; se precedeva o seguiva una vibrante (R, L), l'affievolimento potè arrivare al dileguo; non mancano casi di rafforzamento in *a* [1], ma sono più rari che nell' iniziale assoluta. a) affievolimento [2]: *demìirte*, *medùdde*, *menèue*, *nepàute*, *pedèule*, *-èute*, *pedùcchie*, *petrèule*, *-ùdde*, *secchèue*, *semmènde*, *senèule*, *setàzze*, *steddàune*, *vedàie*, *tenàie*; *capezzàune*, *ammenèue*, *ammetèue*, *annettèue*, *bastenèuche*, *capetàune*, *catenàzze*, *-enìidde*, *cernetìure*, *gavetèue*, *gramenèue*, *guvetèute*, *navechèue*, *nzetèue*, *ratechìune*,

[1] Quanto all'*e*, particolarmente davanti a *r* e a nasale complicata (v., qua sopra, la nota 2 di pag. 922).

[2] NB.: *e* è lo stesso che *ə*.

rennetìure, resettèue, scapezzèue; *accapezzèue, affrettequèue*, ecc.; *defreškèue, fedescèue, menestrèue, nevechèue, pettenèsse, recentèue, sechetèue, semetèdde, spedechèue*; — *ceddèure, cevèue, ceppàune*, ecc., *macenèdde, -ìidde*, ecc., *scettèue, scemmèdde*, ecc., *chescetèue, -escèue* '-eggiare', *descetìidde*, ecc.; *cegnàune, pegghièue, stregghièue*, ecc.; — *cendrèue, -àune, lendècchie, senghèue, sengatìure, vendaràule, lenghìute*, ecc., — *crepèue, precùuche, prettìuse, vreddàune, ammarechèute*, ecc.; *meròisce, cernetìure*, ecc.; *ferrèue, serràcchie, serrètte, arrecèite*, ecc.; *spelèue, melèdde*, ecc.; — *peschèure, pestèue*, ecc. [[-Ĭ-, -E-]]; ~~~ *fechèure, feccá, lenàzze, pecàune, pesèue, specudde, stepèue, -àune, tenèdde, -ìidde, vetàune*, [*zetelle*]; *appezzèue, calcenèure, cammesàule* (v. *cammòise*), *fadeghèue, farenèdde, gaddenèure, mestetrèdde* -VESTĪTOR-; *addevenìidde, aghestenèdde*; *pesatàure, -atìure, pezzechèute, pezzetèdde, spenaràule, spenuèue, spequèue, stezzenèue, venatàure* VĪNĪTŌRE; *spequatàure*; — *ceniatìure, pegnèute, -atèure, fegghièue, -anne, -èute, canegghièdde*; — *fressàule* FRĪXŌRIA [[-Ĭ-]]; ~~~ *dremmòie, necèdde, nezzìdde* (v. *nùzze*), *rengèdde, retèdde, -ìidde, senèue, stenèue, streddèsce, treddàine, treddìidde, calzenètte, caresèue, -ìidde, nzerèue*, ecc., *ammasenèue, petresòine*, ecc., *crecevòie, renenàune, renenèdde, rezzuèue, sfrenzuèue*, ecc.;- *creddàune, creddèdde, crennìute, screccèue, scrennèue, screzzèdde, crecciatàure, screcciatìure, creddùidde*, ecc., *sglemèue, prettìidde, sprettèdde, prettèue*, ecc., *freccèdde, fremmèdde, fletìure*, ecc.; *vressìdde, svletèue*, ecc.; — *checìvue, chedàune, cheddèure, cheggiàune, chelùmme, chembèure, chemmàtte*, ecc., *chengionge, chenòcchie, cheppòine, chescèdde, chesòie, checchegghièute, checchevèuce, checenìidde, chescetèue*, ecc. (less.); *schedèute, schegghièue, schegnèute, schetuèue, schemegghièue*; *acchessigghie, acchessigghièue, acchemegghièue*, ecc.; *agghettèue*; — *peddòite, pendàune, pendèue, pendìure*, ecc., *pescrèie, petèue, pezzìdde, peddetrìidde, pendaràule, -arìule*, ecc.; *spendàune, -atàure, spendèue*, ecc., *repeddèue* (v. *repùdde*); *sepìirchie, seprecchièue*; *appendèue, seppenne, seppunte, steppagghie*, ecc.; *abbettèue, mbestèue, zembèue, tembàgne, mbregghièue, sbregghièue*, ecc.; *fendèune*; *vedìidde, vettecìidde, revetèule, prevelàune, ndrevegghièue*,

carvenèdde, carvenarìule, scarvenescèue; *meddòiche, mendàune, mennèue, mertèule, merzàune, mestàzze*, ecc., *temàcchie* (da TŬMU <gr. *ϑυμόν*) l e s s., *addemerèue, arremeddèue, ammescèue, lemmìidde, nzemmuèue, addremmèsce*, ecc.; ⁓ con u̯ p r o p a g g i n a t o dietro al *k* della sillaba t o n i c a seguente o susseguente [1]: *clequèue*, *scl.* [EX]CŌLCARE, *scequèue* JŎCARE, *scequìire* *-ĔRJU, *scecquàgghie* < nap., irp. *scioccàglia*, *tecquèue* (e *att-*) toccare, *mecquèue* *IMBUCCARE, *mesquàune* ' moscone ', *mesquidde*; *affequèue, scequarìidde* ' giocherello ', *prequamuurte* **proc-* (cfr. il mater. *sprokamúurte*, all. a *prekuá*), [*musquatìidde, abbucquèue, bucquatàure*, v. sotto]; ⁓ *mezzequèue* l e s s., *pedequèure* POLLICARE o -ARJU, *serequèure* SORĬCARJU, *vemequèue* *VOMĬCARE, *vemequìuse* -ŌSU, *ndenaquèue* ' intonacare ', *ndesequèue* ' intossicare ', *ndreppequèue* (v. *ndrùuppeche*), *affrettequèue* (da FULTU, part. di FULCIO) l e s s.; ⁓ p r o t o n i a s i n t a t t i c a: *quapanìidde* (all. a *cap-*), *squanne* SCAMNU, *squagghiàune* ' scaglione ' l e s s. e qualche altro; certo dall'*u* dell'articolo [2]. [[-O-, -U-]]; ⁓ *credòile* (da CRUDU), *lecìgne, Leciòie, predàie, predòite, stetèue, adenèue, chesetàure, -etìure, meserèdde, -ìidde, pezzetèdde, sprettesèue, abbrestuòie*; *lecernèdde, sedatìzze*; — *cherèue, škemèue, šketèure, sechetèue*; — *pepàzze, lepòmene, nzeppèue*; *mecchìuse, meškìire* (da *muške*, l e s s.), *remmèute, -atescèue, scemmènde*; *fesuìcchie, sfemèue*; *regghemèue* l e s s.; ⁓ *con* u̯ propagginato dietro al *k* della sillaba tonica seguente o susseguente: *dequèute* ' ducato ', *adequèute, mequèute* sost. " bucato ", [*mequèue, -èute* « bacare; bacato, cariato »] [3], *abbeškuèue* buscare, [*mucquatìure* " conca pel bucato "; v. sotto]; *aškuàie* USCL- l e s s., *aškuande*, ecc. [4].

---

[1] V. qua sopra a p. 17.

[2] Poche le eccezioni: *checòmere, checòzze* *; *fecàzze, focàgne* (voci importate?). — Nessuna traccia di propagginazione, naturalmente, dietro alla palatale odierna da K + L, Ĝ + L: *checchieùre* ' cucchiaio ', *scenecchìidde*, ecc.

[3] Dove forse è da leggere una contaminazione con *bucare, bucato*; altrimenti il S a l v i o n i in ' *Oss. varie* ', p. 766, n. 1.

[4] Il fenomeno parrebbe dunque posteriore al rafforzarsi dell'*o*–, *u*– in *a*–.

---

* O il fenomeno non avvenne se la vocal t o n i c a era un *o*, vale a dire una vocal v e l a r e? In tal caso l'*àu* da ọ' di sillaba aperta (v. il § 9. 1, *a* e qua sopra *mesquàune*) sarebbe più tardo. V., per altro, qui sotto, la n. 4.

[[-U-]] b) dileguo: *cràisce* 'coréggia', *cresciule* 'coreggiuòlo', *crescètte, cresciuècchie, cròisce* less., *screscèute* -ATA, *cròune* corona, *cresialtèute* (da 'curioso'); *agreiuse* '*agurioso'; *pràscene* 'peraggine', *spràune, spruèue* **spuruá* 'spurgare', *spruatàure*; *brùcche* '*perucca'; *frastìire* 'forestiero', *frùgne* 'furuncolo'; *vrezzuèue* (v. *verrìuzzue*), *lavratàure* 'lavoratore', *provèdde* **pover-*, *vrevagge* **vever-* (cfr. nap. *veveraggio*) **verev-*; *trèue* 'tirare', *trèute* 'tirata', *trànde, tratìure, strèue* 'stirare', *tramòute* 'terremoto', *tragnàule* 'terr-' less., *matrèue* 'maturare', *pettrèule* 'pettorale', *pettrèute, mestetrèdde* less., *tagghiatrìidde* less., *mbastrèue* 'impastoiare', *mandremende* **manten-* **manter-*; *drepèue* 'dirupare', *drèite* DERET(R)O, *scredùzze* **scoder-* less.; ancora, *mbrenne* **mer-* **mr-* 'merenda', *mbràgghie* **mer-* (cfr. il nap. (*s*)*meraglia*) medaglia, *mbràque* 'miracolo' e *mbraquìuse* 'miracoloso', *mbròie* 'morire', *mbràgghie* 'muraglia' (per l'epentesi, v. cons., M'R) [[cons. + R]]; ~~~ *mbleccèue* (cfr. il nap. *mpellecciare*), *mbliciatìure*; *platìidde* (cfr. irp., nap. *peleiá* < sp. *pelear*); *napliàune* **napolejone*, *plizza-cemenèire* e sim. (cfr. irp. *pulezzá*), *flìscene* 'fuliggine' [[cons. + L]]; ~~~ *spirdescèue* (cfr. il nap. *speretejare*), *bartòine* 'berrett-'; *farnèule* FARĪNARJU, *mbarnèue* 'infarinare', *mbarnatìure, maccarnèule* 'maccaronaio'; [*garbenìire* 'carabiniere', *ngarcatìure* 'in caricatura'] [[R + cons.]]; ~~~ *alcétte* (v. *alòice*) [[L + cons.]][1]. c) dileguo con rinascita della sillaba o samprasāraṇa: 1) *tiedde* **tejéd-* **təi̯ed-*, *tianèdde* **teja-* *-təi̯a-*, ecc. (v. il § 26bis), *viatìidde* **vejat-* (cfr. il nap., ecc. *vejato* 'beato'), *chiacchiarièute* (cfr. l'irp. *chiacchiarejàta*), *agreiuse* **agurioso* (v., più sotto, *agùrie*), *accasiàune* *-*sejó-* (cfr. il vast. *accasijáune*), *mbesiàune* *-*sejó-* 'in fusione', *napliàune* (cfr. l'irp. *napolejone*), *arremedièue* (cfr. irp. *arremedejá*), *arresidièue* (cfr. irp. *arresedejá*); *acchiatèue* **acchejetá* (cfr. nap. *accojetá*, vast. *accujatá*,

---

[1] V. anche i §§ 18 e 19. — Dove alla vocale seguiva cons. doppia (*bartòine* 'berrett-', *tragnàule*, ecc.), alla sincope dovè precedere uno scempiamento.

molf. *acquejetá*, ecc.); *chembessiendòine* **-essejen-*; — *ariàune* **ajer-* **air-* (v. cons., -G-), *traittèue* **traiett-* **traiətt-* TRAIECTARE. 2) *u* da -ŬL- + voc., attraverso ad **-uu-*: *aduèsce* **-ulé-* **-uu-* ADOLESCERE e sim. (v. cons., -L-). d) rafforzamento: *varòule* VĬRIŎLA, *varòule* « padella da bruciate » (cfr. nap. *veròla*, sor. *uuərolə* s. pl. « bruciate »), *ciarnèire* ' cerniera ', *barrette* ' berretta ' e *bartòine* (v. sopra), *naltarèue* ' inalterare '; *sangiòine* « gengiva »[1], *stannàrie* less.[2], *ciammùure* cimurro (cfr. nap. *ciammuorio*, tar. *ciammuerro*, ecc.; less.) [[-E-, -Ĭ-]]; ~ *nagghiòire* nocchiero, *cacàune* (cfr. calabr. *cacune*, molf. *cacouene*, ecc.; less.), *nannùurche* NŎNNU+ŎRCU e *nannàscene* (se da NŎNNU), *cazzacòmene* ' cozza ' + ?, [*saletàrie* ' solitario '], *cambanagge* (cfr. nap. *companaggio*, ecc.), [*dammagge* < fr. *dommage*], [*sciangarìidde* (v. bar. *sciunghə*, ecc.)], *affafagnèue* -FAVŌN-, [*rangefallàune* < nap. *rangofellonə*?][3]; in protonia sintattica: *nan*, *nam* NON (*nan esse*, ecc., *nam-bèine* ' non viène '); *Mande frídde* ' Monte freddo ', *acìidde de Sanda Necòule* ' ... di santo Nicola '. [[-O-]]. § 17 bis. — Non mancano per contro esempi di epentesi di vocale, particolarmente nei nessi di R, L + cons. e cons. + R, L: *carevìune* ' carboni ', [*serevìzie* ' servizio ']; *salamàstre* ' salmastra '; *assalemèute* (v. *assalmèue*); ~ *serecchièue* **sorchiá* (cfr. irp., nap. *sorchiá*, cal. *surchiare*, ecc.) **srecchiá* (v. cons., -CCL-); — *Velèuse* BLASIU; — *assemèue* (v., qua sopra, a p. 17, n. 2). § 18. — Influsso di palatali. L'*ə* (da *e*, *o* proton.) pare tenda all'*i* davanti e dietro a cons. palatale, almeno a giudicare dalla grafia *i* che talora sfugge all'autore: *pignatìidde* (all. a *pegn-*); — *cindìure*, *circande*, *cinarìule*, *cicerìidde*, *acciccenèue*, *accippenèute*, *sarcinìidde*,

---

[1] O un connubio con ' sangue '?

[2] Di questa, e di qualche altra voce, si può dubitare veramente che ci nasconda una assimilazione. Non esiterei a leggerla in *valanzòine* (che ha di contro *velanze*), in *marangiàgre* melarancia e nello stesso *camastre* **crem.* less.

[3] V., qua sopra, la n. 2. — Con *a*, da *o* second., *abbracatìure* OBRAUC- (cfr. irp., nap. *abbrucá*, ecc.; less.).

e qualch'altro; *schiichèue* EXPLĬCARE, *ghiimerèue* GLOMERARE; *chivièule* *PLEB- 'piviale'. § 19. — Influsso di labiali: *pugnètte, pulìmme; bucquatàure, abbucquèue, mburnetìure, fucarìidde, funnerìgghie, fumàteche, fumuìzze*; *muzzequèue* (all. a *mezz-*), *musquatìidde, mulecìidde* (da MULU), *mucquatìure* (v. *mequèute* bucato); — *ghiumerìidde, sghiumerèue, škumarìidde* less., *chechumarazze, chiumazzùule, cumbà, frambullìcchie* [1] e sim. [2].

§ 20. — Attrazioni analogiche. Derivato sul primitivo [3]: *aminuècchie* e *aminuèute* (v. *amìnue*), *spirdescèue* (v. *pirde* **pireto*, § 3, II *b*), fors'anche *discetèule* (v. *dìscete*), *acchessigghièue* (v. *acchessigghie*), *chiitrèute* (v. *chìitre*); [4] — *lizzaràule* (v. *lìzze*), *spinguàune* (v. *spìngue*), *pizzuèue* (v. *pìzzue*); — *monacèdde, monachècchie, monecacìidde* (v. *mòneche*), *mossaiùele* (v. *mòsse*); — *zumbarìidde* (v. *zùmbe*), [*fasuline* (da **fasìule*? [5] prot. sint.?)]; *ciucciaròie* (v. *ciucce*), *lucquèue* (da **lucque* [5], molf. *lùchele*, ecc.); e qualche altro.

§ 21. — Assimilazioni: *magnàttue* mignatta, [*massaràule* (di c. a *musse*); v. il nap., irp. *mussarola*]; *fruguòite* (di c. al molf. *freghelajete*), [*fruccuèue* less.], e v., qua sopra, la n. 2 di p. 928. — Dissimilazioni: *chennàteche* « ghiottornìa » (da CANNA « gola », v. less.), *ghevàzze* (cfr. il tar. *cavazzə*, ecc.), *penarìzze* (cfr. l'irp. *panarizzo*, ecc.), *scanegghièue* (cfr. l'irp., nap. *scanagliá*); [*facètue* FĪCEDULA].

---

[1] Taluno dei quali potrebbe anche avere altra ragione: *mùzzequèue* dovere l'*u* a *mùzzeche*; *fumàteche, fumuizze* e sim. dovere l'*u* al primitivo (**fìume* FŪMU) ** e offrirci l'esito proprio della protonia sintattica; ecc.

[2] Allato ad *u*, comparisce talora anche *o*: *focàgne, coppètte* e qualche altro.

[3] O sulla voce, comunemente intesa come primitivo.

[4] *Vinduuscèue* su *vìinde* 'vènto'? protonia sintattica?

[5] Manca al lessichetto.

** Manca al lessichetto.

II. Vocali postoniche.

A) di SILLABA INTERNA:

§ 22. — Tutte le vocali postoniche di sillaba interna, l'A compreso, si ridussero a vocale neutra; talora, particolarmente dietro o davanti a vibrante (R, L), l'affievolimento potè arrivare al dileguo. a) affievolimento: *làghene* LAGANA (v. *laganèdde, -èure*); *gàvete* GABATA; *mòneche* 'monaco' (v. *monacèdde*), *fùneche* 'fondaco'; *ficchete* 'ficcati' [[⊥A-]]; — *màneche, ràteche* 'ràdica', *-àteche* -ATĬCU (*chenn., fum.*), *còteche* CUTĬCA, *vùumeche* (dev. di *VOMĬCARE), *ndrùuppeche* less., *mùzzeche*; *èrmece* IMBRĬCE, *pòmece*; *dìscete* DIGĬTU, *gùvete* CUBĬTU, *cùscete* (dev. di COGĬTARE), *lìvete, gràvete, fùnghete* less.; *màcene, òmene* HOMĬNE, *fèmmene, rètene* 'redina', *àscene* (e *àc-*) ACĬNU, *-àscene* -AGĬNE (*nann., pr., prebb.*, ecc.), *-ìscene* -ĪGĬNE (*fl., pet.*, ecc.);- *checòmere*; *stènnese* EXTENDE(RE)-SE e sim. [[⊥Ĭ-, ⊥Ĕ-]]; — *tùmene* 'tómolo' less., *lùmere* '*morole' less.; *⊥ere* ⊥ŎRA (*nàch., grat.*; *ngèn.*; *candòn.*); *jàveche* **jacheve* JACOBUS [[⊥Ŭ-, ⊥Ŏ-]]. b) dileguo: *chècre* (v. il nap. *chièchiera*; Salvioni in '*Oss. varie*', 106); *ètre* HEDERA, *òpre* 'òpera' less.); — *pècre* 'pècora', Plur. in -ŎRA: *càpre* '*capora' less., *nòtre* '*nodora', *dèscetre* (da *dìscete* DIGĬTU), *-è(d)dre* -ELL-ŎRA (*capp., mazzar.*, ecc.), [*mambre* **mammre*, all. a *màmere*, less.] [[cons. + R]]; — *cùcle* 'cuculo', *còcle* (cfr. mater. *keəkələ* -ŏ'-; less.); *scùple* SCŎPULU, *còpple* (cfr. il nap. *còppola*), *stupple* (cfr. il nap. *stùppolo*) [[cons. + L]]; — *pìrde* **pìreto*, *spàrge* asparago, *purge* **purece* (cfr. tar. *pòrece*, ecc.; Salvioni in '*App. mer.*', 63), *ghiùrme* **glomero* **-oremo*, [*spàrne* *σπάρyανον*; cfr. tar. *spràine*[1]] [[R + cons.]]; — *càlce* 'calice' [*càlme* CALAMUS *REW.* 1485], [*celme* 'cimolo'? less.] [[L + cons.]]; — *Minghe* 'Ménico' [[N + cons.]]; — *nasche* NASĬC-, *tùusche* TOXĬCU; — *ascre* **ásteco* **asco* (v. Salvioni in '*Oss. varie*', 63) [[S + cons.]]; — *nèpte*

[1] Diversamente il Salvioni in '*Oss. varie*', 63.

NEPETA, *salìpce* (cfr. molf. *salipece*, ecc.) [[P + cons.]]. c) dileguo con rinascita della sillaba o samprasāraṇa: 1) *arie* (cfr. irp., ecc. *areja*), *fùrie* (cfr. irp. *fureja*), *agùrie* (cfr. irp. *agùrejo*) e così *cèrie* **cerejo*, *corie* **corejo*, ecc.; *chièsie* *-*eseja*; *fibbie* (cfr. irp. *fìbbeja*); *adduppie* *-*óppejo* (cfr. molf. *addeppejá*); *ammìdie* *-*deja*, *arresidie*, ecc.; *fiche d-ìnie* *-*ineja* [1], *avùnie* *-*uneja*, *altànie*, ecc.; *astie* **asteja*; *almuzie* *-*uzeja*, *aurìzie*, ecc. 2) U da ́ŬL + voc., attraverso ad *-*uṷ*-: *pìzzue* *́*ulo* *́*uṷə* e sim. (v. cons., -L-). § 22bis. — Rarissimi gli esempi di vocale epentetica che si conservi tuttora; *còleche* (deverb. di *clèqueue* *CŌLCARE; v. *R. de Dial. Rom.* I, 240); [*burue* burla; v. cons., -L-, e *REW.* 1418]. Di *purge* il cui -*ǵ*- accenna a **púrece*, v. cons., -L + ć-, e qua sopra, a p. 26.

§ 23. — Influsso di palatale: *dìgghiire* (v. il § 1, *b*, e, qua sopra, il § 18).

B) FINALI:

§ 24. — Tutte le vocali finali, l'-A compreso, si ridussero a vocal neutra: -*àune* -ŌNE, -*àure* -ŌRE, -*èule* -ALE, -*èure* -ARE, *trèuve* 'trave', *nàive* NĪVE, *còure*, *vàuce* VŌCE, *càlce* CALCE, ecc.; *iòuce* -HODIE; *èsse* EXĬT, ecc., *fòure* FORĪS [[-E, -Ĭ]]; ~~~ *pànne* 'panni', -*ùuzzue* '-òzzoli', ecc., -*ìune* '-oni', *nepìute* 'nipoti', *dìinde* 'denti', *vìirme* 'vermi', *sìirpe* 'serpi', ecc., *mane* 'mani'; *tìine* 'tièni', ecc. [[-Ī]]; ~~~ -*òine* -ĪNA, -*òie* -Ī(V)A, -*àise* -ESA, -*ìure* URA, -*ècchie* -ĬC(U)LA; -*èdde* -ELLA, ecc. ecc.; *cònze*, *còuve*, ecc. (deverb.) [[-A]]; ~~~ -*òine* -ĪNU, -*òise* -ESU, -*ìure* -ORJU, -*ìcchie* -ĬC(U)LU, -*ìidde* -ELLU, ecc.; *cùscete*, *sfùugghie*, ecc. (deverb.) [[-Ŭ]]; ~~~ *vènghe* 'vengo', ecc.; *òtte* OCTO; *arrèite*, *drèite* -RET(R)Ō, -*ànne* -ANDŌ (*appap.*, *attend.*), -*ènne* -ENDŌ (*scherr.*, ecc.) [[-O]].

Di -*a* da -A nella protonia sintattica, v. il § 16, *b*. Sempre in protonia sintatt., da -O s'avrebbe -*o*, di contro ad -*ə* da -Ŭ (= prerom. -*ọ*)? v. *vengovènghe* « beccheggio », di contro a *casecavadde*, *ciindepezze*, *ciindrepìite* e sim.

---

[1] Cfr. irp. *sorecerinejo* 'sorece-d-indio' e il lecc. *ranədínəjə* (A. Gl. It. IV, 176).

SPECCHIO DEL VOCALISMO ATONO.

		Ī	E (Ĕ̄, Ĭ)	A	O (Ŏ, Ŭ)	Ŭ
Vocali protoniche	INIZIALI	. . . .	— , *a*- (1)	*a*- , (—)	— , *a*-	. . . .
	DI SILL. INTERNA	-*ə*-, — (2)	-*ə*- , — (2) (-*a*-(3), -*i*-(4), -*u*-(5))	-*a*-	-*ə*- , — (2) (-*a*-, -*i*-(4), -*u*-(5))	-*ə*-, — (2)
Vocali postoniche	DI SILL. INTERNA	. . . .	-*ə*- , — (2)	-*ə*- , -(2)	-*ə*- , — (2)	. . . .
	FINALI	-*ə* [-*ə*]	-*ə* [-*ə*]	-*ə* [-*a*]	-Ŏ: -*ə* [-*o*?]; -Ŭ: -*ə* [-*ə*]	. . . .

N.B. I punti (. . . . .) dicono che il suono mancava, in quella sede, al preromanzo, oppure che mancano al lessichetto esiti del suono; la lineetta (—) dice dileguo, si tratti di aferesi oppur di sincope. Tra parentesi tonde noto l'esito meno frequente; tra parentesi quadre quello della protonia sintattica. — (1) Particolarmente davanti a N (M) + cons., a vibrante, ecc. (v. il § 15, *b*). — (2) Particolarmente davanti o dietro a vibrante (v. i §§ 17 *b*, 22 *b*). — (3) Particolarmente davanti a N (M) + cons. e a R (v. il § 17, *d*). — (4) Vicino a cons. palatale (v. i §§ 18, 23). — (5) Vicino a cons. labiale (v. il § 19).

L'ofelimità delle quantità iniziali e l'equilibrio economico.

Nota del Dr. GINO BORGATTA.

Sunto. — § 1. Le linee d'indifferenza in casi di ofelimità elementare crescente: sono concave pel tratto iniziale. — § 2. Esse diventano parallele agli assi nei casi in cui l'ofelimità è per una certa quantità iniziale nulla, diventando massima ad un certo punto. — § 3. Mutue dipendenze generali di tutti i fattori dell'equilibrio economico. La proprietà dell'ofelimità considerata vi è perfettamente compatibile. — § 4. Così pure nelle mutue dipendenze particolarmente costituite dalle dipendenze dei varî consumi. — § 5. Curve d'ofelimità crescenti e curve di domanda: ipotesi di indipendenza tra i consumi. Ipotesi dell'interdipendenza tra i consumi. — § 6. L'equilibrio e le curve di domande in questo caso. Si suppone l'aumento del prezzo di una merce. La proprietà considerata rende difficile la perfetta uguaglianza delle ofelimità elementari nel fenomeno concreto. — § 7. Le curve d'ofelimità crescente nei consumi delle varie classi. L'ofelimità crescente del reddito disponibile: del risparmio.

§ 1. Abbiamo visto in nota precedente che le scelte individuali tra le combinazioni di beni, osservabili direttamente nella pratica generale, indicano che gli individui in esse si diportano in modo generalmente corrispondente all'ipotesi che l'ofelimità elementare dei beni cresca per le quantità iniziali fino ad un certo punto (1): queste scelte e combinazioni si presentano

(1) Le ragioni tecniche che possono spiegarci questo fatto e la proprietà dell'ofelimità sovraccennata, evidentemente esistono in parte anche per le " unità " successive eventuali dei beni, in molti casi. Per esempio, una seconda villa per chi ne ha già una, rappresenta una *quantità* positiva di maggior o minor estensione, la cui ofelimità elementare, ancora, cresce fino a che la villa è completa (coi muri, tetto, balconi, ecc.) indipendentemente in ciò dalla prima. Questo dimostra come in concreto il fenomeno sia assai più complicato di quello che sia in ragionamenti generali e schematici quali il teorico deve fare. Per cui la curva della fig. 1 (nota 1ª) nel tratto discendente presenterà per le quantità dell'*unità* successiva *inclinazioni diverse*, cioè, nel caso indicato, prima maggiore e poi minore. D'altra parte, altri beni più omogenei e divisibili (bevande, moneta, risparmio, ecc.) non dovendo esser scelti a, diremo così, " unità organiche " presenteranno un tratto di curva dell'ofelimità discendente, con inclinazioni generalmente meno diverse.

sempre con *certe* quantità dei beni — *materialmente* maggiori o minori — scelte, e quasi mai con quantità (iniziali) minori, con quelle cioè corrispondenti all'*insufficienza* per la soddisfazione di un certo o certi gusti.

La proprietà accennata dell'ofelimità non è possibile dimostrarla sperimentalmente ove non si abbia non solo la rappresentazione delle scelte *effettive* degli individui, ma anche di quelle *virtuali*, cioè dei gusti di essi.

Quello che l'osservazione diretta ci assicura è la scelta di *certe* quantità nelle infinite diverse combinazioni: ed è solo col

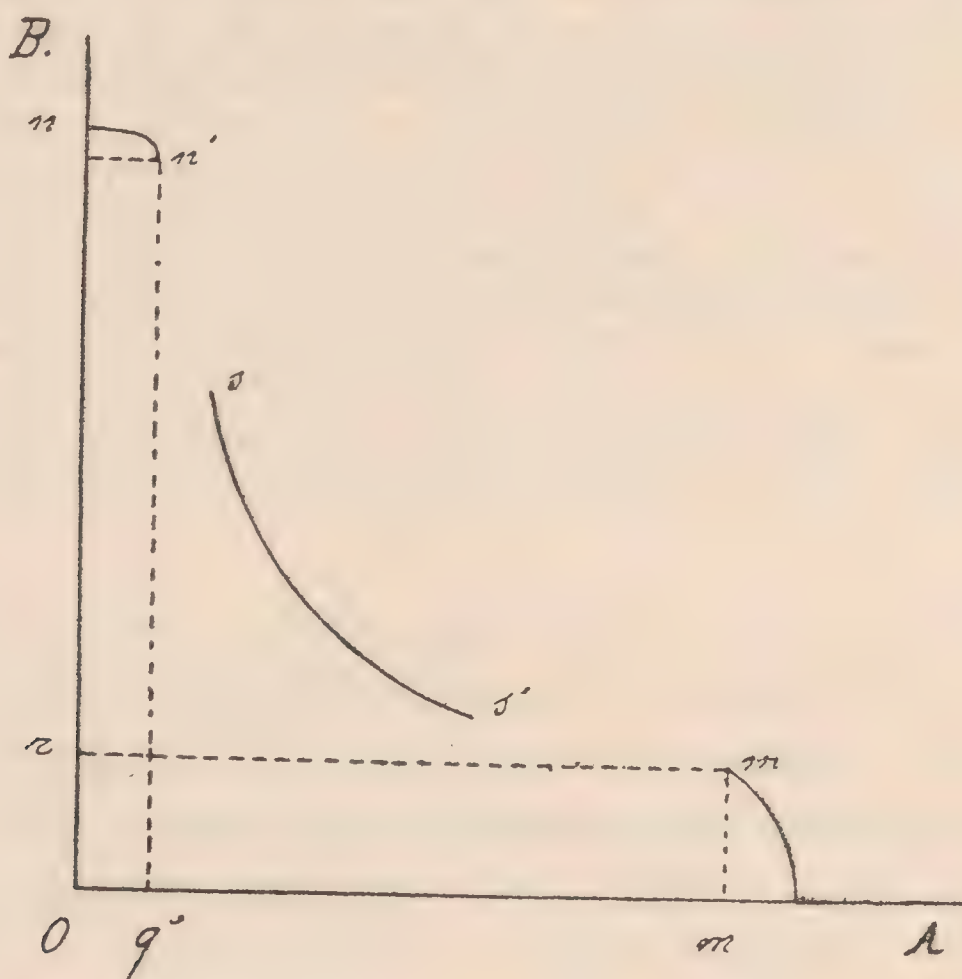



Fig. 1.

ragionamento che possiamo dedurre, in mancanza di effettive risposte degli individui sulle scelte che materialmente non fanno, ma farebbero o non farebbero, che gli individui scartano le scelte di certe quantità (insufficienti) o per lo meno queste sceglierebbero in modo corrispondente all'ipotesi che l'ofelimità elementare di esse (considerate come iniziali) è minore di quella di quantità maggiori. Osserviamo che gli individui scelgono un mobile intiero, una villa, ecc., in una certa combinazione di altri beni, ma non abbiamo la prova materiale della loro opinione in una combinazione in cui vi fosse una porzione insufficiente di mobile, villa, ecc., almeno, generalmente parlando. Si è già accennato (§ 4) alla forma che assumono le linee d'indifferenze

tra le scelte, in corrispondenza a questa proprietà dell'ofelimità: essere cioè concave verso gli assi rappresentanti le quantità dei due beni tra cui si sceglie, pel tratto corrispondente alla quantità iniziale con ofelimità crescente: naturalmente la linea diventa, in generale, dopo un tratto maggiore o minore, del genere di ss', cioè convessa.

§ 2. Altre volte le linee d'indifferenza hanno un'altra forma che pure corrisponde all'ipotesi di ofelimità crescente per le

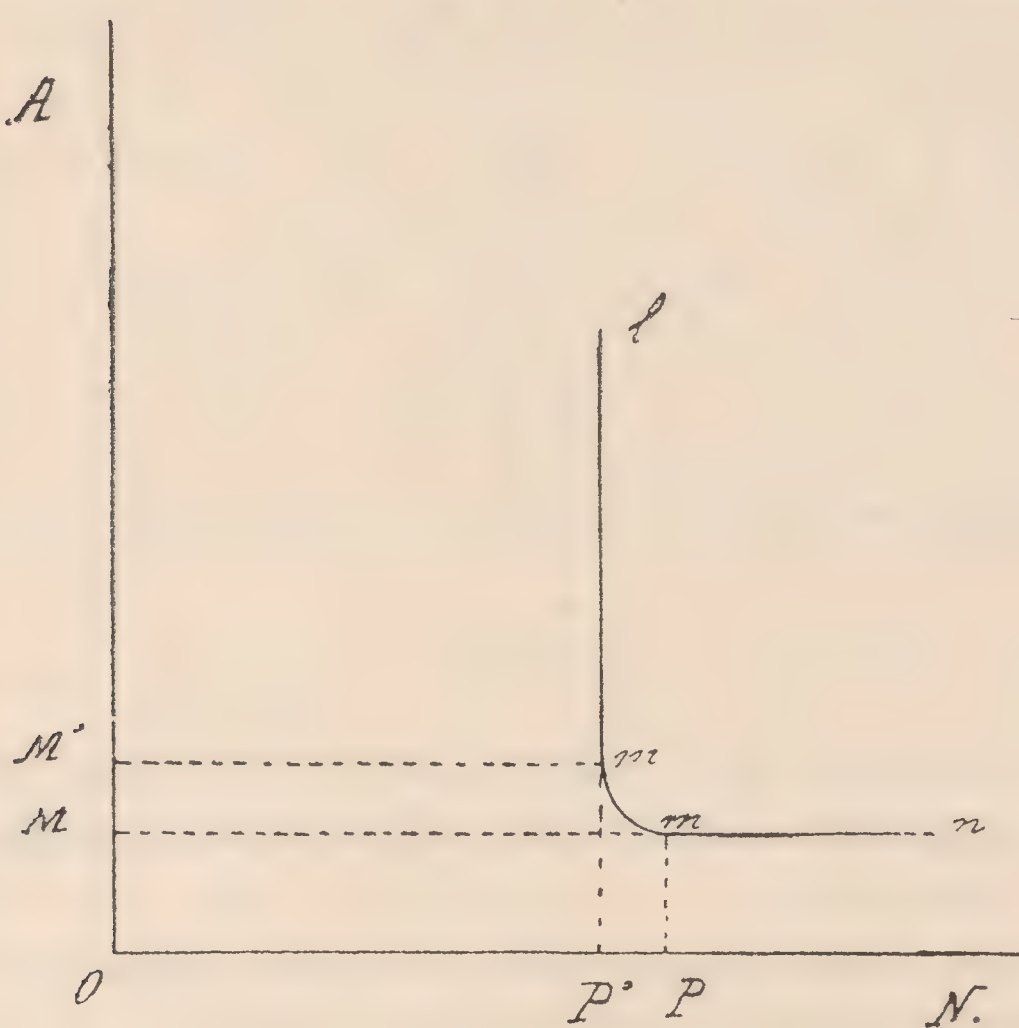



Fig. 2.

quantità iniziali. Si supponga che un solo bene (A) soddisfi il gusto " sete „; senza una certa quantità, l'individuo sente di morire di sete: oltre una certa quantità maggiore più o meno, l'individuo non sa che farsene (sempre parlando di ofelimità *diretta*). Supponiamo che questo bene A debba esser acquistato con una certa porzione del totale numerario disponibile in mano all'individuo (N): la linea d'indifferenza correrà a un certo punto parallela agli assi. Infatti l'individuo non sceglie una combinazione numerario — A in cui vi sia una quantità di A secondo lui insufficiente a mantenerlo in vita: a un certo punto in cui le combinazioni contengono solo più MO di A, ogni ulteriore quantità di N non riesce più ad indurre l'individuo ad accettare

una minor quantità di A. In questi casi, supponendo l'ofelimità una quantità, la curva dell'ofelimità di MO sarebbe assai analoga ad MC, cioè quasi nulla per le quantità precedenti O e rapidissimamente elevantesi al massimo. D'altra parte l'ofelimità delle quantità ulteriori decresce più o meno rapidamente: a un certo punto ($M'O$) l'individuo è sazio di A; ha gli altri gusti da soddisfare: qualunque quantità di A aggiunta nelle

C

M O x

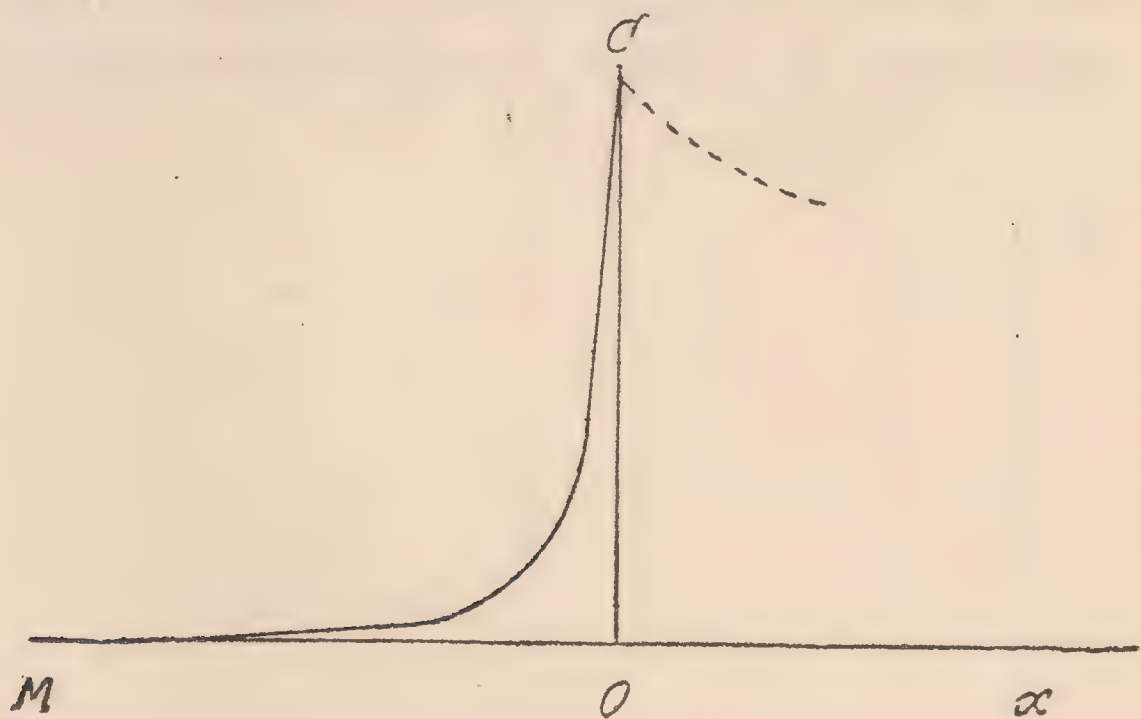



Fig. 3.

combinazioni oltre m' non l'indurrebbe a rinunziare alla quantità OP' di numerario che gli assicura la soddisfazione di altri gusti (1).

In concreto è però noto come le scelte degli individui non avvengono tra le combinazioni di due soli beni, ma di un numero maggiore o minore di questi. Le linee d'indifferenza che

(1) Dire quando in concreto le linee d'indifferenza nei casi di ofelimità elementare crescente hanno l'una piuttosto che l'altra forma è pressochè impossibile. Un assetato, anche se la quantità offertagli di bevanda può esser considerata insufficiente a mantenerlo in vita, farà, date le sue condizioni, dei sacrifici pur di averne un po', e allora la linea sarebbe evidentemente concava all'inizio. D'altra parte nel caso di un individuo che ha bisogno, per es., di 12 (almeno) coppe per *champagne*, l'ofelimità di un numero minore, insufficiente, di coppe in quel momento e condizioni sarebbe si può dir affatto nulla; ma è viceversa improbabile che la linea d'indifferenza delle combinazioni col numerario totale si prolunghi da m verso n parallela all'asse, in quanto occorrerebbe conoscere tutti gli altri gusti dell'individuo e tutte le altre sue condizioni, per sapere quale importanza annette alla soddisfazione di questo gusto particolare con parziale sacrificio di altri.

possono indicare solo scelte tra combinazioni di due beni, non ci servirebbero più. Ma possiamo, essendo un mezzo assai comodo, continuare a servircene, paragonando, come abbiamo ora fatto, successivamente le quantità diverse di ciascun bene (o di gruppi strettamente complementari di beni, considerandoli come beni unici) col totale numerario a disposizione di ogni individuo. Il che ha non solo il pregio di farci superare l'inconveniente dal punto di vista pratico e di avvicinarci al fenomeno concreto, ma di rappresentare in modo assai approssimativo la realtà, in quanto nelle scelte di combinazioni tra un certo bene (o gruppo di beni) ed il totale numerario (restante) l'individuo tiene implicitamente conto delle combinazioni di altre quantità di altri beni che il restante numerario consente o ha consentito di scegliere. Naturalmente l'ofelimità del numerario è strumentale: in questo modo non conosciamo gli *altri* gusti, ma veniamo a conoscere non solo quello distinto, ma quale posto esso ha nella configurazione generale dei gusti dell'individuo.

§ 3. Vediamo ora brevemente la connessione della proprietà dell'ofelimità considerata colle nozioni generali dell'equilibrio economico. Inutile osservare che il problema non può essere trattato con un certo rigore se non facendo uso dell'analisi: ma in ogni caso sarebbe trattato in via puramente sintetica ed ipotetica, in quanto non sarà probabilmente mai possibile la rappresentazione dei fattori e delle equazioni *numeriche* del fenomeno economico concreto; perciò anche il ragionamento comune può *indicare*, con minore approssimazione, certi problemi generali.

In realtà gli individui scelgono sempre combinazioni di più beni e gruppi di beni; e le ofelimità di questi, anche prescindendo dai casi di beni *strettamente* complementari, sono interdipendenti, in quanto le ofelimità (e le *domande* od offerte, ecc.) di ciascun bene sono determinate e variano in corrispondenza delle condizioni in cui si trova l'individuo rispetto agli altri suoi gusti, disposizione, disponibilità o non, di altri beni, ecc. (1).

---

(1) Si considerino solo gli indici di ofelimità, nel caso di beni A, B, C,... a consumo indipendente: l'indice sarebbe

(1) $$I = \Phi\,(a, b, c, \ldots)$$

ove a, b, c sono variabili indipendenti. L'ofelimità *elementare* di ciascuno

S'intende che questa dipendenza può esser maggiore o minore, e in certi casi potrà considerarsi l'ofelimità in funzione di uno o pochi beni e non di tutti in quanto la dipendenza dalla quantità di quelli è molto più stretta ed importante che non da quella di tutti gli altri. Abbiamo già visto in un caso nella nota precedente (§ 10) che la serie di dipendenze costituita dalla " gerarchia delle merci „ e cosiddetta legge di sostituzione non influisce sulla proprietà generale dell'ofelimità indicata, nel senso di eliminarla. Questa nozione ora ha da essere generalizzata. La interdipendenza generale di tutti i dati ed elementi, e quindi delle ofelimità, in ogni individuo partecipe all'equilibrio, che è il carattere essenziale del fenomeno economico, viene in qualche modo a negare o restringere la proprietà generale considerata? Evidentemente no. La mutua dipendenza dei fattori (e le ofelimità non sono che un gruppo dei fattori dell'equilibrio) si può riconnettere anche solo alla più generale nozione dei *gusti*

---

dipende, per la espressa condizione, solo dalla quantità del bene; quindi

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \varphi_a(a), \quad \frac{\partial I}{\partial b} \varphi_b(b) \ldots \tag{2}$$

Se i consumi dei beni sono invece interdipendenti in modo che l'ofelimità di a non dipenda solo da a, ma da $b, c \ldots$ ferma rimanendo la formula dell'indice, si avrà

$$\frac{\partial I}{\partial a} = \varphi_a(a, b, c, \ldots) \tag{3}$$

e così per b, c, ecc. Il Pareto, per semplificare, osserva che in molti casi (*Manuale*: Appendice, § 14) l'ofelimità elementare, per es., di A, variando molto con a e poco con $b, c \ldots$ e così per $B, C \ldots$, si può fino ad un certo punto stabilire $\frac{dI}{da} = \varphi_a(a, b_0, c_0 \ldots)$ in cui $b_0, c_0 \ldots$ sono valori *costanti*: ed il caso ridiventa analogo al primo considerato (2). Nel caso di beni strettamente complementari (in certe proporzioni definite) se questi beni complementari sono separatamente espressi (si potrebbero anche considerare per semplicità come un bene *unico*, secondo noi) le rispettive espressioni non sono più variabili indipendenti come in (1) ma legate come in (3): si trovano in una proporzione costante colle quantità dell'altro bene complementare, e l'ofelimità sarà in funzione dei varî beni complementari in certe combinazioni; naturalmente, se altri beni rimangono, non complementari e non tali quindi da doversi considerare variabili alla funzione d'ofelimità di ciascuno dei beni complementari già considerati, rientreranno nel caso di variabili indipendenti, (1) e (2).

o bisogni degli individui cui si oppongono ostacoli. La natura e forma di questi gusti, come degli ostacoli, è solo una nozione (meglio, una serie di nozioni) successiva, un'ulteriore approssimazione, non rigorosamente indispensabile alla concezione sintetica dell'equilibrio. La conoscenza delle *forme* delle curve dell'ofelimità non è che una conoscenza più particolare dei gusti individuali (s'intende, lo stesso deve dirsi per le ofelimità *strumentali*, e parlando degli ostacoli): fino ad un certo punto si può dire che nulla importa alla nozione generale dell'equilibrio che l'ofelimità elementare sia crescente o decrescente. Questo ci fa meglio comprendere come fossero invalide le citate obiezioni del Graziadei e del Valenti, basate sulla forma crescente dell'ofelimità di una certa quantità iniziale dei beni, sia pur solo alla teoria edonistica del valore: tanto più sarebbero invalide per la concezione dell'equilibrio; nel primo caso la essenza della teoria essendo nella dipendenza dei prezzi dall'ofelimità elementare dei beni scambiati; nel nostro, nella dipendenza di ogni prezzo da *tutte* le condizioni dell'equilibrio.

§ 4. Tutto ciò è già implicito nel concetto che la forma delle curve delle ofelimità può esser data solo dall'osservazione diretta. La nozione delle mutue dipendenze generali è una prima approssimazione sintetica: le successive devono in parte compiersi in via esperimentale, che appunto ci ha condotto ad accertare questo carattere.

Nelle mutue dipendenze generali si considerino più particolarmente quelle costituite dalla dipendenza dell'ofelimità e consumo d'ogni bene dai consumi di tutte le altre. È intuitivo che, di per sè, la differenza tra queste funzioni $\varphi_a(a)$ *ed* $\varphi_a(a, b, c...)$ non implica affatto una *certa* forma generale della seconda in confronto della prima. Quale influenza hanno dunque le dipendenze più o meno strette *tra i consumi* sul problema considerato? Naturalmente occorre considerare il diverso grado di dipendenza dei consumi; ma non ci sembra che questo possa offrirci un criterio generale in materia. Consideriamo il genere di dipendenza che il Pareto indica con (α) nel C. IV, § 10, 11 del *Manuale*. L'individuo che vuol acquistare un mobilio completo per una ricca sala da pranzo (si considerano i diversi mobili quantità di uno stesso bene) evidentemente nel fare questo consumo deve tener

conto di tutte le altre sue condizioni: terrà conto del reddito disponibile, di altri gusti già soddisfatti o da soddisfare, dei bisogni di bere, mangiare, vestirsi, avere una casa, ecc.: l'ofelimità dell'ammobigliamento sontuoso di una sala da pranzo non sta a sè, ed è sommamente improbabile vi pensi nemmeno chi ha appena da sfamarsi e ricoverarsi malamente. D'altra parte — tenuto conto di queste sue altre condizioni generali — l'individuo agirà in base all'ofelimità delle diverse quantità del bene che si decide ad acquistare: difficilmente acquisterà il mobilio senza la tavola, o tavola, buffet, ecc. senza seggiole, e così via. I mobili che completano il mobilio opportuno hanno dunque un'ofelimità crescente, posto che in relazione alle sue condizioni generali ed ai suoi altri consumi, l'individuo si decide a far quello di una camera da pranzo. Rientra così nelle dipendenze del genere (β). Come già si è detto, si può scendere a particolari maggiori o minori. Possiamo (prescindendo parzialmente dalle dipendenze con altri generi di consumo) considerare i vari beni singoli con carattere cosiddetto *complementare* (nel senso più stretto) in certo modo come un bene *unico*: l'acqua e il bicchiere, tavola, seggiole, armadio della sala da pranzo, ecc. O possiamo considerare ciascun bene a sè, la tavola, una seggiola, ecc. e considerarne l'ofelimità in funzione anche di tutti gli altri singoli beni complementari. Il nostro calcolo avrà un'esattezza maggiore o minore, ma in fondo la conclusione ci sembra la stessa; nel primo caso si potranno considerare i singoli beni successive quantità di un certo bene; e la ofelimità di queste quantità si presenterà crescente fino ad un certo punto (o meglio, a *certi punti*, in relazione alle diverse condizioni generali): la linea d'indifferenza tra il bene " mobilio d'una sala da pranzo " e il numerario totale disponibile si presenta concava verso gli assi dall'inizio fino ad un certo punto corrispondente alla quantità di mobili sufficiente ed opportuna (l'individuo può apprezzare anche *una* seggiola, *un* tavolo, ecc.; per cui la linea non sarà parallela all'asse del numerario (fig. 2)). Nel secondo caso l'ofelimità elementare sarà ugualmente crescente e la curva avrà in genere la forma della fig. 3, in quanto l'ofelimità di porzioni di ciascun bene *insufficienti*, in relazione a quella *certa* combinazione di quantità richiesta dalla natura del gruppo complementare considerato, sarà nulla o quasi, e invece massima appenachè la quantità è quella necessaria. Le conclusioni partico-

lari di questo paragrafo non fanno dunque che confermare quelle del § 3.

§ 5. Vediamo brevemente le relazioni della proprietà considerata colle curve di domanda e offerta, s' intende nel senso che queste parole hanno nella teoria dell'equilibrio.

Se il consumo di ciascuna merce per ogni individuo si potesse considerare indipendente, le conseguenze di questa proprietà sulla domanda si potrebbero facilmente dedurre: è noto che se si conoscono le funzioni di ofelimità elementare e le quantità di merci possedute (originariamente) si possono determinare le funzioni di domanda (ed offerta) [vedi Nota 1ª, § 7]. La curva di domanda nella fatta ipotesi, sarebbe crescente, in corrispondenza della curva crescente di ofelimità: ogni individuo si presenta — tenuto conto delle altre sue condizioni — con domanda crescente di varie merci fino alla quantità avente ofelimità elementare massima. Se il prezzo (o rapporto di scambio dell'unità di merce col numerario) aumenta, l'individuo è disposto a dare una quantità superiore (di prima) di numerario per *quella* quantità di merce. In quest'ipotesi sarebbe lecito dire che per ogni merce esiste un tratto di domanda collettiva crescente, risultante dall'assommarsi di tutte le porzioni di domanda individuale crescente: il che si rispecchierebbe più visibilmente nella curva di domanda della materia prima (omogenea) necessaria a produrre quella merce (per es. legname nel caso di mobili, grano in quello del pane, ecc.). Il che ci fa meglio vedere come non sia completamente trascurabile la proprietà accennata, come vorrebbero Marshall, Pantaleoni, ecc.

Ma si è già detto che tale ipotesi non corrisponde alla realtà, e che ciascuna " domanda „ in ciascun individuo dipende da tutte le sue condizioni; come quindi l'ofelimità di ogni merce è in funzione degli altri consumi, la domanda d'ogni merce sarà in funzione non del suo solo prezzo, ma dei prezzi delle altre merci, delle quantità (precedentemente) disponibili, ecc., ecc. Qui il problema non è evidentemente più trattabile coll'analisi se non assumendo esempî o ipotesi più o meno limitate ed arbitrarie. È quello che nelle attuali condizioni la scienza può fare per aver maggior rigore, e ci auguriamo che qualche economista matematico sviluppi maggiormente, in base a queste brevi note, i casi trattati nei citati scritti del Ricci e del Boninsegni.

Ad ogni modo un'idea grossolana se ne può avere anche senza far uso dell'analisi. È evidente che ogni individuo nel fare la sua domanda (cioè, le sue domande) terrà conto delle proprie condizioni, e la farà dipendere dal reddito disponibile, dagli altri gusti e dai prezzi dei beni che soddisfano gli altri gusti, ecc., oltrechè dai prezzi di *quel* bene. Questo non toglie che quando le condizioni lo consentono, egli si presenti con curva di domanda di ogni bene, crescente in relazione all'ofelimità elementare crescente per una certa quantità. Questo per ogni singolo bene, come pei gruppi complementari di beni, pei quali la domanda (crescente) abbraccierà varî beni. Nei casi in cui la linea d'indifferenza ha la forma della fig. 3, in cui cioè quantità inferiori ad una certa quantità (con ofelimità elementare *massima*) hanno ofelimità uguale a zero o quasi, l'individuo tenendo conto di tutte le altre sue condizioni domanderà (o non) quella quantità e non una minore, sia pure a prezzi minori, disposto a pagare un *prezzo* proporzionatamente massimo, mentre la sua domanda sarà decrescente per le quantità ulteriori, cioè, dato che le sue condizioni ne comportino ulteriore consumo, non sarebbe per esse disposto a pagare un prezzo crescente o uguale, ma solo inferiore.

§ 6. Naturalmente, la deduzione di una domanda *collettiva* crescente, non sarà tanto semplice come nell'ipotesi dei consumi indipendenti, in quanto le cosiddette domande dipenderanno da un ben maggiore numero di condizioni. Così sarà complesso come sono complesse le condizioni e le mutue dipendenze dell'equilibrio il problema se un aumento di prezzo diminuirà o non la " domanda „ di un prodotto e di quanto.

Non basterà più dire che un aumento di prezzo di *una* merce, recherà seco un aumento dell'offerta di numerario in cambio di una *stessa* quantità della merce, per coloro che quella domandavano coordinatamente all'ofelimità crescente ch'essa aveva per loro: ma ogni individuo, dato un aumento di prezzo di una merce prima domandata e consumata nella quantità corrispondente all'ofelimità elementare massima (o superiore), naturalmente tenendo conto del fatto se quest'ofelimità è lentamente crescente per le quantità iniziali (fig. 1, Nota 1ª) o prima nulla o quasi e poi rapidamente massima (fig. 3), considererà l'alterazione che produrrebbe nell'equilibrio precedente de' suoi gusti (si supponga ferma la quantità di

numerario disponibile ed i prezzi delle altre merci da lui consumate) l'impiegare una certa quantità maggiore di numerario a soddisfare quel gusto, rinunciando ad altri. Non possiamo *a priori* dire s'egli preferirà questa od altre combinazioni di beni, se non conosciamo esattamente i suoi gusti: solo conoscendo i gusti di tutti gli individui di una società (oltrechè le altre condizioni) potremo dire che, in corrispondenza ad una serie di curve individuali di ofelimità crescente per certe merci un eventuale aumento di prezzo diminuirà (o non) la quantità consumata collettivamente. Mentre pei tratti decrescenti di ofelimità elementare, potremo generalmente dedurre curve decrescenti di domanda.

Si noti infine che la proprietà accennata rende generalmente più difficile che nel fenomeno concreto si verifichi rigorosamente la condizione dell'equilibrio dei gusti, della perfetta uguaglianza delle ofelimità elementari ponderate delle varie merci consumate: in quanto è evidente che gli individui si sforzeranno di scegliere combinazioni in cui le quantità di ogni bene giungano almeno al punto di massima ofelimità elementare. Qui si tratta di condizioni tecniche esteriori, di variazioni *finite* alle quali deve sacrificarsi il rigore dell'implicito calcolo individuale (1).

---

(1) Evidentemente questa è una serie di cause di difficoltà della perfetta uguaglianza delle ofelimità elementari ponderate nell'equilibrio *concreto*, diversa da quella indicata dal Pareto al § 79 del cap. VI del *Manuale*. Là si considera essenzialmente la ristrettezza e la poca frequenza di certi consumi, le cui ofelimità elementari ponderate quindi potranno più difficilmente avvicinarsi nella realtà all'uguaglianza, mentre per quelle merci di consumo assai frequente, generale, ecc., questa frequenza appunto dell'uso e delle valutazioni dà in certo qual modo maggiore facilità di valutare più esattamente e di farvi corrispondere le scelte. Nel caso nostro invece le difficoltà si riconnettono, diremmo, a ragioni e condizioni *tecniche* dei beni consumati. L'individuo che vuole una villa tutta per sè, un automobile, ecc., potrà scegliere una villa, due ville, ecc., o una villa di minore o maggior valore, ecc.; così per gli altri beni. E sotto questo aspetto le merci presentano una certa divisibilità. Ma intanto rimane il fatto che l'individuo deve scegliere *una* villa, *un* automobile (o niente; o più unità), appunto in corrispondenza alla forma della curva dell'ofelimità. E allora è chiaro che è più difficile si raggiunga l'uguaglianza delle ofelimità elementari ponderate delle ville, automobili, servizî da tavola per un *certo* numero di persone, gruppi di mobili, ecc., che non, per es., per una serie di bicchierini di liquore bevuti, di minestra mangiata, e di qualsiasi altro bene più o meno facilmente divisibile.

§ 7. Questi assai generici accenni bastano a giustificare il rilievo della proprietà considerata. È intuibile anche senza un'indagine accurata in proposito che per le classi numerose con redditi più bassi, la distribuzione del numerario disponibile avverrà generalmente prevalentemente in combinazioni comprendenti solo quantità con ofelimità elementare massima o di poco superiori: sarà cioè la porzione MO (fig. 3) che avrà la maggior importanza ed il maggior posto nei consumi delle classi più povere. Combinazioni di beni con quantità assai superiori ad MO ed ofelimità elementare decrescente si comprende come non si possano riscontrare che nelle classi con redditi più o meno alti.

E considerando il fenomeno concreto da un punto di vista più generale, noi possiamo approssimativamente riscontrare che ha forma analoga a quella considerata per singoli beni la curva dell'ofelimità elementare (*strumentale*) delle quantità iniziali e successive del numerario disponibile (reddito): la merce che si trasformerà in combinazioni di altre merci, viene ad avere una valutazione complessiva coordinatamente ai gusti ch'è destinata indirettamente a soddisfare. Perchè le dosi iniziali del reddito disponibile hanno un'ofelimità (strumentale) crescente fino ad *un* massimo, infinitamente variabile s'intende, si è già detto al § 10 (nota 1[a]): gli individui hanno un'approssimativa (e del resto diversissima) nozione di un minimum di beni indispensabili all'esistenza loro e della loro famiglia, ecc.: fino a questo punto almeno l'ofelimità è crescente. Gli scambi che servono a procurare il reddito disponibile si verificheranno quindi generalmente in modo da raggiungere almeno la quantità con ofelimità elementare massima. Gli operai che scambiano i loro servizî personali terranno essenzialmente conto della porzione MO del reddito totale che la vendita dei loro servizî personali procura.

Con un'ipotesi piuttosto arbitraria e discutibile, ma efficace, s'imagini una linea d'indifferenza tra il numerario disponibile ed i servizî dell'operaio che si possono considerare una merce a disposizione di esso in una certa quantità: generalmente la linea non partirà da un punto dell'asse su cui s'imagina rappresentata la merce lavoro (OL), ma solo da un punto m in quanto l'operaio non accetta una condizione in cui, qualsiasi la fatica che risparmia, il suo reddito sia inferiore ad MO: l'ofelimità di esso può crescere ancora per una piccola quantità, poi certo decresce, crescendo la

fatica, ossia diminuendo la quantità di lavoro che gli resta da scambiare; e la linea diverrà convessa avvicinandosi sempre più ad NO fino a toccarlo (1).

Pei fenomeni di risparmio avviene qualcosa di simile: si è osservato (Pareto, Edgeworth, Loria) che spesso la sua ofelimità

N
M
m
O
M'
L

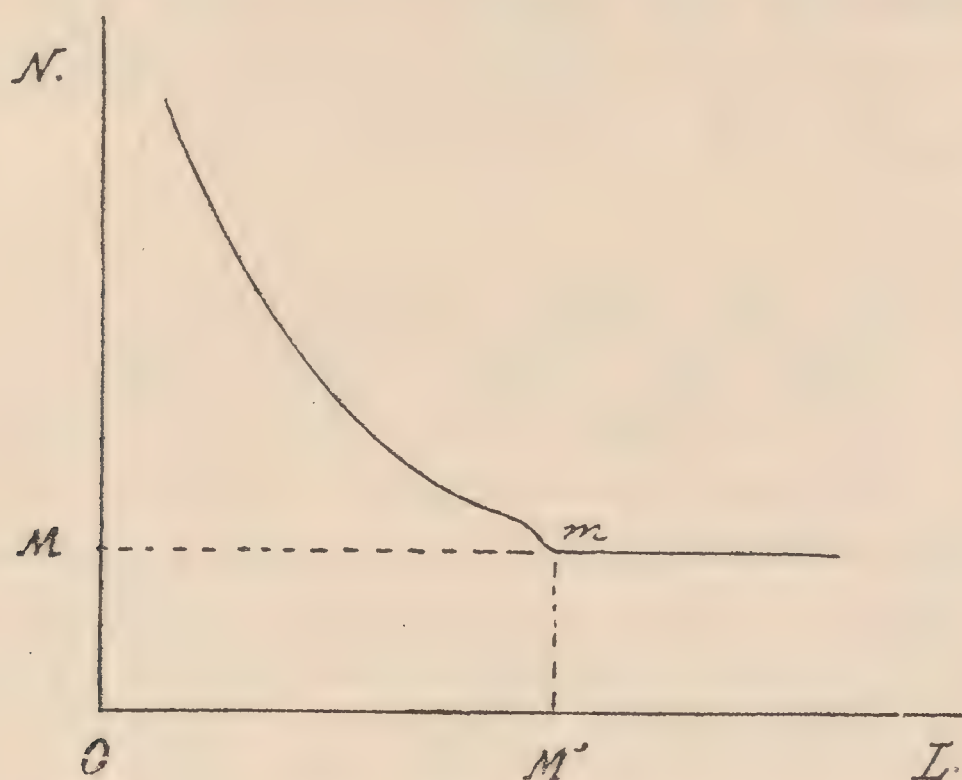



Fig. 4.

cresce per le quantità successive, almeno fino ad un certo punto. Spesso l'individuo che risparmia (se il risparmio avviene per azioni economiche logiche) avrà in mente il tratto MO del reddito disponibile nel futuro, ed il risparmio ha un'ofelimità crescente in conseguenza dell'ofelimità crescente del reddito (previsto) ch'esso procurerà nel futuro. Può essere che il tratto MO sia di un altro bene (un individuo risparmia per comperarsi una villa, fare un viaggio di piacere, pagare un debito, ecc.): la conseguenza per una certa quantità del risparmio sarà la stessa. Il che ci spiega come il ribasso del saggio dell'interesse, contemporaneo a condizioni gene-

(1) Certo che se si ammette, come il Marshall, col Bernouilli (*Princ.* cit., lib. III, c. VI, § 5) che la soddisfazione che un individuo ricava dal suo reddito, cominci qundo esso è sufficiente a sostentare strettamente la vita, si trascura il tratto MO e la forma positiva della curva della sua ofelimità: ma il procedimento è perfettamente arbitrario e se si vuol considerare come un'ipotesi, questa non è corrispondente alla realtà, perchè non si può negare che per gruppi numerosissimi di individui il reddito non superi di molto la quantità genericamente da noi indicata con MO. Se l'economia pura vuol approssimarsi quanto più è possibile alla realtà non deve troppo fermarsi ad ipotesi irreali e, sovratutto, inutili.

rali dell'equilibrio in cui il risparmio è enormemente aumentato, in alcuni individui possa accrescere la spinta al risparmio: infatti se il ribasso riduce il prodotto definitivo del risparmio al di qua della quantità OM (il minore interesse diminuisce il reddito dato dallo *stesso* " capitale ", oppure rende più lenta l'accumulazione, ecc.) l'ofelimità crescente della porzione successiva (che viene a mancare) potrà spingere (se le altre condizioni lo consentono) ad aumentare il risparmio fino a raggiungerla (1).

---

(1) Queste ultime considerazioni unite alle precedenti, servono a spiegarci il grande sviluppo della piccola previdenza e del piccolo risparmio, nelle economie dei paesi civili, durante il sec. XIX. Una delle caratteristiche maggiori dell'aumentata produzione di risparmio, è infatti l'aumento del *piccolo* e piccolissimo risparmio: evidentemente le condizioni generali dell'equilibrio (aumento della ricchezza generale, dell' impiego industriale della forza lavoro, e quindi dei salarî, aumento dei contatti, istruzione, educazione, ecc., di molti gruppi operai) sono venute a contenere per questi gruppi, non solo più importanti bisogni *futuri*, ma la possibilità di dedicarvi una porzione del loro reddito (attuale) avente, per quella sua destinazione, ofelimità crescente: è cioè cresciuto il senso dei bisogni soddisfacibili da MO, per ciò che riguarda il futuro. Tutto ciò non vuol affatto dire che tali ragioni siano le prevalenti nell'attuale grande produzione di risparmio: può essere benissimo che abbiano notevole importanza bisogni specifici; ma, come abbiam detto, in fondo l'effetto è identico. Un individuo prevede che a 60 anni non guadagnerà più nulla e vuol assicurare a sè ed alla sua famiglia un reddito di 5000 L. all'anno almeno. Se l'interesse è il 10 %, basterà accumuli per quell'epoca una somma di L. 50.000, ma se l'interesse ribassa al 5 % dovrà accumularne una di 100.000: e la necessità di produzione più intensa deriverà non solo dalla maggior somma totale da accumularsi, ma dal minor interesse dato dalle singole frazioni successivamente accumulate. Se invece l'individuo vuole solo fare una certa dote alla figlia, o lasciare una somma di danaro agli eredi, o comperarsi una casa, ecc., allora gli effetti di un ribasso del saggio sulla produzione di risparmio, riguarderanno solo il minor concorso degli interessi delle singole frazioni man mano prodotte, alla somma totale. Ma si noti che questo effetto, dirò, intensificatore, di un ribasso dell'interesse, nelle ipotesi indicate, non è affatto *necessario* ed indiscutibile. Anche qui non dobbiamo dimenticarci delle mutue relazioni generali: può essere benissimo che la maggior difficoltà per procurarsi un certo reddito futuro o una certa somma, ecc., influisca sui gusti, sul posto che questo bisogno ha tra gli altri, ecc., e l' individuo si decida a rinunciarvi, soddisfacendo dei bisogni attuali e riducendo il risparmio prodotto.

Pietro suddiacono napoletano agiografo del secolo X.

Nota 2ª del Socio FEDELE SAVIO.

In una Nota precedente (1) indicai parecchie leggende o vite di Santi, composte, o tradotte, o ritoccate da un Pietro suddiacono napoletano, che ivi dimostrai essere vissuto nel secolo X.

Il P. Delehaye bollandista in una recensione assai cortese del mio studio, avvertì doversi escludere dalle opere del suddiacono Pietro la *Passio S. Fortunatae*, essendo autore di essa un certo abate Ariperto, cui l'attribuì lo stesso Pietro (nel prologo di S. Artema) (2).

Anche riguardo all'epilogo della *Passio* di S. Catterina il dotto bollandista espresse il dubbio se realmente esso sia opera di Pietro, poichè nel codice 9810-14 della biblioteca regia di Bruxelles, ln luogo di Pietro vi è il nome di Arechi, ed i bollandisti sì nel catalogo dei codici brussellesi (3), che nel vol. I degli *Analecta Bollandiana* (4), propongono di identificare costui con un

(1) *Pietro suddiacono napoletano agiografo del secolo X*, in " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XXXVI, anno 1900-1901, pag. 665.

(2) *Analecta Bollandiana*, tom. XX (1901), pag. 328. Il Mai, che pel primo fece l'ipotesi di tale attribuzione, si deve eziandio correggere, là dove suppone, che il vescovo di Napoli Stefano, cui Ariperto dedicò detta *Passio*, fosse Stefano III, che governò quella Chiesa dall'898 al 907, mentre fu Stefano II (762-799). In effetto, Ariperto, parla di quello Stefano di Napoli, per cui opera si fece la traslazione del corpo di S. Fortunata da Patria alla chiesa eretta in suo onore in Napoli. Ora tale traslazione, come dice egli stesso, avvenne sotto l'impero di Costantino e di Irene, e sotto il pontificato di Adriano I, ossia nel periodo 772-795.

(3) *Catal. Cod. Hagiog.*, vol. II, pag. 375. Non è forse inutile osservare, come eccetto la vita di S. Teobaldo eremita di Vicenza († nel secolo XI), tutte le altre vite in numero di 71, siano vite di Sante e per lo più di vergini.

(4) Pag. 78.

fratello omonimo del celebre Paolo Diacono, stato anch'egli monaco e morto circa lo stesso tempo di Paolo, cioè verso il 799. Ci mancano gli elementi per risolvere questo dubbio. Mi sia lecito però osservare come le frasi del breve epilogo siano tanto proprie del nostro Pietro suddiacono, che, sino a forte prova contraria, non posso esimermi dal credere che siano opera di lui sì il breve epilogo, come anche probabilmente il ritocco della *Passio*, la quale forse primitivamente fu tradotta da Arechi.

Io mi spiegherei l'esistenza dei due nomi nei codici in questo modo. Arechi, alla fine della traduzione si disse con brevi parole autore della medesima, per es. così: " *Hanc passionem graeco primum eloquio scriptam a praefato Athanasio ego Arechis, fidelium fratrum devotione compulsus atque amore ipsius sanctissimae martyris, plenissime latinis auribus tradere curavi* „.

Venuta poi la *Passio* alle mani di Pietro, egli la ritoccò e forse l'accorciò e quindi nella chiusa suddetta sostituì al nome del primo traduttore il suo e dopo *martyris* così descrisse l'opera propria: " *de inepto faemine elevans, magis sensum quam verba sequens incomposita resecans et necessaria addens* „. Certo è che queste frasi contrastano coll'antecedente *plenissime latinis auribus tradere curavi*, come il *fidelium fratrum devotione compulsus* è più proprio di un monaco come Arechi, che di un membro del clero secolare qual era il suddiacono Pietro. Più tardi poi, constando al copista del codice brussellese che Arechi era stato il traduttore della vita di S. Caterina, vi ripose il nome di Arechi in luogo di Pietro (1).

Il medesimo P. Delehaye espresse pure l'opinione, che al suddiacono Pietro si dovessero attribuire alcuni versi, con cui l'anonimo traduttore d'una vita di S. Gregorio, il quale compose il suo lavoro per ordine di Atanasio vescovo di Napoli, la dedicò ad un prefetto Sergio.

I versi furono editi primieramente nel 1888 nel vol. I dello

---

(1) È notevole che in qualche cod., come per es. il cod. A. 80 (alias C) del capitolo di S. Giovanni Laterano appartenente al secolo XI, non vi è nè *Arechis* nè *Petrus*, ma *Anastasius*. È forse un errore dello scrivano, che nello scrivere ripetè senz'addarsene il nome del traduttore, che vide nella prima o seconda riga antecedente; Poncelet, *Catal. Cod. Hagiog. Rom. praeter Vaticanam*, Bruxellis, 1909, pag. 67.

Spicilegium Casinense (1), pag. 369; poi nel 1899, nei *Mon. Germ. Histor. Poetae latini,* vol. IV, pag. 442 (2).

Essendo indispensabile per quel che dirò averli sott'occhi, e d'altronde essendo pochi, li riferisco qui per intero:

> Excipe dignanter, Sergi praefecte, beati
> Gregorii vitam luculento themate comptam,
> Nathinneus ovans Petrus quam transtulit apte
> Ex Danahis scriptis, linguis reddendo latinis.
> Praesul Athanasius hoc iussit promere digne,
> Parthenopense decus, placidus qui trinus habetur,
> Ductus amore tuo germano nectare, formis (3).

Qui dunque si tratta d'una vita di S. Gregorio, che il suddiacono Pietro dedicò al prefetto Sergio, dopo averla tradotta dal greco in latino per comando del vescovo Atanasio, molto intrinseco del suddetto Sergio.

Il vescovo Atanasio era certamente Atanasio III, che il poeta chiama espressamente trino ossia terzo: *placidus qui trinus habetur*. Quindi la supposizione degli editori dello *Spicilegium Casinense* che il Sergio, cui è dedicato il carme, fosse Sergio II, duca di Napoli dall' 870 al 877, è esclusa dal sincronismo di Atanasio III, che resse la sede napoletana dal 907 al 958. Chi sarà dunque costui?

Per rendere più agevole a' miei lettori il seguirmi nella ricerca, che imprendo, dò qui l'albero genealogico dei duchi di Napoli dall'840 alla fine incirca del secolo X, estraendolo dagli

---

(1) Ivi, in fine del volume, si trova pure il facsimile del carme, eccettuati gli ultimi due versi.

(2) Ivi si dice che i versi furono editi dal Capasso nei *Monumenta ad Neapol. ducatus histor. pertin.*, vol. I, pag. 320. È un errore. In questo luogo il Capasso riporta altri versi.

(3) Il *Nathinneus* del 3° verso, come spiega lo stesso Pietro suddiacono nella vita di S. Agnello (*Monumenta Neapol. Ducatus, Chron.*, pag. 320), significa suddiacono.

L'ultima parola dell'ultimo verso fu letta e stampata *farmis*. Non esistendo in latino siffatto vocabolo, sospettai d'un errore tipografico. Mi rivolsi perciò al ch.^{mo} P. Amelli, priore di Montecassino, che ebbe la gentilezza di rivedere per me l'originale, dove in effetto trovò che il vocabolo è scritto *formis*, secondo che il contesto richiedeva.

studi accurati che intorno alla famiglia ducale fecero il Capasso (1) e lo Schipa (2).

Sergio I
figlio di Marino e di Euprasia
duca di Napoli 840-863
sposa Drosu

Gregorio I (o III) collega 850 duca 864-870	Cesario 846	S. Atanasio I vesc. di Napoli 850-872	Stefano III vesc. di Sorrento indi di Napoli 898-907

Figli di Gregorio I (o III):

Sergio II duca 870-877	Atanasio II vescovo di Napoli 875 duca 877-898	Stefano (1) sp. Eufemia

Figli di Stefano:

Gregorio prefetto	Atanasio levita (e monaco) (3)

Figlio di Sergio II:

Gregorio II (o IV)
duca 898-915

Figlio di Gregorio II:

Giovanni II
collega 898
duca 915-919

Figli di Giovanni II:

Marino I 919-928	Gregorio *loci servator* vive 939-955 sp. Anna già † 955	Maria già vedova nel 945 di Anastasio

Figli di Marino I:

Giovanni III (o V) duca 928-968 sp. Teodora senatrice romana già morta nel 951	N. N. sp. Sergio prefetto † 944-968 fratello di Atanasio III vesc. di Napoli † 958	N. N. sp. Gregorio

Discendenti:

Marino II collega 944 vivo 975 † forse 977	Pietro prefetto vivo nel 949	Marino vivo nel 944-968	Sergio vive 944-968

(Marino II figlio di Giovanni III; Pietro e Marino figli di N. N. e di Sergio prefetto; Sergio figlio di N. N. e di Gregorio.)

---

(1) Nei *Monumenta ad Neapol. Ducatus histor. pertinentia*, vol. I e II.

(2) *Il ducato di Napoli*, nell' “ Arch. Stor. Napol. „ del 1892 (vol. XVII), 1893 (vol. XVIII) e 1894 (vol. XIX).

(3) La collocazione di Stefano e dei suoi figli a questo grado non è al tutto certa. Non è esclusa la possibilità ch'egli fosse figlio di Gregorio II. Anche lo Schipa lascia la cosa in dubbio. È però certa la sua figliazione

Ad un accordo stretto il 18 luglio del 949 dal duca di Napoli Giovanni III con l'abate Giovanni del monastero di S. Severino, sottoscrivono in primo luogo il duca suddetto, poi Gregorio *lociservator* (1), zio del duca, indi Pietro, prefetto, figlio del prefetto Sergio, Gregorio prefetto, ed il notaio estensore dell'atto (2).

Nel Sergio prefetto, il cui figlio Pietro nel 949 già era in età adulta ed ornato anch'egli della medesima dignità di prefetto, credo si debba riscontrare il Sergio prefetto, a cui Pietro suddiacono dedicò i suoi versi. Egli, secondo lo Schipa (3), era cognato del duca Giovanni III. Tal parentela risulterebbe da una concessione fatta dal duca Giovanni III a nome suo ed a nome dei seguenti, cioè del duca Marino II suo figlio e collega, allora assente, di un altro Marino figlio del fu Sergio prefetto suo cognato, e di un Sergio figlio di Gregorio pure suo cognato.

Di questa concessione (4) non sappiamo la data precisa, ma essa è certamente anteriore al 968, quando morì il duca Giovanni III, e posteriore al 944, allorchè questi si associò nella dignità ducale il figlio Marino II (5). Non v'ha dubbio che Sergio

---

da un duca Gregorio per l'iscrizione sepolcrale di Eufemia sua moglie riferita dal Parascandolo, *Memorie della chiesa di Napoli*, vol. II, pag. 174 e più esattamente dal Capasso nei *Mon. Neap. Ducat.*, II, p. 2, pag. 220.

(1) Sebbene il Capasso nei *Monum. Neapol. Ducatus*, vol. I, pag. 110-111 abbia riconosciuto Gregorio *lociservator* come figlio del duca Giovanni II, ivi però gli sfuggì di citare la frase *Gregorius filius eius* nel capitolare del duca Giovanni III, mentre chiaramente vi si legge *thius eius*, sì nel testo riportato integralmente dal Capasso nel vol. II, parte 2ª, pag. 144, che nel facsimile nella tavola III del vol. I, come riconobbe il Capasso stesso nell'Errata-Corrige del vol. I, pag. 351. Ivi ancora cita come se fosse del 954 il documento con le note cronologiche dell'anno XLVII di Costantino e X di Romano, allegato già dal Pellegrini che l'attribuì al 958 o 959 e messo in dubbio dal Di Meo. Il documento è riportato in sunto dal Capasso, op. cit., vol. II, parte I, pag. 70 con la data del 2 agosto 955. In luogo di *Johannis gloriosi ducis* come lesse il Pellegrini nella carta originale, qui si trova *Johannis filii Isiori*, ed in nota il Capasso suggerisce di leggere *filii Gregorii*. Credo che si deva stare al Pellegrini, il quale vide l'originale.

(2) *Monum. Neapol. Ducatus*, vol. II, parte I, pag. 10.

(3) " Archivio stor. per le provincie Napoletane ", anno XVIII (1893), pag. 264 e 265.

(4) La concessione non esiste più, ma il suo contenuto è ricordato in un atto del 1015; *Mon. Neapol. Ducatus*, *Regesta*, pag. 219.

(5) *Mon. Neapol. Duc.*, *Cron.*, pag. 111.

prefetto già era morto allorchè avvenne questa concessione anteriore al 968. Ma è probabile ch'egli non fosse più tra i vivi neppure nel 949, allorchè, come si vede dalla convenzione stretta in quell'anno dal duca Giovanni III che ho citata qui sopra, suo figlio Pietro già compariva solo in importanti atti pubblici del duca sovrano.

I documenti quindi confermerebbero quanto risulta dal carme surriferito, che il prefetto Sergio visse contemporaneo del vescovo Atanasio III, del quale a sua volta attestano i documenti, che lo riguardano, citati dal Capasso (1), che governò dal 17 dicembre del 907 almeno fino al 960 (2). Aggiungo che dal carme sembra venir fuori una notizia sinora, per quanto so, ignorata, che il prefetto Sergio era fratello di Atanasio III. Così spiegherei le parole *germano nectare*, attribuite dal poeta ad Atanasio subito dopo aver fatto l'elogio di Sergio, quasi volesse dire, che in Atanasio v'era una dolcezza o benignità simile a quella che notavasi in Sergio suo fratello. Data tale spiegazione, si comprenderebbe meglio come il vescovo Atanasio avesse fatta comporre un'opera, tratto dall' amore verso Sergio, *ductus amore tui.*

Resterebbe perciò esclusa anche l'ipotesi, messa fuori dallo Schipa, che il vescovo Atanasio III sia quell'Atanasio levita, il quale è nominato nella lapide sepolcrale di Eufemia, come figlio di Eufemia e di Stefano e nipote del duca Gregorio, poichè se Atanasio III fu fratello del prefetto Sergio, questi era cognato del duca Giovanni III, Atanasio III avrebbe avuto solo una parentela indiretta con la famiglia ducale, mentre è certo che Atanasio figlio di Eufemia era nipote del duca Gregorio e per conseguenza nipote *ex fratre* o del duca Sergio II oppure del duca Giovanni II (3).

Piuttosto lo crederei identico a quell'*Athanasio, illustre monacho* del monastero di S. Severino, che dall'abate Giovanni verso l'anno 905 fu mandato in compagnia di Giovanni Maggiorino preposito del medesimo monastero, per ricercare a Miseno le

(1) *Mon. Neapol. Duc.*, vol. I, pag. 228.

(2) Nel 962 gli era già succeduto Niceta; ibid.

(3) Vedi qui sopra l'albero genealogico.

reliquie di San Sosio (1). A me sembra che il titolo straordinario di *illustre*, dato ad un semplice monaco, possa indicare le sue relazioni (sia pure indirette) di parentela con la famiglia sovrana della città dov'egli risiedeva.

Quanto alla vita di S. Gregorio tradotta (o ritoccata) da Pietro, il P. Delehaye la credette inedita, nè seppe di qual Gregorio potesse trattarsi.

Non mi par dubbio che il Santo, la cui vita fu rimaneggiata da Pietro, sia S. Gregorio l'illuminatore apostolo dell'Armenia. Il culto di questo Santo è a Napoli antichissimo, ed il Capasso cita un documento del 921, che attesta l'esistenza in questa città d'un monastero femminile con chiesa sotto il titolo di S. Gregorio, trasformato poi dal popolo in Lignoro. Ivi si conservano tuttora il capo ed altre reliquie del Santo, le quali vuolsi che fossero portate a Napoli da monache armene, fuggite dal loro paese in tempi di devastazioni o di persecuzioni (2). Il monastero è certamente anteriore al secolo X, essendovi memoria che una badessa di nome Gaita, vivente verso l'anno 860, indusse uno scrittore anonimo a ridurre in più elegante forma una vita latina del Santo (3).

Questa stessa vita io penso sia quella che essendo pure stata ritoccata da Pietro fu da lui dedicata al prefetto Sergio.

Se noi stiamo all'affermazione del prologo, già un altro

---

(1) Negli *Acta translationis sancti Sosii* di Giovanni diacono: " *Talibus confertim eulogiis animatus abbas ipse accersivit me Johannem sancti Januarii diaconum et Aligernum primicerium et Petrum subdiaconum, et facta nobis praeceptione iniunxit, ut cum Johanne cognomento Maiorino praeposito suo et Athanasio illustri monacho Misenum proficiscentes* " etc.; *Monum. Neap. Duc.*, tom. I, pag. 303.

(2) Il tempo della venuta a Napoli delle monache armene e delle reliquie di S. Gregorio non è noto. Il Baronio nelle note al giorno 11 giugno nel Martir. romano lo fa coincidere col tempo in cui si trasferì a Roma il corpo di S. Gregorio nazianzeno, e questo dall'Armellini, *Chiese di Roma*, 2ª ediz., pag. 334, si pone nel periodo delle persecuzioni iconoclaste. Il Capasso lo fissa anch'egli allo stesso periodo.

(3) L'età di Gaita, della quale si parla nel prologo alla vita di S. Gregorio, negli *Acta SS.* tomo VIII di settembre, pag. 402, si ricava da una nota copiata dal Papebrochio in un codice barberiniano. Vedi ivi *Comment. praevius*, n. 56. È la vita indicata nella *BHL.* col. n. 3664.

scrittore vivente al tempo della badessa Gaita (1) nell' 860 e quindi quasi un secolo prima di Pietro, avrebbe fatto questo lavoro di ritocco; ma l'osservazione che ho fatto sopra, a proposito della vita di S. Caterina, mi fa pensare che Pietro non fosse molto scrupoloso nell'attribuirsi le opere altrui, e come potè in quella sostituire il suo al nome di Arechi primo traduttore della vita, così qui potè vantarsi di aver tradotto una vita, che non solamente era già stata tradotta, ma anche ritoccata da altri.

La notizia di un'altra *Passio*, ritoccata dal nostro suddiacono, è venuta fuori negli *Analecta Bollandiana* dello scorso 1911, nel catalogo dei codici agiografici delle biblioteche di Napoli ivi pubblicato.

Nel codice VIII, B. 9 della biblioteca nazionale è riferita la *Passio* di S. Canio, vescovo e martire africano, patrono di Acerenza, dopo la quale si leggono i seguenti versi:

> Stephane magne pater praesago nomine dictus —
> nam coronandus eris diademate sancto polorum
> attice quod Stephanus resonat graecaque loquela —
> sume quod ad laudem iussisti premere Cristi
> valde tibi nexo caeleste nectare Petro,
> praesule sub Petro degenti patre benigno,
> Parthenopense decus potenti luce sophiae;
> scilicet almificam palmam sacrumque trophaeum
> martyris egregii Canionis praesulis atque;
> quem pro lege Dei pugnando victor effectus
> regna poli penetrans ad Christi gaudia venit.
> Namque diu tecta tenebroso tegmine verbi
> nec (l)egebatur enim populis nec luce(m) (a)gebat
> sedibus insignis ubi sancti corpus habetur,
> sed manibus nostris dum venit, sancte Magister.

Il carme termina tronco così. Probabilmente non mancano che uno o due versi, nei quali l'autore finiva dicendo di aver corretto ciò che stava *tenebroso sub tegmine verbi*. Rimane però

(1) " *Hoc mecum considerans et super talenta ad duplicandum credita pertimescens, passionem S. Gregorii Armeniensis, quae olim satis inconsulto et rusticano stylo fuerat exarata, tum ipsius Sancti* (amore), *tum precibus et suggestione Domine Gaytae venerabilis abbatissae, quae intra Parthenopensem urbem monasterium puellarum Dei suo nomini dedicatum religiose et sapientissime regit, verbis ornatioribus aggredior decorare* „; *Acta SS.*, l. c., pag. 403.

tanto del carme da scorgere subito in esso le frasi e la maniera del nostro Pietro suddiacono, suddito del vescovo Pietro napoletano e valde *nexus caeleste nectare* al vescovo Stefano, probabilmente lo stesso vescovo di Pozzuoli, a cui dedicò la vita di S. Artema.

Oltre alle leggende fin qui enumerate, congetturo che si deva pure attribuire al suddiacono Pietro quel compendio della Passione dei SS. Faustino e Giovita, che fu pubblicato dai Bollandisti sotto il dì 15 febbraio (1) traendolo da un codice napoletano e che incomincia: *Dum crebra sanctorum Martyrum acta revolvimus.*

Come si può vedere dal confronto del medesimo compendio con la Passione integrale e primitiva, pubblicata da me nel tomo XV (1896) degli *Analecta Bollandiana*, il compendiatore omise a bello studio una parte notabile di questa, per es. tutto ciò che riguarda i SS. Secondo, Marziano (2), Bonifacio e compagni. Tralasciò inoltre molti episodi, che troppo apertamente sapevano del favoloso, quali i discorsi fatti da tigri, onagri e simili, ed abbreviò e restrinse in poche parole tutta la parte riguardante S. Afra, S. Calocero e S. Calimero.

Ma le parti ch'egli credette di ritenere, quelle cioè che più direttamente riguardavano i SS. Faustino e Giovita, le seguì e compendiò fedelmente, nulla aggiungendovi di suo, all'infuori del prologo, che è tutto di sua fattura, e forse quattro o cinque periodi, nei quali più diffusamente e più liberamente parafrasò il pensiero dell'autore primitivo.

In questi periodi è dove si scorge evidente quella tendenza al poetare, che ho già indicata come caratteristica del suddiacono Pietro (3). I passi suddetti avevano già richiamata la mia

(1) *Acta SS.*, tomo III febbraio, pag. 813; *BHL.*

(2) Così è interamente omessa la *Pars Quarta* e la *Pars Quinta*, da pag. 81 a 99 del tomo XV, *Analecta Bollandiana.*

(3) Basti citare i due passaggi seguenti: " Cum autem navigassent biduo, iam lucescente die tertia, requiescentibus navibus, coeperunt universa genera musicorum clangoribus resonare. Tunc quoque tuba rauca *altoque reboans voce,* fistula etiam cum citharis *clamantibus aethera pulsant*; sambuca vero salpicibus *respondens musica crebris*, ut flexis genibus sancti Dei martyres simulacris tyranni *ponerent thura* „ *Acta SS.*, pag. 816, n. 19; " Positis genibus orationem fuderunt, Domino gratias referentes, moxque gladio

attenzione fin dal 1896, allorchè pubblicai ed esaminai criticamente la Passione primitiva.

Allora io supposi che quei versi o emistichi potessero essere i resti o frantumi di un componimento poetico fatto forse da qualche scrittore bresciano (1). Ma ora, come dissi, propendo a crederli opera del suddiacono Pietro, che nel compendiare la Passione dei SS. Faustino e Giovita non seppe comprimere la naturale sua inclinazione a verseggiare.

Questo tuttavia, sebbene il più forte, non è l'unico argomento per supporre che il suddiacono Pietro sia autore del suddetto compendio. V'è pure il fatto, che il manoscritto, da cui i Bollandisti trassero la loro recensione, veniva da Napoli. V' è inoltre l' indizio del tempo in cui il detto compendio fu composto, che è dopo il periodo 759-820, nel quale fu composta la Passione primitiva, e prima del 1000, poichè esso si trova nel codice 5571 della Biblioteca nazionale di Parigi, appartenente al secolo X ed XI. Ivi sonvi fogli di due tempi, ma quelli che contengono il compendio suddetto appartengono, a giudizio del ch. conte Cipolla, che li esaminò, alla fine del secolo X o ai principii del XI (2).

Affinchè non faccia meraviglia che ad un agiografo napoletano venisse in mente di compendiare la Passione di due Santi bresciani, è d'uopo ricordare ch'essi erano molto venerati a Montecassino, dove ne aveva recato il culto e delle reliquie il bresciano Petronace che sui principii del secolo VIII fu il ricostruttore ed il secondo fondatore di quell'insigne abazia.

L'agiografo Pietro potè anche essere indotto a compendiare la loro Passione dal fatto, che, secondo questa, i due Santi bresciani erano stati a Napoli, e vi avevano operati miracoli e conversioni.

---

plexi, sacris amputatis capitibus, mortis pro Domino debitum reddiderunt, sanctas quoque *reddentes animas astris*, corpora vero terris *de terrae corpore sumpta*; *purpureo namque suo sanguine passum* Christum Dominum venerantes gloriosi effecti martyres quintodecimo kalendarum Martiorum *angelicis provecti manibus Domino sunt in gloria suscepti aeterna* „ Ibid., pagina 817, n. 22.

(1) *Analecta Bollandiana*, XV, pag. 17.

(2) *Analecta Bollandiana*, XV, pag. 20 in nota.

Aggiungo che il compendio ebbe subito grande favore, come ne è prova il fatto che lo si incontra in quasi tutti i codici agiografici più antichi, cominciando dal suddetto codice parigino 5571, che è il più antico di tutti. Esso soppiantò la Passione primitiva, lunghissima e piena di episodi troppo inverosimili, di guisa che, questa rimase come dimenticata ed ignorata fino alla pubblicazione, ch'io ne feci nel 1896.

Togliendo pertanto dall'elenco dei Santi, le cui leggende furono tradotte, o composte, o ritoccate da Pietro, il nome di S. Fortunata, lasciando in dubbio quello di S. Caterina, ed aggiungendovi i nomi dei SS. Faustino e Giovita, l'elenco di detti Santi, che io diedi alla fine della mia 1ª Nota su Pietro, dovrebbe essere modificato in questa maniera: *Agnello — Agrippino — Artema — Canio — Caterina* (?) — *Ciro e Giovanni — Coronati* (*SS. Quattro*) — *Cristoforo — Faustino e Giovita — Giorgio — Giuliana — Gregorio d'Armenia — Massimo — Quirico e Giulitta.*

Contributi alla storia dell'impero seleucidico.

Nota del Socio GAETANO DE SANCTIS.

III.

La guerra laodicea e la guerra fraterna.

Della guerra che seguì tra Seleuco e Tolemeo e delle sue relazioni con la guerra fraterna tra Seleuco e Antioco Ierace s'è discusso senza fine. Indicazioni bibliografiche in tal proposito si trovano raccolte, ad es., presso il Beloch *Gr. G.* III 2, 451 e presso il Wilcken l. c. In Italia si sono occupati della controversia con acume e con dottrina G. Cardinali *Della terza guerra siriaca e della guerra fraterna* in “ Riv. di filol. classica „ XXXI (1903) p. 431 segg. e *Ancora intorno alla terza guerra siriaca* in “ Riv. di storia antica „ X (1906) p. 501 segg. e G. Corradi *Note sulla guerra tra Tolemeo Evergete e Seleuco Callinico* negli “ Atti „ di questa R. Accademia XL (1904-5) p. 805 segg. I

lavori del Cardinali e del Corradi s' integrano e si correggono a vicenda. È merito del Corradi l'aver messo bene in luce che la anteriorità della ribellione d'Antioco alla fine della terza guerra di Siria, esplicitamente affermata da Eusebio, è implicitamente confermata da Giustino e che è arbitrario correggere la data eusebiana dell'assedio d'Ortosia e Damasco e, più, di questa correzione servirsi per ordinare e intendere i fatti. È merito del Cardinali soprattutto d'aver chiarito il significato preciso del testo capitale d'Eusebio; ed è assai scusabile se, dando di quei fatti una delle ricostruzioni nel tutt'insieme più organiche e felici, il Cardinali s'è lasciato qua e là indurre ad una vivacità nel respingere le ipotesi altrui e ad una recisione nell'affermare le proprie che è in contrasto con lo stato frammentario delle fonti e con le rettifiche dai nuovi documenti suggerite a tutte le ricostruzioni moderne e a quella stessa, tra le altre, ch'egli ha proposto (dove, ad es., non potè valersi che della prima edizione del papiro di Gurob nella " Riv. di Fil. „ a p. 433 segg.).

Lo scrittore che sulla guerra fraterna dà maggior copia di notizie, Eusebio (*Chron.* I 252), dopo aver accennato a due battaglie tra Seleuco ed Antioco, prosegue in questi termini: *quae vero apud Damaskum et Orthosiam obsessio fiebat, finem* (*accipiebat*) *centesimae tricesimae quartae olompiadis anno tertio* (242/1) *cum Seleukus eo descendisset* (1); e, detto quindi della liberazione di Damasco, narra la fine della guerra fraterna. Dunque, se si presta fede al *Cronico* eusebiano, la guerra fraterna fu contemporanea alla guerra tra Seleuco e Tolemeo. Ma in Giustino invece lo scoppio della guerra fraterna è rappresentato come posteriore alla guerra con l'Evergete. Ora *a priori* tra le due relazioni, dato che irreconciliabilmente si contraddicessero, non è ben chiaro quale delle due dovrebbe scegliersi. E argomenti come quelli che pur si sono addotti: " in un momento in cui la posizione degli Egiziani era ancora tanto forte, in cui il pericolo del nemico esterno incalzava, in cui la salute di tutta la casa Seleucidica sembrava poter dipendere dalle mani di Tolemeo, come è possibile credere che i membri della

---

(1) Cfr. anche la traduzione tedesca del Karst *Die Chronik des Eusebius* (Leipzig 1911) nella collezione dei *Griech. Christl. Schriftsteller* vol. XX p. 118.

famiglia reale pensassero a muoversi una vera e propria guerra formidabile? „; argomenti come questi non avvalorano davvero la versione di Giustino, perchè è notorio che lotte intestine o dinastiche scoppiano sovente proprio nel momento in cui allo Stato o alla dinastia gioverebbe la più stretta e fida concordia. E alla domanda che pur si è fatta: " e perchè Tolemeo non ne avrebbe approfittato? „ è lecito rispondere con due altre domande: chi assicura, nella scarsezza delle notizie pervenuteci, che Tolemeo non ne abbia in qualche modo, per terra o per mare, approfittato? e se non ne approfittò chi dice che non sia stato per la ragione stessa per cui secondo le nostre fonti tornò addietro dall'Asia superiore: perchè, cioè, le condizioni dell'Egitto non gli permisero di andare innanzi? Nè bisogna dimenticare che appunto in quegli anni si combatteva nell'Egeo tra la Macedonia e l'Egitto una guerra intorno a cui siamo pur troppo assai scarsamente informati.

Lasciate quindi da parte argomentazioni così vaghe, convien sottoporre ad una più accurata disamina il racconto di Giustino. Giustino narra come Seleuco, dopo che Tolemeo, fatta la sua spedizione vittoriosa, si ritrasse nell'Egitto, mosse ad assalirlo, ma poi *victus proelio.... Antiochiam confugit.* E di là *ad Antiochum fratrem litteras facit quibus auxilium eius implorat oblata ei Asia intra finem Tauri montis in praemium latae opis.* Ora non c'è qui artifizio d'interprete che tenga: se Antioco, il fratello giovanetto di Seleuco, aveva raggiunto tale potenza che questi solo dal suo aiuto sperava salute e se, per indurlo a compiere il suo dovere di fratello e di suddito, ebbe a promettergli la metà del regno, il presupposto evidente è che aveva acquistato una potenza e dimostrato un'ambizione di dominio quali assai male si spiegano senza ribellione. E ammettere, come qualche critico fa, che vi fu ribellione, ma negare la guerra aperta e dichiarata, parmi non altro che giocare di sottigliezze. In altri termini il racconto di Giustino, sebbene inesatto, implica la veracità del racconto d'Eusebio. Segue, è vero, presso Giustino: *Antiochus autem, cum esset annos XIV natus supra aetatem regni avidus occasionem non tam pio animo quam offerebatur adripuit, sed latronis more fratri totum eripere cupiens puer sceleratam virilemque sumit audaciam.* Ma, si badi, segue ancora: *interea Ptolomeus cum Antiochum in auxilium Seleuco venire cognovisset ne cum duobus*

uno tempore dimicaret.... pacem facit. Ossia in fatto Antioco si comportò non *latronis more,* ma da fido amico, perchè dalla sua venuta Tolemeo fu costretto a cedere: e dopo la pace non assalì, o almeno nè Giustino nè altra fonte dice che assalisse Seleuco a mezzogiorno del Tauro; ma al contrario, assalito da Seleuco, lo affrontò e lo vinse in una battaglia di cui Giustino non dice il luogo, ma dice il sommario di Trogo che fu combattuta nell'Asia Minore, ad Ancira. Convien quindi ristabilire nel racconto di Giustino quella logica la quale, nella forma che esso ha, gli manca. A tal uopo basta supporre che la frase *Antiochus autem* con ciò che segue riassuma alterandola, come sovente accade per l'appunto al compilatore nel riassumere con l'usata negligenza, una breve digressione dove si spiegava perchè Seleuco ebbe a rivolgersi supplichevole al fratello. Digressione ove era detto assai probabilmente come questi (prima, deve intendersi, d'allora) aveva profittato delle distrette in cui Seleuco era ridotto da Tolemeo per ribellarglisi stringendo con Tolemeo accordi e assumendo nell'Asia Minore autorità di re. In tale stato di cose la recisa asserzione del Beloch (*Gr. G.* III 2 452) " non esservi il più piccolo dubbio che la guerra fraterna scoppiò dopo la pace con Tolemeo, proprio come riferisce Giustino „ lascia perplessi; chè le asserzioni recise in materia così controversa sono assai pericolose, specie quando sono fondate su testimonianze intrinsecamente inconsistenti di compilatori in cui le inesattezze abbondano.

Ed è anche chiaro che niuna ragione di qualche conto saprebbesi invocare contro la congettura, di recente con tanta acerbità biasimata, del Niebuhr (*Kleine Schriften* I p. 179 segg.) che identificava Antioco Ierace con l'*amicus Antiochus* a cui, secondo S. Girolamo, Tolemeo, ritirandosi nell'Egitto dopo la grande spedizione, aveva lasciato il governo della Cilicia; congettura la quale ci additerebbe la occasione precisa della ribellione del giovane principe. Perchè, morti Berenice e il figliuolo, era ben naturale che Tolemeo cercasse un altro pretendente da contrapporre a Seleuco; nè poteva trovar di meglio che l'ambizioso e malfido fratello di lui Antioco, figlio bensì anche questi della odiata Laodice, ma innocente, pare, dell'assassinio di Berenice. E l'età giovanile d'Antioco può essere invocata contro quella ipotesi solo da chi non tenga presente la storia delle dinastie

ellenistiche: la giovinezza ad esempio di Tolemeo Evergete II quando fu innalzato al trono contro il fratello Tolemeo Filometore; o quella di Tolemeo XIV, quando a 13 anni, cacciata la sorella, volle regnare da solo. Con la sua naturale perspicacia, Polibio (IV 24) indica in un caso analogo il modo di risolvere difficoltà siffatte, quando, menzionata una opinione di Filippo V giovanetto, corregge in questi termini il proprio racconto: *εἰ χρὴ τοῦ βασιλέως λέγειν τὰς τότε γνώμας· οὐ γὰρ εἰκὸς ἑπτακαιδεκαέτη παῖδα περὶ τηλικούτων δύνασθαι πραγμάτων διευκρινεῖν. ἀλλ' ἡμῖν μὲν καθήκει τοῖς γράφουσι τὰς κυρούσας τὰ διαβούλια γνώμας ἀνατιθέναι τοῖς προεστῶσι τῶν ὅλων· τοὺς μέντοι γ' ἀκούοντας αὐτοὺς χρὴ συνυπονοεῖν διότι τῶν συνόντων καὶ μάλιστα τῶν παρακειμένων εἰκός ἐστιν εἶναι τὰς τοιαύτας ὑποθέσεις καὶ διαλήψεις.* Ben s'intende che, sebbene acuta, la congettura del Niebuhr rimane sempre una semplice congettura, anche rimossa la difficoltà dalle considerazioni fatte sopra e dall'aver reso probabile che l'inciso di Giustino *Antiochus autem, cum esset annos XIV natus*, compresa l'indicazione della età, posticipi una notizia che va riferita ai primi anni della guerra tra Seleuco e Tolemeo. Infatti è sempre possibile proporre, come è stata proposta, qualche altra identificazione dell'*amicus Antiochus*; benchè, a mio avviso, nessun'altra congettura possa spiegare così bene come quella del Niebuhr l'epiteto dato al personaggio da S. Girolamo.

Ma v'è un altro particolare del passo d'Eusebio sopra riassunto che s'è messo in dubbio: la data della liberazione d'Ortosia e di Damasco (242/1). Ed è vero che le date fornite dal solo Eusebio non sono mai sicure e perchè erra talora Eusebio e perchè errano più spesso gli amanuensi. Ma, in mancanza di notizie più precise, non è prudente indursi per vaghi dubbi a sostituirvene altre. Può certo trovare taluno che questi anni 246-241 furono assai ricchi d'avvenimenti; ma altri potrà osservare che per l'appunto le grandi crisi si risolvono con grande celerità. Quante e quali vicende ad esempio negli otto anni che corsero dal passaggio del Rubicone alla battaglia di Filippi! Senonchè in quei sei anni di guerra bisogna pure trovar posto ad un periodo di pace tra Tolemeo e Seleuco. Tolemeo infatti, spaventato dagli apparecchi dei due fratelli riuniti, come dice Giustino, *in annos X cum Seleuco pacem facit*; e questa pace

deve collocarsi prima dell'assedio di Ortosia e di Damasco; perchè è anteriore, sempre secondo Giustino, alla battaglia di Ancira, che è, secondo Eusebio, anteriore a quell'assedio; quando non si voglia ammettere, presso Eusebio o presso Giustino, una trasposizione degli avvenimenti che, a questo punto, nulla giustificherebbe. Ma quella pace, se vera pace fu, fu di brevissima durata; perchè mentre ardeva la guerra fraterna nell'Asia Minore, prima della battaglia di Ancira, Seleuco, vittorioso di Antioco in Lidia, dovette tentare d'impadronirsi d'Efeso, presidiata dai Tolemaici. Questo almeno sembra doversi ricavare dalle parole d'Eusebio: *in Lydiorum terra Seleukus vicit (vincebat), sed neque Sardes neque Ephesum cepit. Ptlomaeus enim urbem tenebat* (1). Del resto già il Beloch aveva osservato che paci per un numero determinato di anni, comuni nel V secolo, son senza esempio nell'età ellenistica, e che però Giustino ha qui probabilmente frainteso la sua fonte, dove poteva essere ad esempio che la pace fu stretta dopo dieci anni di guerra. Ipotesi quest'ultima non felice, perchè il testo d'Eutropio (III 1) da cui, facendone persino " il caposaldo per stabilire la cronologia di questo periodo „ (Cardinali " Riv. di fil. „ p. 440 n. 3), si vorrebbe trarre che la guerra ebbe termine dopo dieci anni ossia nel 237, dimostra soltanto, come ha assodato il Corradi (mem. cit. p. 820 seg.) e del resto ha riconosciuto l'autore stesso di quella congettura, il Beloch (*Gr. G.* III 2 p. 453 n. 1), che si chiuse fra il 241 e il 237 (2). E ad ogni modo, essendo la pace di cui fa cenno Giustino anteriore alla battaglia di Ancira e questa anteriore secondo Eusebio al 242/1, la congettura sul testo di Giustino non può difendersi se non introducendo un'altra congettura, per nulla giustificata, nel testo d'Eusebio. Ma chi

---

(1) Più sopra è detto: *adiutorem enim et suppetias (Antiochus) Alexandria etiam habebat qui Sardianorum urbem tenebat, qui et frater matris eius Laodikae erat*, dove tutti intendono col Niebuhr Alessandro. Il nuovo editore, il Karst, p. 260 nota: " ich möchte mich für die Lesung ' vom Alexandriner ' dh. vom Könige von Alexandria entscheiden „. Questa scelta non ha bisogno di confutazione: perchè si tratta non soltanto di supporre una confusione della madre Laodice con la matrigna Berenice, il che già non sarebbe poco, ma di Sardi con altre città, perchè è assurdo che Sardi fosse dei Tolemaici.

(2) Perciò non potrei accordarmi con A. J. Reinach " R. des ét. gr. „ XXIV p. 403.

ritenga che Giustino è qui incorso in errore e che conviene, questo errore, spiegare e correggere, potrà ad esempio supporre che Giustino abbia scambiato una tregua *in decem menses* con una pace *in decem annos*: ipotesi avvalorata dalla brevità effettiva della sospensione d'armi tra Seleuco e Tolemeo.

Senonchè contro la data d'Eusebio allegano quella della fondazione di Callinico nella Mesopotamia, che il *Chronicon Paschale* registra sotto i consoli del 242 (I p. 330 ed. Bonn: *Σέλευκος Καλλίνικος ἐν Μεσοποταμίᾳ Καλλίνικον πόλιν κτίζει*). " È impossibile (s'è detto) distaccare questa fondazione dalla spedizione di Seleuco contro Tolemeo „. È impossibile, s'intende, distaccarla dal ricupero della Mesopotamia, nel senso che altrimenti non sarebbe avvenuta. Ma in territorio conquistato o ricuperato colonie si fondano talora subito dopo la conquista, talora più tardi; e le ragioni del prima o del poi non si sanno se non quando sulla deduzione della colonia è tramandato qualcosa più della nuda notizia. S'intende del resto che la frase *Σέλευκος κτίζει* non implica neppure la presenza colà di Seleuco nell'atto della fondazione; sicchè questo dato del *Chronicon Paschale* fornisce soltanto un *terminus post quem non* pel ricupero della Mesopotamia per parte dei Seleucidi (1).

Non rimane che a ordinare cronologicamente e cercar d'intendere politicamente i dati delle fonti movendo dalle premesse fatte. La grande spedizione vittoriosa di Tolemeo Evergete nell'Asia fu molto rapida (cf. Catull. 66, 35); ed egli tornò in Egitto forse già sul fine del 246 o sul principio del 245, richiamato, pare, da turbolenze intestine, lasciando come governatore nelle regioni oltre l'Eufrate Santippo, forse il vincitore di Regolo, e affidando, pel momento, la Cilicia ad Antioco, che era forse il fratello minore di Seleuco, messo innanzi come nuovo pretendente al trono di Siria. Questo fratello a ogni modo, insediato o no in Cilicia da Tolemeo, insorse (245?) contro Seleuco col favore dello zio Alessandro, il governatore di Sardi, e cercò di tagliarsi un dominio indipendente nell'Asia Minore,

(1) Non è male notare che il Beloch, assegnando la fondazione di Callinico al 243 (*Gr. G.* III 2 p. 458), la " distacca „ egualmente dalla data che le assegna il *Chronicon Paschale* (242) e da quella che assegna egli stesso alla spedizione di Seleuco in Mesopotamia (244).

mentre Seleuco tentava con varia fortuna di ricuperare ciò che aveva perduto per la spedizione di Tolemeo e per le ribellioni. Poco fortunato per mare, dove una sua armata naufragò sorpresa da una tempesta (244?), Seleuco, per quanto può giudicarsi dal racconto oscuro e confuso di Giustino, ricuperò tuttavia del terreno anche nell'Asia Minore, dove peraltro è incerto se si recasse personalmente (1). Più avventurato nel rimanente dell'Asia, dopo varî successi felici, osò persino muovere contro i possedimenti tolemaici della Celesiria. Qui, peraltro, battuto di nuovo, ripiegò su Antiochia che, non mai caduta, pare, in mano degli Egiziani, è da ritenersi fosse in tutta questa guerra la sua base d'operazione; e domandò aiuto al fratello Antioco promettendo di riconoscerne il dominio nell'Asia Minore. Antioco, il quale voleva sì un dominio autonomo per sè, ma non aveva certo ragione di desiderare che Tolemeo si sostituisse al fratello nella Siria, accettò di buon grado; e l'Evergete, sebbene vittorioso, anzichè correre il rischio di scontrarsi con gli eserciti riuniti dei due fratelli, concluse un armistizio (243?). Dell'armistizio si giovò Seleuco per assalire nell'Asia Minore Antioco (242?). Vincitore in una prima battaglia, che non gli fruttò nè il ricupero di Sardi tenuta da Antioco nè quello d' Efeso presidiata da Tolemeo, fu poi sconfitto terribilmente Seleuco ad Ancira dai Galli alleati col suo rivale. E riparò nella Siria, senza più ripassare per molti anni il Tauro, lasciando così per sua parte incontrastato al ribelle il predominio dell'Asia Minore. La ripresa delle ostilità tra i fratelli aveva dato occasione a Tolemeo, spirato o no il termine dell'armistizio, di rinnovare anche lui le offese; e fors'anche gliene aveva dato motivo Seleuco, provocandolo con l'assalire Efeso dopo la sua vittoria nella Lidia. A ogni modo l'Evergete ora, sia di persona, sia per mezzo de' suoi duci, invase per la seconda volta il territorio seleucidico, assediando Ortosia e Damasco. Ma Seleuco, scampato alla rotta d'Ancira e riordinate ad Antiochia le sue forze, liberò le due città dall'assedio, con le armi o per via di negoziati (241).

---

(1) Qui l'ordine dei fatti è del resto incertissimo. Può darsi che il parziale ricupero delle città marittime per opera di Seleuco sia del 245 e la ribellione di Sardi del 244. La scelta (che per ora io non faccio) tra le due cronologie, può dipendere dall'opinione che si ha circa l'andamento della guerra fra l'Egitto e la Macedonia.

Allora o poco di poi (241-237), *finito Punico bello* (Eutropio l. c.), i Romani mandarono ambasciatori a Tolemeo offrendogli soccorsi; ma egli non accettò: *iam enim* (dice Eutropio) *pugna fuerat transacta*. Si era cioè conclusa fra Tolemeo e Seleuco una pace che lasciava a Tolemeo Efeso, Soli con altri luoghi di Cilicia, Seleucia di Pieria e la Celesiria. Concessioni gravissime giustificate dall'assoluta necessità che aveva Seleuco della pace per rassodare la sua autorità profondamente scossa nel rimanente dell'impero (1).

***

Non sarà inutile a modo di chiusa un cenno su alcune epigrafi con cui, a torto o a diritto, s'è cercato di colmare le lacune della tradizione sulla guerra siriaca. L'una è il decreto di Telmesso in onore di Tolemeo figlio di Lisimaco, che è datato dal mese Dystros del settimo anno dell'Evergete, il febbraio 240 (*OGI.* I 55, cfr. Holleaux " BCH. „ XXVIII 1904 p. 408 segg.). In questo decreto si dice che il figlio di Lisimaco, ricevuta da re Tolemeo la città ridotta dalle guerre in cattive condizioni (*παραλαβὼν τὴν πόλιν παρὰ βασιλέ[ως Πτ]ολεμαίου τοῦ Πτολεμαίου κακῶς [διακει]μένην διὰ τοὺς πολέμους*), vedendo i cittadini a mal partito (*ἐν πᾶσιν [θλιβο]μένους*), li esentò da varie imposte e d'altre alleggerì il carico. Quando questo decreto fu promulgato, secondo il Beloch " war offenbar schon seit einiger Zeit Frieden „. Tutto ciò che precede mostra che non v'è per me alcuna difficoltà a collocare circa il 241/0 la pace che chiuse il *λαοδίκειος πόλεμος*; la pace, voglio dire de-

(1) Mi sono astenuto nelle linee che precedono dall'entrare in maggiori particolari sulla guerra marittima, sulla parte che v'ebbero Antigono Gonata e Rodi, e sulle relazioni tra la terza guerra di Siria e gli avvenimenti contemporanei della penisola greca. Intendo di destinare all'argomento un'ampia trattazione speciale di cui è degno. Mi basti per ora rimandare a quanto ne scrissi brevemente nelle mie *Questioni politiche e riforme sociali* in " Riv. internaz. di scienze sociali „ fasc. XIII-XIV (Roma 1894) e nella nota su *Alessandro figlio di Cratero* in " Klio „ IX (1909) p. 1 segg. Ai concetti esposti in quei due articoli, specie sulla battaglia d'Andro e sulla ribellione d'Alessandro, rimango sempre fedele; e solo dubito ora di ciò che, seguendo il Beloch, scrissi (*Questioni*, a p. 20 dell'estratto) sulla durata decennale della terza guerra siriaca.

finitiva, tra Seleuco e Tolemeo, non l'armistizio di cui fa cenno Giustino, che fu tosto seguìto da una ripresa delle ostilità; anzi fra i due termini cronologici (241-237) entro cui può fissarsi con sicurezza la conclusione di questa pace, io inclinerei ad avvicinarla il più possibile al primo: su di che avrò forse occasione di tornare altrove. Ma è, a mio avviso, evidente che dalla iscrizione di Telmesso non si trae nulla in tal proposito. Riduzione d'imposte in paese di conquista si spiega assai bene anche durante la guerra se dalla guerra i nuovi sudditi hanno avuto troppo a soffrire e se giova ricorrere a questo mezzo per assicurarsene la fedeltà. Del resto l'iscrizione stessa prova che non si vive a Telmesso in condizione troppo tranquilla quando prevede il caso che l'arconte sia impedito dalla guerra (*διὰ πόλεμον εἴργηται*) di compiere un sacrificio che gli è prescritto.

Qualcosa di simile va detto a proposito del rescritto regio sull'asilia di Smirne. Dalla grande epigrafe smirnea *OGI.* I 229 sappiamo che Smirne rimase fedele tra molti e gravi pericoli al re Seleuco quando egli passò nella Seleucide: *καθ' ὃν καιρὸν ὁ βασιλεὺς Σέλευκος ὑπερέβαλεν εἰς τὴν Σελευκίδα πολλῶν καὶ μεγάλων κινδύνων περιστάντων τὴμ πόλιν ἡμῶν καὶ τὴν χώραν διεφύλαξεν ὁ δῆμος τὴμ πρὸς αὐτὸν εὔνοιάν τε καὶ φιλίαν, οὐ καταπλαγεὶς τὴν τῶν ἐναντίων ἔφοδον οὐδὲ φροντίσας τῆς τῶν ὑπαρχόντων ἀπωλείας*; e perciò il re confermò agli Smirnei l'autonomia e la democrazia e inviò lettere ai dinasti e alle repubbliche amiche perchè riconoscessero alla città ed al tempio d'Afrodite Stratonicide il diritto d'asilo. La data del rescritto regio sull'asilia può desumersi da una iscrizione delfica (*OGI.* I 228), dove si loda il re per quelle concessioni e si ingiunge ai teori delle Pizie di recargli le lodi dei Delfi (*τοῖς θεωροῖς τοῖς τὰ Πύθια ἐπαγγελλόντοις*). Ora poichè giusta il decreto sopracitato Seleuco premiò Smirne per la sua fedeltà non molto dopo esser passato (per la prima volta) dall'Asia Minore nella Siria, è evidente che le Pizie di cui qui si parla son quelle del 242, e che il rescritto di Seleuco è stato comunicato ai Delfi non prima del 243 e quindi non è esso stesso nè molto anteriore nè molto posteriore al 244. Quando Seleuco decretò l'autonomia e l'asilia di Smirne, egli, si è detto (Beloch III 2, 458), era già tornato nel sicuro possesso del suo regno: chè altrimenti non avrebbe avuto il tempo di occuparsi di una faccenda relativa-

mente di sì poco conto e soprattutto non avrebbe trovato ascolto da altri Stati nel suo appello a favore degli Smirnei. In realtà se Napoleone a Mosca, tre giorni prima d'iniziare la fatale ritirata, trovò il tempo di firmare un regolamento in cento articoli pel Théâtre français di Parigi, Seleuco poteva ben trovarne nella sua capitale Antiochia, anche tra il fragore delle armi, per assicurarsi mercè concessioni e privilegi il favore d'una città dell'importanza di Smirne; e l'esser egli in guerra con l'Egitto era una ragione di più perchè accogliessero il suo appello i Macedoni e quelli tra i Greci che si tenevano in buone relazioni con Antigono Gonata.

C'è appena bisogno di aggiungere che il silenzio della iscrizione smirnea e della delfica intorno ad Antioco non prova punto che la ribellione non fosse avvenuta; altrimenti, poichè esse tacciono anche di Tolemeo Evergete, proverebbero altresì che non era avvenuto neppure il *λαοδίκειος πόλεμος*. V'è bisogno piuttosto di rettificare un grave equivoco in cui sono incorsi nel commentare il decreto delfico gli espositori. Ivi è detto che Seleuco *ἐπικεχώρηκε τοῖς Σμυρναίοις τάν τε πόλιν καὶ τὰν χώραν αὐτῶν ἐλευθέραν εἶμεν καὶ ἀφο[ρο]λόγητον καὶ τάν τε ὑπάρχουσαν αὐτοῖς χώραν βεβαιοῖ καὶ τὰν πατρι . . ἐπαγγέλλεται ἀποδώσειν*: dove tutti gli editori suppliscono *πατρί[δα]*, ed è quindi naturale che traducano col Couve (“ BCH. „ XVIII 1874 p. 227 n. 1) “ il leur promet la restitution de leur patrie „ o che commentino col Dittenberger: *hinc apparet ipsam urbem Smyrnam tum cum haec scriberentur in potestate hostium fuisse, sed cives ut fidem servarent Seleuco patriam reliquisse, quam rex si cepisset se illis redditurum pollicetur*. Ma è veramente singolare che non si sieno avveduti del controsenso in cui sarebbe incorso Seleuco dichiarando la città di Smirne sacra ed inviolabile e promettendo nello stesso tempo di ghermirla prima o poi a quelli che al presente la possedevano per restituirla agli Smirnei fuorusciti. Mentre è chiaro invece che deve supplirsi *πάτρι[ον]* (*scil. χώραν*) e che Seleuco senza ombra di controsenso guarentiva agli Smirnei il possesso di quella parte del territorio che di fatto conservavano e prometteva di adoperarsi al ricupero di quell'altra parte che, prima o dopo, avevano lasciata perdere.

Queste concessioni le ebbe dunque Smirne, come si disse,

per la sua fedeltà al re quando passò dall'Asia Minore in Siria (*ἐπειδὴ πρότερον καθ' ὃν καιρὸν ὁ βασιλεὺς Σέλευκος ὑπερέβαλεν εἰς τὴν Σελευκίδα*). Più tardi, assente dall'Asia Minore il re (*νῦν τε ὑπερβεβληκότος τοῦ βασιλέως εἰς τὴν Σελευκίδα*), la iscrizione smirnea ci fa sapere che la città, animata dagli stessi propositi, credette di provvedere alla sicurezza propria e agli interessi di Seleuco mediante un'alleanza con Magnesia presso il Sipilo. Si tratta qui, secondo l'opinione più comune, di due spedizioni di Seleuco a mezzogiorno del Tauro, separate da una campagna nell'Asia Minore. Ed è possibile; ma non è troppo chiaro in questa ipotesi come l'iscrizione taccia del modo di comportarsi della città tra le due spedizioni; nè più facile è spiegare come la prima volta sia adoperato l'aoristo *ὑπερέβαλεν*, la seconda il perfetto *ὑπερβεβληκότος*; e non è infine senza valore la osservazione che se si trattasse di due passaggi diversi, il secondo sarebbe indicato con un *πάλιν*. Pertanto assai acutamente l'Haussoullier (*Études sur l'histoire de Milet*, p. 118), a cui non vedo che il Beloch (*Gr. G.* III 2 p. 457) abbia contrapposto alcun argomento decisivo, suppone che le due espressioni si riferiscano ad una stessa spedizione di Seleuco nella Siria. Questa seconda ipotesi non può dirsi dimostrata; ma è sostenibile non meno dell'altra. Entrambe del resto si possono assai bene accordare con le mie osservazioni sulla terza guerra di Siria. Ammessa l'ipotesi dell'Haussoullier si tratterebbe, ben s'intende, d'una assenza dall'Asia Minore protrattasi per varî anni, forse tra il 246, quando Seleuco mosse verso Antiochia per porre un termine agli intrighi di Berenice, e il 242, quando vi tornò per affrontare di persona il fratello ribelle. Ad uno degli anni intermedî, quando le cose anatoliche erano turbate dalla ribellione di Antioco, si riferirebbe l'epigrafe, la quale appunto invoca il precedente della fedeltà serbata a Seleuco nei momenti difficili del 246 e dei premî che ne aveva avuto Smirne per corroborarne il proposito di serbargli la fede anche ora che par vittorioso il tradimento, mentre Seleuco (così l'Haussoullier interpreta il part. perf. *ὑπερβεβληκότος*) sta tuttora nella Seleucide dove era passato da qualche anno.

La presunta egemonia dei Caoni nell'Epiro.

Con un'appendice sulla nazionalità degli Epiroti.

Nota del Prof. VINCENZO COSTANZI.

Teopompo asseriva che i Caoni e i Molossi erano le popolazioni più ragguardevoli dell'Epiro, avendo avuto gli uni e gli altri, prima i Caoni, poscia i Molossi, l'egemonia su tutta questa regione (1). La notizia d'uno storico del quarto secolo ha naturalmente una grande importanza; ma non si può negare che sia un po' indeterminata tanto in ciò che concerne l'estensione di quest'egemonia, quanto sui termini cronologici di essa. Tuttavia questo frammento di Teopompo è stato combinato con una testimonianza di Tucidide relativa alla guerra degli Ambracioti contro gli Acarnani e gli Amfilochii nel 429. Tucidide infatti ci informa che vennero in soccorso degli Ambracioti i Chaones coi Tesproti, gli uni e gli altri *ἀβασίλευτοι*, i Molossi sotto la guida di Sabilinto, tutore del minorenne Taripa, ai quali erano uniti gli Atintani, i Paravei sotto Oredo, e gli Orestei che per consentimento del loro re Antioco erano venuti in numero di mille uomini (2). Poco dopo Tucidide nota che i Caoni sono i più bellicosi tra gli Epiroti (3), e questo cenno, messo in relazione con l'espressione usata sopra *Χάονες καὶ οἱ ἄλλοι βάρβαροι*, combinata col frammento d'Ellanico (4), che si riferisce

(1) Fr. 297 in F. H. G. I p. 316 = STRAB. p. 323-324.

(2) THUCYD. II 80.

(3) ID. II 81, 3 *Οἱ δὲ Χάονες σφίσι τε αὐτοῖς πιστεύοντες καὶ ἀξιούμενοι ὑπὸ τῶν ἐκείνῃ Ἠπειρωτῶν μαχιμώτατοι εἶναι.*

(4) HELL. fr. 52 in STEPH. BYZ. *Χαονία· Ἀμπρακιῶται καὶ μετ' αὐτῶν Χάονες καὶ Ἠπειρῶται.* Difficilmente il frammento d'ELLANICO si può ritenere conservato nella sua integrità. Probabilmente va supplito un *οἱ ἄλλοι*. L' *Ἠπειρῶται* così solo suscita qualche sospetto: non oseremmo spingerci fino a ritenere che sia una glossa dell'espressione *οἱ ἄλλοι βάρβαροι* che si ritrova in TUCIDIDE, ma non siamo lontani dall'ammettere che si debba non ad ELLANICO, ma allo stesso STEFANO. Che *Ἤπειρος* fosse però già nome regionale, non v'è a dubitare. Cfr. p. 972, n. 3.

allo stesso ordine di fatti, è sembrato che confermasse la testimonianza di Teopompo, aggiungendole una determinazione cronologica. Adunque i Caoni avrebbero avuto tra i popoli dell'Epiro il primato sino al tempo della guerra amfilochia, poscia col re Taripa diventato maggiorenne avrebbe avuto incremento la potenza dei Molossi, che nel quarto secolo troviamo dominare su tutto l'Epiro (1).

Senonchè contro queste induzioni si possono sollevare parecchie difficoltà. Tucidide non ci rappresenta certamente le popolazioni dell'Epiro come strette da un vincolo federale, ma raggruppate in sistemi di parziali alleanze, dalla fusione delle quali doveva svolgersi il futuro *κοινόν* sotto l'egemonia d'uno stato prevalente, pel quale però i tempi non erano ancora maturi (2). Se Tucidide ed Ellanico nominano i Caoni prima degli altri, seguono l'ordine geografico; ed Ellanico menzionando i Caoni singolarmente, mentre comprende tutti gli altri nella designa-

---

(1) Schmidt *Epeirotika* p. 29, a proposito della guerra amfilochia, dice: " Die Chaoner scheinen damals eine besondere, eine führende Stellung unter den epirotischen Stämmen eingenommen zu haben "... " Von einer beherschenden Stellung der Chaoner berichtet auch Theopomp fr. 227 bei Strabon... ". Käbst, in Pauly Wissowa V. 2 p. 27 25, ritiene che i Molossi avrebbero acquistata una posizione di decisiva superiorità sotto il regno di Taripa. — Nilsson *Studien zur Geschichte des alten Epeiros* p. 45, 51-52: " Als verbündete der Ambrakioten werden immer die Chaoner erwähnt, entweder allein (Thucyd. II 68) oder an erster Stelle (II 80) "... " Hierzu kommt das ausdrückliche Zeugnis Theopomps bei Strabon VII p. 323, dass die Chaoner vor den Molossen über ganz Epeiros geherrscht haben; Theopomp selbst wurde nicht lange nach der Verschiebung der Machtverhältnisse geboren, welche unter Tharyps stattgefunden haben ". Vedi ancora nello stesso senso Klotz *Epirotische Geschichte* p. 11-12; soprattutto p. 13 dove congettura che i Caoni durante il 6° secolo acquistassero l'egemonia su tutto l'Epiro.

(2) Gli Atintani sembrano più strettamente uniti coi Molossi, militando sotto il reggente dei Molossi Sabilinto. Che i Tesproti fossero in uno stato di relativa sudditanza dai Caoni, si è ricavato (Klotz p. 11) dall'espressione di Tucidide, il quale riferisce che i Tesproti marciavano *μετὰ Χαόνων*. Ma questa stretta unione può essere stata suggerita dalla circostanza che erano confinanti e dall'altra che tanto i Caoni quanto i Tesproti erano *ἀβασίλευτοι*. In ogni modo è naturale che le tribù più potenti facessero sentire alle limitrofe meno potenti la loro forza e le attirassero nel giro della loro politica.

zione complessiva di *'Ηπειρῶται* (? cfr. p. 3, n. 4) segue una consuetudine non diversa dalla nostra che in una lunga enumerazione, dopo aver ricordati due o tre nomi, la tronchiamo con un *etcetera*, quando il lettore può supplirla da se stesso, senza che per questo intendiamo fare una gradazione d'importanza. Ma v'ha ancora di più: Taripa viene educato in Atene, il che mostra in modo molto chiaro un mutamento d'orientazione politica: ora questo mutamento presuppone una libertà d'azione incompatibile con qualunque vincolo, sia pur rilasciato, di dipendenza. Vedendo inoltre che le popolazioni epirotiche rinunciano a un'ulteriore partecipazione alla guerra — tanto è vero che gli Acarnani e Amfilochii stringono dopo il disastro di Olpe subìto dai federati contro gli Acarnani e gli Ateniesi, un trattato di pace per cento anni (1) — saremmo indotti a pensare che la monarchia molossa avesse un prestigio tale, da segnare la linea di condotta a tutti gli altri stati autonomi dell'Epiro.

Nè si riesce a persuaderci che la monarchia dei Molossi avesse potuto conquistare il primato nelle condizioni svantaggiose del regno di un minorenne o nel periodo in cui egli governò emancipato dalla tutela (2). La tradizione attribuisce — in gran parte a torto — riforme sostanziali nella costituzione a Taripa (3), e preferisce parlare di Epiroti piuttosto che di Molossi: questo può essere un anacronismo di storici vissuti al tempo in cui era oscurata ogni memoria dell'Epiro prima di Pirro il grande. Ma è notevole che tace di imprese militari da lui compiute, mentre queste si mantengono più tenacemente nella memoria che tutte le più proficue opere di pace (4). Questa circo-

---

(1) THUCYD. III 114.

(2) SCHMIDT *o. c.* p. 31-32; pone proprio durante il regno del re Taripa l'incremento dei Molossi. Il KLOTZ *o. c.* p. 19 sg. descrive il lento invigorimento dei Molossi, di cui trova una traccia nelle relazioni di Admeto con Temistocle. Nel 429 sarebbero ancora sotto il primato dei Caoni a causa della crisi interna provenuta dal passaggio di successione a un minorenne (p. 28), e si sarebbero avvantaggiati sui Caoni a causa della disfatta di Strato nel 429 (p. 24-25). Ma qui ci si involge in un circolo vizioso: va dimostrata la egemonia dei Caoni nel 429, prima di dimostrare che l'abbiano perduta.

(3) Vedi le giuste osservazioni del NILSSON *o. c.* p. 43.

(4) PLUT. *Pyrr.* 1; JUST. XVII 3.

stanza ribadisce la persuasione che Taripa non sollevò i Molossi sulle altre popolazioni dell'Epiro, ma li trovò già sollevati.

Di una posizione eminente della monarchia molossa in un tempo già molto anteriore alla guerra del Peloponneso, abbiamo la prova nelle relazioni presupposte dal racconto di Tucidide sulla fuga di Temistocle (1). Questi aveva ostile il re Admeto per non avere esaudita una sua domanda. Quali interessi poteva il re dei Molossi avere per cui fosse necessario o utile l'appoggio di Atene, se pur essendo uno stato mediterraneo, non aveva una certa sfera d'azione fino al mare, o almeno non fosse in grado di aspirarvi? Questa situazione politica presupposta dal racconto di Tucidide è illustrata dall'allusione di Pindaro all'estensione del regno di Neottolemo su tutto l'Epiro (3); poichè il poeta proietta nell'epoca mitologica le condizioni di fatto del tempo suo; e se dal cenno di Pindaro non siamo autorizzati a concludere che i Molossi esercitassero allora una formale egemonia su tutte le altre popolazioni epirotiche, dobbiamo riconoscere che era il popolo più ragguardevole.

Possiamo rintracciare anche per tempi più remoti la preminenza dei Molossi sopra le altre popolazioni dell'Epiro. Alla gara per le nozze di Agariste tra i proci troviamo ancora un

---

(1) Vedi Klotz cit. a p. 8.

(2) Klotz l. c.

(3) *Nem.* IV 81-84

Θέτις δὲ κρατεῖ
Φθίᾳ· Νεοπτόλεμος δ' Ἀπείρῳ διαπρυσίᾳ

Qui non c'è dubbio che Ἄπειρος sia nome proprio, e non si comprende come l'importanza di questo luogo sia sfuggita al Nilsson *o. c*, p. 33 n. 1 e al Klotz *o. c.* p. 4. Ma Ἄπειρος è nome regionale come *Θεσσαλία, Βοιωτία, Πελοπόννησος*, senza avere ancora significato politico. In I G A 88 è menzionata una dedica fatta da *Αἰσχρίων Ἀπειρώτας* sotto l'eforo *Ἁγηΐστρατος*, e quest'ultimo si è identificato con l'eforo *Ἁγησίστρατος* di Xenoph. *Hell.* III 3, 10 del 427/6. Cfr. Röhl *ad l.*, Solari *Ricerche Spartane*, Schmidt *o. c.* p. 9 n. 4, Klotz *o. c.* p. 19. Ma già il Kirchhoff, *Alphab.* p. 28 segnalò che la forma delle lettere del gruppo epigrafico 83-88 e l'uso della X consigliano di scendere alla prima metà del 4° secolo. Cfr. in proposito Pareti *Λακωνικά* p. 143 e 146 (paginazione provvisoria perchè il lavoro purtroppo è ancora in bozze). Per me l'indicazione *Ἀπειρώτας* con evidente significato politico obbligherebbe a scendere al quarto secolo, anche se la forma delle lettere permettesse di collocare l'iscrizione in epoca più antica: nel qual caso bisognerebbe supporre un deliberato arcaismo.

Alcone principe molosso (Herod., VI 137). Per quanto scarso sia il valore cronologico di questo cenno contenuto in una tradizione novellistica, non possiamo a meno di pensare che almeno nella generazione anteriore ad Erodoto la leggenda, che aveva qualche fondo di verità storica, del concorso alla mano della figlia di Clistene Sicionio, si fosse già formata. Così già alla fine del sesto secolo o ai principî del quinto quello dei Molossi sarebbe stato il popolo epirotico che più avrebbe richiamato l'attenzione degli altri Greci; e per conseguenza si deve ammettere che avessero molto maggiore importanza politica.

Una sovranità riconosciuta formalmente i Molossi non l'esercitarono forse mai fino al quinto secolo sulle altre popolazioni; ma a più forte ragione non si può parlare d'una sovranità di Caoni, che è solo un mito storiografico derivato dall'interpretazione di un frammento di Teopompo, il quale anche ammesso che ci sia stato riferito fedelmente da Strabone, può contenere solo o un'induzione frettolosa, o una ingiustificata generalizzazione a tutto il periodo anteriore alla guerra peloponnesiaca di un momento in cui per circostanze eccezionali l'azione dei Caoni potè avere una certa prevalenza. Negli stessi miti, che non adombrano secondo un evemerismo ritardatario circostanze reali in un linguaggio simbolico, ma che sono plasmati o atteggiati secondo le impressioni del tempo in cui entrano a far parte del patrimonio leggendario, il popolo dei Caoni è collegato col troiano Eleno (1). Questa connessione va dovuta a una combinazione fondata sopra un'omonimia: l'esistenza di una collina denominata Troia presso Butroto (2) a quel modo che nell'identificazione del Pirro capostipite della dinastia molossa con Pirro-Neottolemo figlio d'Achille, va cercata l'origine della tradizione che faceva venire quest'ultimo tra i Molossi (3). Ma nella stessa tradizione che pone il

---

(1) Vedi Nilsson *o. c.* p. 23.

(2) Dionys. Hal. I 51: *δηλοῖ δὲ καὶ τὴν εἰς Βουθρωτὸν τῶν Τρώων παρουσίαν λόφος τις, ᾧ τότε στρατοπέδῳ ἐχρήσαντο, Τροία καλούμενος.* Questo riscontro è stato lo spunto per far venire i Troiani nella Kestrine. Vedi ancora Stephan. Byz. *Βουθρωτός.*

(3) Nilsson *o. c.* p. 21 " Es entzieht sich nun leider unsrer Kenntnis, warum Neoptolemos gerade in der Molottis lokalisiert worden ist ". Le interpretazioni più vere sono le più ovvie. L'omonimia del *Πύρρος* caposti-

troiano Eleno tra i Caoni, non vi è accenno a nessun primato di costoro adombrato nell'opera del principe (1). L'unione in matrimonio di lui con Andromaca dopo la morte di Neottolemo, che troviamo consacrata in una tra le varie tradizioni, è l'effetto della ricerca degli *αἴτια*, di cui troppo si dilettò l'antica speculazione; ma non adombra in nessun modo la conquista di una posizione prevalente tra le popolazioni dell'Epiro. Finalmente concludiamo con l'osservare che se i Caoni avessero intorno al 429 avuto un'egemonia sulle altre popolazioni, avrebbero con tutta probabilità trovato favore le istituzioni repubblicane anche tra queste, specialmente presso i Molossi, il cui re non aveva ancora raggiunta l'età maggiore, e sarebbe stato quindi il momento più opportuno per rovesciare la monarchia, contro la quale qualche corrente contraria si dovea già essere determinata, se il figlio di Taripa, Alceta, dovette andare in bando, e si rifugiò presso Dionigi di Siracusa, dal quale fu ricondotto con l'aiuto degli Illiri (Diod., XV 13).

Ci sia ora permessa una digressione che con la nostra ricerca ha qualche attinenza. Abbiamo già visto che per Pindaro *Ἄπειρος* è nome regionale specifico con la stessa accezione in cui lo troviamo posteriormente, quantunque non gli si potesse ancora annettere il valore d'una designazione politica. Ma appunto perchè mancava ad esso contenuto politico, Pindaro e i suoi contemporanei dovevano avere qualche ragione per escludere dai confini dell'*Ἄπειρος* le regioni poste a settentrione dei monti Acroceruani, che non meno di quelle meridionali si potevano dire continentali. La ragione non poteva essere che una sola: l'etnografica. Si è disputato un pezzo se gli Epiroti fossero o no Greci; e la tesi della loro barbaricità ha trovato sempre dei patrocinatori, quantunque l'ellenicità di Dodona sia attestata

---

pite della dinastia dei Molossi col *Πύῤῥος* epiteto originario di Neottolemo è stata la causa della localizzazione di Neottolemo nelle *Μολοττίς*. La dinastia dei Molossi si denominava *Πυῤῥίδαι*, secondo naturalmente la forma del dialetto epirotico.

(1) Contro il Nilsson *o. c.* p. 23 " Nun hatte gerade der dritte Hauptstamm, die Chaoner, noch keinen Platz in der Mythologie. Hier kam Helenos zur rechten Stunde: so würde auch die Abbängkigkeit des Landes von den Molossern mythisch ausgedrückt.... ".

esplicitamente da Erodoto (II 56) (1), e i numerosi nomi locali e personali di impronta greca in tutto l'Epiro siano un indizio molto significante della loro stretta affinità con le altre popolazioni che abitavano al sud del golfo d'Ambracia e a oriente del Pindo. Purtuttavia in due recenti scritti sulla più antica storia dell'Epiro è sostenuta la barbaricità degli Epiroti: quelli del Nilsson e del Klotz che abbiamo più d'una volta avuto occasione di citare. Il primo tratta la questione più esaurientemente, mentre il secondo riassume gli argomenti portati in favore dell'una e dell'altra tesi, facendo adesione a quella dalla nazionalità barbarica degli Epiroti.

Gli argomenti si riducono alle testimonianze degli antichi, che chiamano gli Epiroti barbari, tra le quali una di Strabone (p. 326), secondo il quale alcuni degli Epiroti sono bilingui (*ἔνιοι δὲ καὶ δίγλωσσοί εἰσι*). Ora (Nilsson, *o. c.*, *p.* 2) sull'analogia del luogo di Tucidide (IV 109), secondo il quale alcune città della Calcidica erano abitate da barbari bilingui, intende che la lingua parlata dagli Epiroti oltre l'indigena, fosse la greca: quindi gli Epiroti avrebbero parlato una lingua diversa dalla greca. La conclusione è troppo rigorosa: anche ammesso che sia questa l'interpretazione giusta del luogo di Strabone, i dialetti epirotici dovevano essere tanto lontani dall'attico, che uno scrittore familiare con la *κοινή* poteva considerarli come lingue diverse. Ma Strabone allude evidentemente ai popoli confinanti con gli Illiri, e la diglossia si riferisce all'uso indifferente della lingua indigena e dell'illirica; poichè poco prima aveva detto che con questi popoli epirotici sono commisti i popoli dell'Illiria volti a mezzogiorno della parte montuosa e che sovrastano al mar Jonio (Adriatico), i Billioni, i Taulantii, i Partini, i Brigi: nè invero s'intenderebbe perchè, se la diglossia consistesse nell'uso della lingua epirotica e della greca, solo alcuni (*ἔνιοι*) dovessero essere bilingui. Oggi a Corfù sono tutti bilingui, come sono bilingui i Bretoni in Francia, i Baschi in Ispagna, e, se presso alcuni si riscontra l'ignoranza della lingua ufficiale, è questa una questione di cultura, non di etnografia: poichè non

---

(1) La grecità di Dodona l'ammettono anche i fautori della barbaricità degli Epiroti, ed è inutile stare a riportare le combinazioni escogitate in proposito. Cfr. Nilsson *o. c.* p. 6 e Klotz *o. c.* p. 2 n. 1.

mancano neanche in Lombardia e nel Piemonte delle persone che non sanno adoperare l'italiano. Oltracciò l'antitesi tra nazionalità illirica ed epirotica è espressa più chiaramente poco appresso (p. 327, 9) *ὅμως εὐάνδρει ἥ τε Ἤπειρος πᾶσα καὶ ἡ Ἰλλυρίς.*

Il Nilsson (p. 3) ripete l'argomento che Tucidide (II 80) chiama gli Epiroti barbari, notando che per il nostro storico l'idea di barbarie non poteva essere sinonimo di quella di rozzezza, e che quest'antitesi appare per la prima volta in Euripide (p. 5) nell'Ifigenia in Aulide (vers. 1400-1401). A dire il vero, non arrivo a comprendere il valore di quest'argomento. L'idea di superiorità dei Greci sui barbari non poteva essere sbocciata improvvisamente qualche anno prima della morte di Euripide, e se Tucidide non vi accenna mai esplicitamente, ciò si spiega perchè non ha mai avuto occasione di accennarvi. Inoltre Tucidide scriveva la sua opera storica negli stessi anni che Euripide componeva l'Ifigenia in Aulide, anche ammettendo che abbia cominciato a raccogliere i materiali subito dopo l'esilio.

L'ultimo argomento portato dal Nilsson riguarda i nomi locali e personali (p. 7-16). Ora non seguiremo l'autore nella sua analisi particolareggiata, contentandosi di rilevare che di molti nomi non è esclusa la grecità, come *Φωτύος, Θάρυψ*, e se anche fosse esclusa, si presenterebbero convincenti spiegazioni. Il contatto degli Epiroti con i popoli Illiri, dei quali nell'ottavo o anche nel settimo secolo non erano molto superiori in civiltà, può aver dato occasione a questa immistione di elementi idiomatici mutuati dai popoli confinanti per un processo naturalissimo e confortato da numerose analogie. Inoltre l'Epiro può essere stato per una larga zona abitato da popolazioni illiriche prima che i Greci vi scendessero dalla valle dell'alto Peneo, e come sono rimasti nel patrimonio lessicale greco molte parole preariane, così nei dialetti epirotici possono essersi conservate notevoli sopravvivenze illiriche (1). Ma nomi di fiumi come

(1) L'ipotesi del Kretschmer che i Traci (p. 181) siano immigrati nella penisola balcanica dopo i Greci, è nelle sue linee generali giusta: che l'invasione illirica sia posteriore alla greca, può essere anche vero, purchè non si dia a questa teoria un'interpretazione troppo rigida. Io trovo molto verosimile che mentre i Greci dalla Macedonia scendevano nella Tessaglia, gli Illiri fossero giunti sino in Epiro. Così quando si determinò una corrente migratoria in Epiro dalla Macedonia e dalla Tessaglia, non ci si trovò qui dinanzi a popolazioni preariane, ma dinanzi all'ariana degli Illiri.

Ὠρωπός e *Κάδμος*, la cui identità etimologica col nome dell'eroe e della città ai confini tra l'Attica e la Beozia (1), è fuor di discussione, per la diversità del loro significato semantico stanno ad escludere l'effettuazione d'un'ellenizzazione superficiale, e rincalzano la tesi dell'ellenicità sostanziale del popolo, rivelantesi specialmente nella lingua, in cui l'autonomia del processo evolutivo semantico non si concilia con la tesi dell'importazione. Noi abbiamo sopra rilevato che *Πυῤῥίδαι* era il nome epicorico della dinastia molossa (2). *Ἄσπετος* il padre di Pirro, identificato poscia con Achille, è vocabolo d'una grecità trasparente. Si aggiunga la forma *Δείπατυρος* = *Ζεὺς πατήρ*, di cui non si può disconoscere la grecità e nemmeno la peculiarità: l'uso schiettamente dialettale della forma *πελίαι* = *γραῖαι* e di *πελιγόνες* = *ἐν τιμῇ ὄντες* oppure *γέροντες* (Strab. VII fr. 2); e si rincalza così sempre più la persuasione che in tutto l'Epiro si parlavano dialetti greci (3), dei quali se nessuno riuscì a superare lo stadio di rozzezza, ciò si deve al contatto precoce con un popolo greco più avanzato in civiltà, il corinzio, il cui dialetto già elaborato dalla tradizione letteraria venne senza difficoltà accolto dagli indigeni e adoperato come lingua ufficiale.

---

(1) Non mi valgo dell'argomento fondato sui nomi dei fiumi *Ἀχέρων* e *Κωχυτός*, poichè questi possono realmente essere stati importati, essendo in origine fiumi mitologici. I coloni corintii localizzarono questi fiumi infernali in occidente, come la città di Pilo nella Trifilia.

(2) Ciò era riconosciuto dal Niebuhr (*Vorträge* p. 167) e dal Köhler *Satura philologica H. Sauppio oblat.* p. 82, i quali ritengono che nel 4° sec. almeno dopo il regno di Taripa si fissò lo stemma della dinastia dei Molossi. Io credo che i rimaneggiamenti della lista si riducono a ben poca cosa: quelli richiesti dall'identificazione del Pirro eponimo della dinastia dei Pirridi, col Pirro figlio di Neottolemo o Neottolemo stesso. Ma che esistesse un albero genealogico indipendente dalla tradizione troiana, lo ricaviamo dalla circostanza che dal capostipite a Taripa si contavano 15 generazioni. Quasi di certo tre generazioni equivalevano a un secolo: sicchè il regno dei Molossi si sarebbe fatto incominciare verso il 950, epoca inconciliabile con qualunque êra troiana.

(3) L'ipotesi di E. Meyer I[2] p. 718 che suppone una popolazione e una lingua epirotica diversa dalla greca e dall'illirica, ha importanza per questo che l'autore è costretto a negare la barbaricità degli Epiroti.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

Fig. 1

Fig. 2

ERBARIO

Fig. 3

Fig. 4

Fig. 5

Fig. 6

Fig. 7

Fig. 8

Fig. 9

Off. Fototecnica Ing. Molfese - Torino

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

Fig.5

Off. Fototecnica Ing. Molfese - Torino

L. Camerano dis.

Lit. Salussolia, Torino.

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona — Torino

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DELLE SCIENZE

DI TORINO

PUBBLICATI

DAGLI ACCADEMICI SEGRETARI DELLE DUE CLASSI

Vol. XLVII. Disp. **15ª**, **1911-1912**.

TORINO
VINCENZO BONA
Tipografo di S. M. e dei RR. Principi.
1912

CLASSE

DI

SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

Adunanza del 16 Giugno 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO PROF. COMM. ANDREA NACCARI
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Salvadori, D'Ovidio, Jadanza, Foà, Guareschi, Guidi, Fileti, Parona, Mattirolo, Grassi, Fusari e Segre Segretario.

Vien letto e approvato il verbale dell'adunanza precedente.

La famiglia del compianto Socio Strasburger ha inviato una lettera di ringraziamento per le condoglianze dell'Accademia.

L'Accademia di scienze naturali di Philadelphia ringrazia per la parte presa alle feste centenarie della sua fondazione.

Il Socio Lorenzoni ha inviato in omaggio la Memoria sua e del Dr. G. Silva: *Il supposto bipendolare* Mioni *a recipienti pneumatici.*

Il Segretario rileva pure, fra le pubblicazioni pervenute all'Accademia, quella dell' " Institut de France, Académie des Sciences ", intitolata: *Procès-verbaux des séances de l'Académie tenues depuis la fondation de l'Institut jusqu'au mois d'août 1835*, tome I, an. IV-VII (1795-1799). Questa pubblicazione sarà di grande utilità per la storia della scienza; e merita uno speciale encomio.

Il Socio Mattirolo legge la Commemorazione di Edoardo Strasburger. Verrà inserita negli *Atti.*

Vengono inoltre presentate, per la stampa negli *Atti*, le seguenti Note:

I. Guareschi, *Sulla diffusione del bromo in natura e sua ricerca anche nelle materie organiche*. Nota II.

C. Guidi, *Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro in cemento armato.*

A. Roccati, *Ricerche lito-mineralogiche sopra alcuni pozzi profondi della pianura padana.* II. *Pozzi di Suzzara, Galliera, Massa Lombarda e Lodi*, presentata dal Socio Parona.

M. Ponzo, *Ricerche e considerazioni intorno all'influenza dell'esercizio sulle rappresentazioni spaziali cutanee*, presentata dal Socio Fusari.

M. Ponzo, *Il decorso nel tempo delle rappresentazioni spaziali cutanee*, presentata dal Socio Fusari.

L. Tonelli, *Sulla lunghezza di una curva*, presentata dal Socio Segre.

A. Naccari, *Di un fenomeno fotoelettrico osservato su lamine metalliche immerse nel toluene.*

Osservazioni meteorologiche fatte nell'anno 1911 all'Osservatorio della R. Università di Torino, calcolate dal Dott. B. Rainaldi, presentate dal Socio Naccari.

Il Socio Parona, anche a nome del collega Somigliana, legge la Relazione sulla Memoria del Dr. L. Colomba: *Ricerche sui giacimenti di Brosso e di Traversella.* Parte 1ª: *Osservazioni petrografiche sul massiccio dioritico di Valchiusella.* Con votazione unanime si accolgono le conclusioni favorevoli alla stampa della Memoria.

Similmente con voti unanimi viene accolto fra le *Memorie* il lavoro del Socio Somigliana e del Dott. F. Vercelli: *Sulla previsione matematica della temperatura nei grandi trafori alpini*, presentato dal Socio Segre a nome del collega Somigliana.

LETTURE

EDOARDO STRASBURGER
(1844-1912)

Commemorazione letta dal Socio ORESTE MATTIROLO.

Nella notte dal 19 al 20 Maggio u. s., dopo otto giorni di malattia, serenamente addormentandosi, passava da questa vita Edoardo Strasburger, Professore ordinario di Botanica, Rettore della Università di *Bonn*, Direttore del locale Orto botanico di *Poppelsdorf* e nostro Socio corrispondente dal Dicembre 1893.

Nato a *Varsavia*, da genitori tedeschi, il 1° Febbraio 1844, dopo lunga dimora a *Parigi*, ove fu inscritto per due anni (1862-1863) alla *Sorbonne*, continuò gli studi in Germania, prima all'Ateneo di *Jena* e quindi a quello di *Bonn*, laureandosi nel 1866 a *Jena*, *Dottore in Medicina ed in Giurisprudenza*.

Nell'anno successivo (1867) otteneva a *Varsavia* l'abilitazione allo insegnamento della Botanica; e due anni dopo (1869) ritornava alla Università di *Jena*, essendogli ivi stata offerta la Cattedra straordinaria di Botanica.

Nel 1871, a soli 27 anni di età, conseguiva l'ordinariato a *Jena*, ove rimase per 10 anni. Chiamato nel 1881 (1° Aprile) all'Università di *Bonn*, vi restò poi sempre, occupandovi i gradi accademici più elevati, colmato di onori, tenuto nella massima considerazione dal Governo e dagli amici, che aveva numerosissimi.

La vita di Edoardo Strasburger si svolse nell'ambiente della Casa e del Laboratorio, sorretta da due ideali, la Famiglia e la Scienza.

Tranne viaggi frequenti che gli servivano di svago, e dai quali egli traeva le energie necessarie per reggere al faticoso lavoro della assidua e minuziosa ricerca di Laboratorio, nulla di

notevole troviamo nella serena carriera vitale di questo grande maestro, il cui nome e la cui fama, per la importanza, la novità, la utilità dell'opera compiuta, con indefessa costanza, rifulgeranno nella scienza illuminate dalla luce che distingue dalle altre le opere dei novatori.

In cinquant'anni di lavoro, pur conservando la sua caratteristica di anatomico, lo Strasburger ha toccato tutti i rami della Botanica, interessandosene sotto il doppio punto di vista scientifico e pratico, stampando orme geniali, poderose e personali, ovunque egli diresse l'opera sua.

Cresciuto sotto l'influenza della Scuola botanica anatomo-fisiologica sorta in Germania per opera di Ugo v. Mohl, resa classica dai lavori di Antonio de Bary e di Hofmeister, lo Strasburger volse l'ingegno, dotato di facoltà squisitamente analitiche, diresse la sua ammirata abilità manuale, all'esame sopratutto degli elementi dei vegetali, e da queste sue ricerche vennero fuori quei numerosissimi lavori che rimangono ancora oggi fondamentali nella Scienza.

Per accennare, sia pure sommariamente, come è còmpito del presente cenno biografico, all'opera multiforme di questo poderoso ed instancabile ricercatore, occorre ricordare, per sommi capi, i vari argomenti, intorno ai quali si possono raggruppare i numerosissimi lavori dello Strasburger.

La formazione delle cellule e dei tessuti per via della divisione indiretta, o cariocinèsi, o mitosi (come si voglia chiamare), affascinò in modo speciale la mente dello Strasburger. Il primo frutto delle sue ricerche fu appunto il notissimo volume “ *Zellbildung und Zelltheilung* „, che segnò un'epoca quando comparve nel 1875, e che ebbe, in soli cinque anni, l'onore di *tre* edizioni; che fu ed è, oggi ancora, malgrado il vertiginoso progresso in tale genere di lavori, ritenuto uno dei fondamenti di quel ramo di scienza che si occupa dei fenomeni della divisione nucleare e cellulare.

Di tale argomento lo Strasburger continuò poi sempre ad occuparsi, pubblicando successivamente tutta una serie di classiche Memorie, delle quali non mi è concesso nemmeno di citare i titoli, del resto notissimi agli Istologi.

Un'altra questione, indirettamente legata a quella della cariocinèsi, appassionò pure il nostro Autore, e gli studii suoi,

e meglio dirò, le ricerche e scoperte sue sulle modalità colle quali si compie nelle Fanerogame l'atto fecondativo, rimangono e rimarranno nella scienza come pietre miliari.

Una rivelazione, che gli valse di botto la Cattedra universitaria, fu la Memoria pubblicata nel 1869 a Jena sulla *Fecondazione delle Conifere* (*Die Befruchtung bei den Coniferen*); seguita nel 1872 dalla nota Morfologia delle *Conifere* e delle *Gnetacee* (*Die Coniferen und die Gnetaceen*) e nel 1879 dal lavoro classico sull'Ovulo, sulla fecondazione, sulla Embriogenia delle Angiosperme e delle Gimnosperme (*Die Angiospermen und die Gymnospermen*), che fecero stupire il mondo scientifico per la copia delle nuove osservazioni, per l'acutezza delle interpretazioni e per l'abilità tecnica da lui spiegata, ammirabile davvero in un'epoca nella quale gli odierni strumenti automatici di precisione per ottenere le sezioni sottili, seriate, erano ancora un pio desiderio!

Lo Strasburger fece stupire non solo per la rapidità colla quale vinceva le difficoltà tecniche, ma per l'abilità colla quale sapeva illustrare le sue ricerche accompagnandole con una serie di disegni, tale da sbalordire chiunque è pratico di tale genere di lavori e sa quanta importanza abbiano le precise documentazioni grafiche fatte direttamente dall'Autore.

Nè lo Strasburger si accontentò del solo lavoro analitico; ma in molte delle sue produzioni assurse a considerazioni di indole sintetica e filosofica intorno alle questioni che emanavano dalle sue ricerche di laboratorio; e non poche furono le teorie da lui emesse per spiegare i fenomeni ed i fatti di cui veniva a conoscenza; ma nella interpretazione teorica egli non apparve del pari fortunato, come lo fu nella descrizione diretta dei fatti che veniva mano mano scoprendo. Questo può dirsi, ad es., per quanto riguarda certe sue idee sulla riduzione periodica dei cromosomi, sulla questione della determinazione dei sessi, sulla apogamia, sulla formazione dei bastardi, ecc.

Del resto, di tanta mole è la somma dei lavori editi dallo Strasburger, che non stupisce se in qualcuno di essi egli non sia riescito impeccabile!

Lo Strasburger, prevalentemente istologo, ed anatomico, scienziato di Laboratorio, non disdegnò di occuparsi anche di sistematica, e chi ebbe la ventura di aver commercio con lui, come io l'ebbi più volte in Liguria ed a Vienna, ricorda l'occhio

pronto e la conoscenza profonda che egli aveva delle specie, e lo studio suo sulla vegetazione mediterranea risponde vittoriosamente all'accusa di unilateralità di produzione botanica che gli fu mossa dagli invidiosi.

Sorprendente, ma invero meritatissima, è stata la singolare fortuna colla quale furono accolte, in tutto il mondo, le opere scientifico-pratiche di EDOARDO STRASBURGER.

Basti qui accennare che il *trattato di Botanica* ad uso delle Scuole Universitarie, l'oramai celebre “ *Lehrbuch der Botanik für Hochschulen* „ o, come lo si chiama per antonomasia, il *Lehrbuch di Strasburger,* edito nel 1894, con lusso di figure a colori e di tipi; concepito dall'Autore con intendimenti nuovi di cooperazione scientifica affidata a specialisti insigni quali: NOLL; SCHIMPER; SCHENCK e più tardi KARSTEN, è oggi alla 11ª edizione e che esso fu tradotto in tutte quasi le lingue moderne.

Migliore e più mirabile fortuna ebbero ancora le due Edizioni (*la grande e la piccola*, cosidette) del *Botanische Practicum*; ossia dell'*Anleitung zum Selbststudium der mikroskopischen Botanik.*

Quando si consideri che questo libro comparso, nell'anno 1884, ebbe numerosissime edizioni in Germania, sempre rinnovate dall'Autore per metterlo a giorno dei progressi scientifici; e si pensi che è ora in Inghilterra alla sua VII edizione; e che questo volume è libro di testo nei laboratorii botanici francesi, si potrà avere un concetto della importanza scientifica non solo, ma della indiscutibile utilità pratica di quest'opera dalla quale si sono veduti rampollare, per tutte le scienze, e presso tutte le nazioni, infinità di modelli similari.

Coll'aiuto di questa guida, chiunque può addestrarsi nello studio microscopico dei vegetali; perocchè, ordinati con metodo perfetto, trova nei singoli capitoli o “ *Pensa* „ quanto è necessario per compiere la ricerca sopra i differenti organi dei vegetali.

Tutto vi è sagacemente descritto da mano maestra, tutto vi è elencato, figurato; e negli svariati “ *Registern* „ trova lo studioso le indicazioni relative alle reazioni, al modo di preparare i reattivi, agli strumenti da adoperarsi, all'epoca di raccolta delle piante da esaminare, ecc.

Con questo libro, che è oggi usato si può dire in tutti i laboratorii del mondo, lo studente non deve ricorrere più al docente che per indicazioni o questioni speciali; ed il Profes-

sore trova in Laboratorio facilitato il còmpito suo e nello stesso tempo ha facoltà di far procedere gli studenti con metodo e con ordine nell'esame dei singoli organi dei vegetali.

Io non dubito di affermare che se anche lo Strasburger altro non avesse prodotto che questo libro, il suo nome dovrebbe egualmente vivere nella posterità per virtù di riconoscenza; perocchè non ha saputo egli solamente indicare, ma ha saputo spianare la via ai ricercatori e per questo ha bene meritato.

Prosatore di merito si dimostrò pure lo Strasburger nelle sue relazioni di viaggi, comparse qua e là nei giornali tedeschi, nei discorsi, ma specialmente nelle " *Streifzüge an der Riviera* ", libro " *sui generis* ", il quale per essere adattato perfettamente alla mentalità delle persone colte della Germania (o che tali intendono di essere) ha giovato, nelle varie sue edizioni e traduzioni, assai più alla fama generale dell'Autore, che non le sue scoperte scientifiche.

È questo un volume di volgarizzazione, indirizzato alla conoscenza della Storia aneddotica dei principali vegetali che si coltivano, o che naturalmente si sviluppano in quella porzione della regione costiera del Mediterraneo che si stende dall'Esterel alla Spezia, dai monti dei Mauri ai dirupi delle nostre " *Cinque terre* ", così care a Bacco!

Sono nozioni storico-botaniche, indicazioni svariatissime sulla massima parte delle piante più caratteristiche dei Giardini e della Flora mediterranea, legate assieme da un tenue filo descrittivo delle bellezze naturali dell'ambiente.

Dalle pagine brillanti di questo volume, elegantemente illustrato dagli acquerelli di Luisa Reusch, profondamente sentito, erompe affascinante l'amore intenso che lo Strasburger nutriva per gli spettacoli della natura, per virtù ed influenza del quale, l'austero e, diciamolo pure, pesante scrittore di Scienza, diventa descrittore brillante ed efficace, colorista incantevole dei paesaggi, dei tramonti, delle aurore, delle vaporose tonalità glauche, delle luci calde guizzanti che allietano i paesi della magica riviera. Da questo volume emana caldo, intenso l'indimenticabile odore della macchia, il: " *würzigen Duft der Maquis* " che caratterizza e profuma l'atmosfera dei paesi costieri sferzata dal Sole.

So mögen diese Zeilen auch in fremder Seele Frühlingsempfindungen weeken, selbst wenn es daheim noch schneit und friert!, esclama lo Strasburger, inneggiando alla potenza vivificatrice dell'universo, al Sole che è simbolo della forza, della vita; al Sole verso il quale (me lo diceva ogni volta che lo vedevo) egli ed i suoi compatrioti anelano irresistibilmente attratti, dopo i gelidi, lunghi, sfibranti periodi dell'inverno nordico. Onde è che al Solo nostro volle lo Strasburger sciogliere un inno, compiacendosi di rievocare, anche nei più minuti particolari, le gite annuali dalle quali traeva la lena per le imprese della Scienza.

Egli fu amico del paese nostro, amico sincero, affezionato e costante; così che a poco a poco era diventato quasi un *rivierasco*, tanto conosceva nelle minime particolarità della vita e della vegetazione la riviera della Liguria, di cui alcune volte mi fu guida competentissima.

Nè mai si atteggiò a mentore pedante del nostro paese (come fanno molti dei suoi connazionali); nè a critico burbanzoso delle nostre abitudini, alle quali egli si era invece mirabilmente adattato, apprezzandone le ragioni di essere.

Questo libro, in quanto è vero, sentito, vissuto, rimarrà come un esempio nella letteratura descrittiva, più per merito di queste qualità, che per il modo col quale è trattata la materia.

La parte descrittiva vi è infatti soverchiamente soffocata da una massa di cognizioni e di dati che, se dimostrano la vastissima cultura dell'Autore, e la soddisfazione sua nel porre sott'occhio al lettore i più peregrini particolari riguardanti la storia delle piante principali, nuocciono alla scorrevolezza della descrizione dell'ambiente, all'unità e alla omogeneità del libro. Esso diventa così una specie di mosaico in certi punti mancante di quello slancio e di quella snellezza che sono invece ammirevoli, quando, abbandonate le preoccupazioni cattedratiche, soverchiamente professorali, egli si eleva e si abbandona al naturale sentimento che lo invade e lo sprona.

“ *Welch ein Glück, dass sie die Phantasie auch an trüben Tagen uns über die Wolken zu heben vermag!* „.

SIGNORI,

La morte di EDOARDO STRASBURGER non è soltanto un lutto per la Germania; essa segna una perdita gravissima per le Scienze naturali e per la Botanica in modo speciale; imperocchè fu lo STRASBURGER uno dei fondatori e dei precursori del metodo moderno di studio degli elementi cellulari.

Quanto noi conosciamo infatti sulla formazione degli elementi, quanto sappiamo oggi sulle funzioni nucleari, sulla fecondazione e sui quesiti che ad essa si collegano, in gran parte deriva dalle osservazioni infinite dello STRASBURGER, le quali interessarono, non solo il campo dei vegetali, ma si estesero a quello degli animali, dimostrando quella affinità, quella omogeneità di costruzione, quella semplicità di mezzi e di origine, che va ad ogni momento sempre più affermandosi, e che lega fra di loro tutti gli esseri del mondo organico.

Concedetemi adunque, o Egregi Colleghi, che io, che ho iniziato gli studi botanici seguendo i trattati dello STRASBURGER, ammirando l'opera sua; io che ebbi più tardi la ventura di conoscere e di ammirare l'uomo insigne dimostratosi meco sempre affabile, cortese e premuroso, mi onori oggi di presentare alla sua Anna diletta le più profonde condoglianze nostre, e che alla memoria sua, per incarico e in nome della Accademia delle Scienze di Torino, mandi un saluto riverente in atto di doveroso omaggio al grande Collega troppo presto rapito alla Scienza!

Torino, 12 giugno 1912.

Sulla diffusione del bromo in natura e sua ricerca anche nelle materie organiche.

Nota II del Socio ICILIO GUARESCHI.

In una mia prima Nota: *Nuova reazione del bromo, sensibilissima anche in presenza degli altri alogeni* (1) ho dimostrato che la fucsina decolorata col gas solforoso è il miglior reattivo del bromo e che una cartina bagnata con questo reattivo esposta ai vapori di bromo, o colle soluzioni di bromo, si colora intensamente in azzurro violaceo. Io ho fatto i miei saggi col cloridrato di rosanilina ordinaria, e anche coll'acetato di rosanilina, decolorato con bisolfito di sodio e acido cloridrico (2) oppure col gas solforoso, od anche coll'idrosolfito di sodio. Ho trovato più conveniente usare il primo metodo. Ma è indubitato che anche la soluzione di fucsina (specialmente l'acetato di rosanilina) decolorata semplicemente con gas solforoso, costituisce un eccellente reattivo del bromo. Questa reazione può servire come controprova della presenza del bromo quando si ricerca questo elemento col solito metodo dell'acqua di cloro e solfuro di carbonio oppure col cloroformio. Per confermare che la colorazione più o meno gialla del solfuro di carbonio o del cloroformio è dovuta al bromo si aggiungono poche goccie del reattivo fucsinico e si agita; la colorazione violetta dimostra la presenza del bromo.

Con questo reattivo ho potuto svelare il bromo allo stato di bromuro o di bromato in moltissime sostanze. Innanzitutto mi sono assicurato che la fucsina decolorata col bisolfito non si ricolora nemmeno dopo prolungata corrente di aria o di gas acido carbonico.

---

(1) " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino „, 1912, t. XLVII.

(2) Si scioglie 1 gr. di fucsina (acetato o cloridrato di rosanilina) in 1000 cm^3 di acqua, poi si aggiungono, dibattendo, 8 cm^3 di soluzione satura di bisolfito sodico e circa 10 cm^3 di acido cloridrico a 1.19.

Per saggiare i sali solidi, come già dissi, tratto la sostanza con soluzione al 25 $^0/_0$ di acido cromico, oppure, specialmente se carbonato, lo sciolgo in gran parte in acido cloridrico purissimo e poi aggiungo l'acido cromico in soluzione molto concentrata o anche allo stato solido, affinchè non diventi troppo diluito. Ma bisogna badare che l'acido cloridrico può contenere dell'acido bromidrico; è bene quindi usare solamente l'acido cromico quando si tratta di ricercare delle minime traccie di bromo, oppure di neutralizzare i carbonati con acido solforico.

Gr. 0,2 di *kainite* e di *kieserite* diedero subito intensa la reazione dei bromuri, così pure quasi tutti i *carbonati di sodio* del commercio, anche quelli così detti puri, ed il *bicarbonato di sodio.* Invece un antico campione di *carbonato di soda di Moutiers*, cioè proveniente dalle antiche saline di Moutiers in Savoia, dimostrò di non contenere del bromo.

Nelle analisi dell'acqua Vichy Hôpital citate in alcuni trattati di chimica francesi è accennata la presenza di traccie di bromuri; mentre poi secondo le analisi citate nel *Dictionnaire de Chimie* del Wurtz (Vol. I, p. 1206) tanto nelle acque di Vichy Hôpital quanto in quelle delle sorgenti Grand-Grille, Puits-Chomel e Célestins non ve ne sarebbe nemmeno delle traccie. Nel residuo di 500 cm^3, ed anche di 100 cm^3, di acqua di Vichy Célestins io ho invece riconosciuto traccie ben evidenti di bromuri. Ho avuto poi la reazione evidentissima del bromo da 1 gr. di sali che servono a preparare la così detta acqua di Vichy État.

Ho trovato anche delle traccie di bromuri nella cenere (5 gr.) del legno di quercia e debolissime anche nella cenere del legno d'ontano (verna).

Nella cenere d'ossa, nulla.

In un campione vecchio di *natron* ebbi indizio di appena traccie minime di bromuri.

Un vecchio campione di *soda d'Alicante* diede dopo pochi minuti netta la reazione del bromo.

Un vecchio campione di *soda Leblanc* diede subito indizio di bromo.

Tutti i prodotti chimici che direttamente o indirettamente provengono dal sal marino, o preparati con prodotti ricavati dai depositi di Stassfurt, dànno la reazione del bromo.

E così ho trovato il bromo con reazione nettissima in *clo-*

ruro di potassio detto purissimo e delle minime traccie anche nel cloruro di potassio così detto: assolutamente puro. Lo trovai pure in modo molto manifesto nel *cloruro di magnesio.* Nemmeno traccie invece in un vecchio campione di *acido borico* grezzo, di colore giallastro.

Nel salgemma. Nella mia prima Nota ho già fatto osservare che con facilità si può dimostrare la presenza dei bromuri nel cloruro di sodio alimentare ordinario, sia *grezzo* quanto quello detto *raffinato.*

Anche il salgemma il più puro contiene dei bromuri. Esaminai un bellissimo campione di salgemma trasparente, incoloro, che probabilmente proveniva da Wieliczka; 5 gr. di questo sale polverizzato furono trattati con 5 cm^3 di soluzione di acido cromico al 25 % e dopo 5 a 10 minuti si ebbe nettissima ed intensa la reazione del bromo. È una esperienza che può essere fatta anche in lezione per dimostrare che il salgemma ha in fondo la stessa origine del sal marino comune e che anch'esso contiene dei bromuri.

Esaminai anche un vecchio campione di salgemma detto di Illiria e che esisteva in questo laboratorio già prima del 1879; è in bellissimi cristalli. Gr. 5,9 di questo sale polverizzato, trattati come sopra, diedero dopo 5 a 10 minuti nettamente ed intensa la reazione del bromo. Ottenni la reazione del bromo da un vecchio campione di *Salgemma di Spagna* ed anche dal così detto *cloruro di sodio fuso* (*Natriumchloridgeschmoltzen*). Con 10 gr. di sostanza in polvere e 10 cm^3 della soluzione di acido cromico al 25 % si ha nettissima la colorazione della carta reattiva tanto colla fucsina decolorata, quanto col violetto di Hofmann decolorato.

Nelle numerose analisi di salgemma raccolte dal Dammer (" Handb. d. Chem. Techn. ", Vol. I, p. 219-220), nel *Dictionn.* di di Wurtz, nel *Lehrb.* di Graham-Otto-Michelis, ecc., non trovo ricordato che sia stata dimostrata la presenza di bromuri nel salgemma. In altri trattati (Gmelin-Kraut) si trova accennata l'esistenza dei bromuri nello *Steinsalz*, forse in quello di Stassfurt. Ad ogni modo anche se altri ne ha dimostrato la presenza, certamente non è stato in modo così rapido ed elegante come col mio metodo.

Ho voluto ricercare i bromuri anche nel *salgemma azzurro*

proveniente dalle miniere di Stassfurt e che mi era stato regalato dal compianto prof. G. Spezia; 3,3 gr. della porzione di color azzurro scuro, polverizzati e trattati con 3 a 4 cm^3 di soluzione di acido cromico al 25 °/₀ diedero quasi subito molto intensa la reazione dei bromuri. Mi è sembrato anzi che questa parte azzurra contenesse più bromo che non quella incolora.

Il *cloruro di ammonio* detto *purissimo* di una delle migliori fabbriche di prodotti chimici, diede ben manifesta la reazione del bromo; la diede pure, ma meno intensa, un vecchio campione di cloruro ammonico grezzo che da più che trent'anni trovasi in laboratorio; un campione di cloruro ammonico detto puro di un'altra fabbrica di prodotti chimici, dette debolissima la reazione del bromo.

In tutti i campioni di *jodo* commerciale che ho esaminato, anche quello detto *risublimato*, ho trovato la presenza del bromo.

Il bromo nell'acido cloridrico. Avendo trovati i bromuri in tutti i cloruri di sodio del commercio, naturalmente dovevo ricercare il bromo anche nell'acido cloridrico. Diluito l'acido cloridrico grezzo (un vecchio campione di acido cloridrico giallo, e dell'acido cloridrico detto puro e a 1,19) con egual volume di acqua, poi per 25 cm^3 aggiuntivi 15 cm^3 di acido cromico al 25 °/₀ e sospesa dentro al matraccino una carta imbevuta col reattivo fucsinico, questo dopo 10 a 15 minuti diede indizio della presenza del bromo. Seguii anche un altro modo: trattai sino a neutralizzazione l'acido cloridrico con soda caustica pura, priva di bromo, preparata dal sodio; 12 gr. del sale sodico così ottenuto, trattati con 15 cm^3 di acido cromico al 25 °/₀ diedero, dopo 10 a 20 minuti, ben manifesta la reazione del bromo.

Col *carbonato sodico* preparato colla stessa soda e trattato coll'acido cromico, non si ebbe invece indizio di nessuna traccia di bromo. La *soda caustica dal sodio*, neutralizzata convenientemente con acido cromico, che poi si aggiunge in eccesso, non diede traccia di bromo.

Anche una cartina bagnata con violetto d'Hofmann decolorato con bisolfito svela il bromo colorandosi in azzurro intenso.

Questa reazione può servire a svelare delle traccie di bromuri anche in sali dei metalli pesanti. Il cloruro ferrico in soluzione al 10 °/₀ circa trattato con acido cromico al 25 °/₀ ed a temperatura ordinaria non colora affatto la cartina bagnata col

reattivo fucsinico, ma bensì se contiene anche una minima traccia di *bromuro*. Anche in questo caso, benchè più lentamente, serve benissimo il violetto d'Hofmann decolorato coll'acido solforoso.

Il bromuro mercurico, scaldato, fonde e poi bolle senza sviluppare bromo, ma già a temperatura ordinaria con un poco di acqua di cloro dà subito sviluppo di bromo; in soluzione e con soluzione di acido cromico dà assai difficilmente il bromo; lo dà bene e svelabilissimo col mio reattivo se si tratta direttamente con anidride cromica o con acido cromico concentratissimo. Una traccia di bromuro mercurico nel sublimato corrosivo, si svela benissimo.

Ricerca del bromo nelle urine. — Come dirò, forse, in altro lavoro, vi sono contraddizioni e dati incerti intorno alla eliminazione dei bromuri ed alla loro ricerca nelle urine. Col mio reattivo si svelano delle piccole quantità di bromuri, evaporando l'urina a secco, dopo alcalinizzata con soda caustica purissima, carbonizzandola sino a che non si abbiano più traccie di fumi, poi riprendendo il carbone con acqua bollente, evaporando a secco e saggiando, entro piccolo matraccio, con soluzione d'acido cromico e la cartina bagnata col mio reattivo.

La ricerca del bromo nelle urine col nuovo metodo mi sembra più sicura e più sensibile che non quella eseguita col vecchio metodo dell'incenerimento e trattamento con acqua di cloro e solfuro di carbonio o cloroformio; peggio quello di trattare direttamente l'urina con acqua di cloro e solfuro di carbonio, come insegnano alcuni libri di chimica biologica.

Dopo l'ingestione di 1 gr. di bromuro potassico si riconosce facilmente il bromo nell'urina. L'eliminazione, pare, dura lungo tempo; ed invero io ebbi la reazione molto intensa da 250 cm^3 di urina di un individuo che aveva preso 1 gr. di KBr da circa 35 giorni. Questa urina trattata come fu detto, lasciò un residuo secco bianco che pesava 5.4 gr., il quale trattato con 7 a 8 cm^3 di acido cromico al 25 $^0/_0$, dopo pochi minuti diede manifestissima la presenza del bromo col mio reattivo e successivamente anche con cartina bagnata col violetto d'Hofmann decolorato col bisolfito. Però è da notare che operando nello stesso modo su 240 cm^3 di urina normale di individuo che non aveva ingerito bromuro, nè acque minerali, ebbi benchè un poco più lentamente, ma ben netta, la reazione del bromo.

Nettissima ottenni pure la reazione del bromo dall'urina di un altro individuo che non aveva mai usato bromuri nè altri medicamenti.

Con questo, resta confermato quanto risultava già dalle esperienze di Rabuteau, il quale sino dal 1868 (1) aveva dimostrato la presenza normale di piccole quantità di bromuri nell'organismo animale.

Che i bromuri agiscano anche per il bromo libero che si metterebbe in libertà nell'organismo, come si ammette in alcuni Trattati di farmacologia, mi pare assai poco probabile.

Ricerca del bromo nelle materie organiche. — Il mio metodo può servire a svelare il bromo nelle materie organiche, anche in minime traccie. Una frazione di milligrammo della materia colorante bromurata che avevo ottenuto dalla fucsina decolorata, scaldata con acido cromico al 25 $^0/_0$, dà subito manifestamente la presenza del bromo colorando in azzurro-violetto una carta inumidita col reattivo e introdotta nel tubo d'assaggio.

L'*eosina* è prontamente ossidata a caldo dall'acido cromico al 25 $^0/_0$ e manifesta subito la presenza del bromo. Con 1 mgr. di eosina si ha intensissima e più volte la colorazione della carta reattiva. 1 mgr. di eosina (contenente mgr. 0,4 di bromo), sciolto in 1 cm^3, poi presane 0,1 cm^3 e ossidato in tubo d'assaggio con poco acido cromico, diede ancora molto intensa la reazione, cioè con mgr. 0,04 di bromo. La reazione è sensibilissima con traccia minima di eosina.

La mia bibromonaftalina fusibile a 81° è ossidata dalla soluzione concentratissima di acido cromico e sviluppa il bromo assai bene riconoscibile anche con frazioni di milligrammo di sostanza.

Così provai con traccie minime: di *clorobromonaftalina*, di *bibromonaftalina*, di *bromosalicilato di metile*, di *tribromofenolo*, di

(1) Vedi A. Rabuteau, *Éléments de Toxicologie,* Paris, 1873, p. 759. Egli scriveva: " Enfin, lorsqu'on opère sur 300 grammes des urines provenant " d'une personne quelconque et recueillies dans les circonstances ordinaires, " on trouve constamment du brome, qui existe normalement dans l'orga- " nisme, où il est apporté par les aliments solides et liquides ".

bromalio idrato, di *acido bibromosuccinico*, di *bibromoantracene*, di *bromoformio*, di *bromonitronaftalina* fusibile a 122°,5, di *nitrobromonaftalina* di Joulin fusibile a 83°-84°, di *monobromonaftalina*, di *anidride bibromoftalica*, di *bibromoftalide* fusibile a 188°-189°, ecc. Se la sostanza organica è difficilmente ossidata dalla soluzione di acido cromico, la si tratta direttamente con poco acido cromico cristallizzato cui si aggiunge poi una gocciolina d'acqua. La reazione è di una grande squisitezza e sensibilità. Vale anche per le materie organiche bromurate più o meno volatili; traccie di *bromuro di isobutile* o di *bromuro di etilene* scaldate con CrO^3 e pochissima acqua, dànno subito la reazione del bromo.

Così si svela il bromo anche nelle sostanze organiche clorobromurate, jodobromurate, ecc. Colla reazione di Beilstein mediante riscaldamento della sostanza organica sull'ossido di rame non è facile accertarsi se la colorazione della fiamma è dovuta piuttosto al bromo che non al cloro o al jodo. Io trovo preferibile la mia reazione.

Si può mettere in libertà il bromo delle materie organiche bromurate anche col metodo indicato da Messinger (1), riscaldando cioè la sostanza in tubo d'assaggio con cromato potassico ed acido solforico concentrato. In ogni modo, messo in libertà il bromo si riconosce col reattivo fucsinico.

Bromati. — Il mio reattivo è eccellente anche per riconoscere i *bromati*. Se si versa a goccie la soluzione del reattivo fucsinico in una soluzione di bromato potassico, a poco a poco il liquido si colora in bel violetto rosso. La reazione è molto sensibile: 5 cm^3 di una soluzione di 1 mgr. di bromato potassico in 100 cm^3 di acqua, contenenti quindi 0,00005 di bromato, dànno con una goccia di reattivo una rapida e intensa colorazione rosso-violetta e con 5 cm^3 di una soluzione contenente 0,0000025 di bromato dànno ancora una reazione nettissima.

Questo reattivo può servire quindi benissimo a riconoscere subito delle minime traccie di *bromati* nei *bromuri*. Se ad una soluzione di bromuro contenente anche una traccia di bromato, o anche direttamente al sale solido si aggiunge un poco di soluzione di fucsina decolorata col bisolfito, e si agita, subito si manifesta la magnifica colorazione azzurro-violetta; anche con

---

(1) " Berichte ,, 1888, t. XXI, p. 2918.

precipitazione della materia colorante se i bromati sono un poco più che in minime traccie.

È questo un saggio molto semplice per verificare la purezza dei bromuri, relativamente alla presenza dei bromati.

Se la quantità di bromato nel bromuro è minima e non dà più la reazione cogli acidi e solfuro di carbonio, o la dà incerta, è invece resa ben manifesta dopo pochi minuti col mio reattivo.

Secondo il sig. Biltz (1) $^1/_{500}$ di $KBrO^3$ nel bromuro potassico non produce più colorazione per aggiunta di acido solforico diluito. Tutto ciò è esatto, e dimostra che operando in questo modo, e anche col solfuro di carbonio, la reazione non è molto sensibile. Io invece, ad esempio, aggiungendo a 0,500 di KBr purissimo mgr. 0,1 di bromato di potassio in 10 cm^3 di acqua (cioè 1 : 20000 di bromato nel bromuro) ottenni con poche goccie del mio reattivo subito la reazione nettissima, color violaceo. Operando di confronto con bromuro solo e acqua si ha nulla affatto. In questo modo possiamo dunque riconoscere subito delle quantità piccolissime di bromato quasi impossibili a trovarsi con altri metodi.

Se si fa una soluzione di bromuro e bromato nel rapporto di cinque molecole del primo per una molecola del secondo, allora si ha subito col reattivo fucsinico un'intensa colorazione rossa che passa all'azzurro violaceo, e se la quantità di bromuro e bromato non è minima si ha precipitazione della materia colorante. In questo modo anzi si può preparare la materia colorante invece di adoperare l'acqua di bromo.

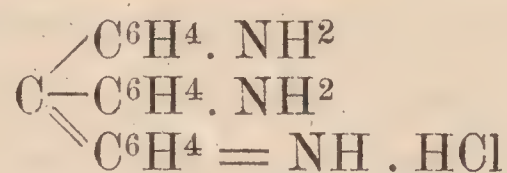
Come reattivi del bromo, oltre alla fucsina decolorata coll'acido solforoso, possono servire altri colori di anilina.

Fucsina S decolorata col bisolfito. — Anche la *fucsina* S o *fucsina solforata* quando è decolorata col bisolfito può servire come reattivo del bromo. La sua soluzione trattata con acqua di bromo dà luogo alla precipitazione di un'abbondante e bella materia colorante, che è ricca di bromo.

Acetato di rosanilina. — La soluzione di questo bellissimo prodotto, decolorata col gas solforoso o col bisolfito sodico e acido cloridrico, si comporta pressochè come il cloridrato di rosanilina.

(1) Vedi Schmidt, *Lehrb. der Ph. Chem.*, I, p. 561.

Cloridrato di pararosanilina. — Era interessante vedere come si comportava col bromo l'omologo inferiore della fucsina cioè la pararosanilina. Sciolsi 1 gr. di cloridrato:

$$C \begin{cases} C^6H^4 . NH^2 \\ C^6H^4 . NH^2 \\ C^6H^4 = NH . HCl \end{cases}$$

in 500 cm³ d'acqua, poi aggiunsi 6 gr. di bisolfito sodico e 6 cm³ di acido cloridrico a 1,19. Il liquido è quasi incoloro, o lievemente giallognolo. Anche questa soluzione costituisce un buonissimo reattivo del bromo; una cartina inumidita con questo reattivo si colora in azzurro-violetto intenso, con una traccia di bromo.

Il reattivo quasi incoloro o lievemente giallognolo, trattato con acqua di bromo, si colora in azzurro violetto e col bromo in lieve eccesso dà bellissimo precipitato di colore violetto.

In tutto, questo reattivo si comporta come la fucsina ordinaria decolorata col bisolfito.

Il violetto d'Hofmann decolorato col bisolfito è un altro eccellente reattivo del bromo. — Io ho osservato che il violetto d'Hofmann:

$$C \begin{cases} C^6H^3 \begin{cases} CH^3 \\ NHC^2H^5 \end{cases} \\ C^6H^4 . NHC^2H^5 \\ C^6H^4 . NHC^2H^5 . Cl \end{cases} \quad \text{oppure} \quad C \begin{cases} C^6H^3 \begin{cases} CH^3 \\ NHC^2H^5 \end{cases} \\ C^6H^4 . NHC^2H^5 \\ C^6H^4 = NHC^2H^5 . Cl \end{cases}$$

decolorato coll'acido solforoso si colora in viola intenso o azzurro, per l'azione del bromo libero, dando origine ad una materia colorante bromurata analoga a quella ottenuta dalla fucsina decolorata.

Preparo il reattivo nel modo seguente: si scioglie 1 gr. di violetto d'Hofmann in circa 500 cm³ di acqua, poi si aggiungono 6 a 8 gr. di bisolfito sodico e 10 a 11 cm³ di acido cloridrico a 1,19. Dibattendo la miscela, a poco a poco diventa quasi incolora.

Con questa soluzione si imbeve della carta Berzelius. La carta così inumidita esposta ai vapori di bromo si colora inten-

samente in azzurro. La colorazione azzurra resiste bene al cloro, meglio di quella ottenuta col reattivo fucsinico. Però coll'*eccesso prolungato* del gas cloro anche questa carta, lentamente, si decolora. È una reazione molto sensibile. Con una frazione di milligrammo di un bromuro e qualche centimetro cubo di soluzione di acido cromico al 20 od al 25 %, si mette in libertà il bromo, che si riconosce colla cartina inumidita col reattivo suddetto. Anche con questo reattivo si possono fare delle eleganti esperienze di scuola. Esponendo in tre matracci a collo largo contenenti l'uno dell'acqua di cloro, l'altro dell'acqua di jodo e il terzo dell'acqua di bromo, delle carte imbevute del reattivo, si vedrà la prima colorarsi appena in verdognolo, la seconda in giallastro o brunastro e la terza in un magnifico azzurro-viola intenso che coll'eccesso di bromo passa al bleu con riflesso metallico iridescente.

Anche questa reazione del bromo ha luogo in presenza del cloro e del jodo.

Però in presenza di un grande eccesso di jodo, come nel caso della ricerca dei bromuri nei joduri, la carta rimane colorata in bruno che maschera la bella colorazione azzurra; ma il colore si vede poi bene lasciando per breve tempo la cartina all'aria; allora si sperde l'imbrunimento dovuto al jodo e rimane la colorazione azzurra dovuta al bromo.

Serve bene a riconoscere i bromuri nei cloruri.

La reazione col violetto d'Hofmann decolorato è più lenta, ma la colorazione è molto intensa e bella. Così trovai il bromo nell'acido cloridrico commerciale, così detto puro, neutralizzato con soda ottenuta dal sodio. Dopo alcune ore la cartina era intensamente azzurra.

Esperienze di confronto fatte con l'acido cromico solo o con acido cromico ed acido solforico non diedero nessuna colorazione.

Per minime traccie di bromo mi pare più sensibile il reattivo fucsinico che non il violetto d'Hofmann decolorato.

Verrà in seguito studiata la reazione tra i bromuri e l'acido cromico, per vedere in qual senso abbia veramente luogo e quale sia il limite di diluizione in cui l'acido cromico non agisce più sull'acido bromidrico. E così per gli altri acidi alogenici.

Forse la mia reazione sarà più sensibile con bicromato ed acido solforico.

Materie coloranti che si formano in queste reazioni. — Non ho ancora esaminato le materie coloranti che si formano in queste reazioni; ma, da saggi che ho fatto principalmente su quella azzurro-violetta che si produce colla fucsina ordinaria, risulta che essa è un derivato bromurato molto ricco di bromo, e pare una miscela di almeno due prodotti.

È tutta una serie di materie coloranti bromurate che si formano dai colori d'anilina previamente decolorati dai bisolfiti, e delle quali materie coloranti mi riserbo lo studio. Tanto più che trattasi di vedere se sono identiche o no a quelle bromurate che si ottengono direttamente dalle soluzioni di fucsina, ecc.

Torino. Laboratorio di Chimica farm. e tossic. R. Università.
15 Giugno 1912.

Sulla stabilità delle condotte d'acqua con tubi di grande diametro in cemento armato.

Nota del Socio C. GUIDI

In una precedente Nota, presentata a questa stessa Accademia nello scorso aprile, della quale fa seguito il presente scritto, abbiamo mostrato quali notevoli sforzi addizionali vengano prodotti nei tubi metallici di grande diametro impiegati nelle condotte forzate, in causa del peso proprio del tubo e della differenza di battente d'acqua ai diversi livelli della sezione trasversale del tubo, quando esso corre orizzontalmente o quasi. E se la flessibilità di pareti metalliche molto sottili può consentire notevoli deformazioni che costituiscono uno spontaneo adattamento alle dette sollecitazioni anormali, *quando il battente al di sopra del tubo è nullo o quasi*, per lo stesso motivo viene a mancare tale beneficio quando il tubo trovasi esposto alla pressione di un rilevante battente d'acqua al disopra del tubo stesso, perchè la detta pressione tende a ridare al tubo la sua forma circolare primitiva; cosicchè in tal caso, che è poi quello cui corrispondono i massimi sforzi interni, le deformazioni anormali risultando piccolissime, stanno le deduzioni teoriche cui giungemmo nella precedente Nota.

Col presente scritto vogliamo trattare della stessa questione per i tubi di grande diametro in cemento armato, come se ne costruiscono al giorno d'oggi con ardimento non sempre coronato da felice risultato. Per essi le condizioni statiche appaiono a prima vista più delicate per la natura stessa del materiale, che non permette, senza soluzioni di continuità, deformazioni notevoli, consentite invece da certi materiali metallici.

Se il tubo non fosse ricoperto da terra e rimanesse appoggiato sul suolo per una limitata ampiezza della superficie cilindrica esterna, alla ricerca delle quantità iperstatiche servirebbe la trattazione stessa indicata nella precedente Nota, d'accordo colle disposizioni dei vigenti regolamenti circa le opere in cemento armato, i quali prescrivono che per la determinazione delle quantità iperstatiche si valuti come reagente tutta la sezione del solido. Lievi modificazioni, delle quali si parlerà in seguito, verrebbero introdotte in causa della non trascurabile differenza fra i diametri interno ed esterno del tubo.

Ma spesso il tubo è interrato per circa metà altezza, e ricoperto, per l'altra metà, da uno strato di terra; nella presente Nota vogliamo occuparci appunto di questo tipo di costruzione, tentando una soluzione, sia pure approssimata, ma affatto generale, cioè valevole per tubi di vario diametro, onde dare un'idea generale delle sollecitazioni anormali cui possono andare esposte queste costruzioni. Valuteremo separatamente gli effetti prodotti :

a) dalla pressione idrostatica;
b) dal peso proprio del tubo e ricoprimento di terra;
c) dalla reazione del terreno.

Gli effetti prodotti dalla pressione idrostatica son quelli stessi già studiati nella precedente Nota, salvo lievi modificazioni, delle quali si parlerà in seguito, provenienti dalla differenza non trascurabile fra i diametri esterno ed interno del tubo.

Le sollecitazioni prodotte dal peso proprio del tubo e ricoprimento di terra possono essere ricavate volta per volta in modo, se non esatto, grandemente approssimato, quando sia di-

segnata la sezione trasversale dell'opera, calcolando gl'integrali che figurano nelle formole determinatrici delle quantità iperstatiche, se non esattamente, per approssimazione, nel modo ben noto, col dividere cioè la semisezione della costruzione in un certo numero pari di tronchi, con giunti radiali per il tubo, e verticali per il sovrapposto ricoprimento di terra, e sostituendo agl'integrali sommatorie da computarsi colla formola di Simpson. Naturalmente per la ricerca *esclusiva* delle sollecitazioni prodotte dalla detta causa *b)* si riguarda il semitubo, al solito, come incastrato nella sezione infima e sottratto da tutte le altre sollecitazioni.

Ma si può ancora ottenere una soluzione sufficientemente approssimata ed affatto generale, applicando per il peso proprio del tubo le stesse formole dedotte nella precedente Nota, sostituendo peraltro al raggio interno r, il raggio medio r_1 della corona circolare sezione del tubo; immaginando cioè condensata tutta la massa lungo la circonferenza di tale raggio, ed equiparando l'effetto prodotto dal peso della terra di ricoprimento a quello del peso della metà di tubo che rimane al disopra del terreno, e ciò colle formole che saranno indicate in seguito.

Più difficile è un giusto apprezzamento della reazione del terreno, per la grande sua variabilità proveniente dalla natura stessa del terreno, e per la sua indeterminazione statica. Senza tentare una soluzione esatta di tale quesito, la quale non potrebbe avere che la parvenza del rigore matematico, ci accontenteremo di una soluzione approssimata, o meglio prenderemo in esame due casi estremi, fra i quali verosimilmente sarà compreso il regime statico effettivo.

Immaginiamo scomposta la reazione del terreno (o dell'eventuale fondazione su cui riposasse il tubo) contro l'elemento della superficie esterna del tubo in una componente verticale ed in una orizzontale, come se il tubo presentasse una superficie esterna a riseghe con piani alternativamente verticali ed orizzontali. Quanto alla seconda, per la tendenza che ha il tubo ad ovalizzarsi, dovrebbe essa crescere d'energia andando dal basso verso l'alto; d'altra parte ricordando che l'intensità della spinta di un terrapieno, limitato superiormente da un piano, sui varî elementi di una parete piana cresce linearmente colla profondità

dei medesimi, sembra permesso ritenere in via di compenso e di semplificazione una distribuzione uniforme di tale reazione sulla proiezione verticale della parete esterna interrata del tubo. L'errore che può commettersi con tale ipotesi è ad ogni modo non grave *per un terreno ordinario*, tanto più se, come deve richiedersi per la stabilità, si fa assegnamento soltanto su di una frazione (al massimo $^1/_5$) della massima reazione che il terreno può sviluppare, cioè della così detta *spinta passiva*. Che anzi in una costruzione eseguita con criteri di larga stabilità, come dovrebbe effettivamente farsi in opere di tal genere, sarebbe opportuno e logico, *per un terreno ordinario,* trascurare del tutto tale reazione, la quale potrebbe eventualmente mancare, mentre, esistendo, non può che migliorare le condizioni statiche della costruzione.

Quanto alla reazione verticale, tenendo sempre presente la tendenza del tubo all'ovalizzazione, sembra logico ritenere che l'intensità cresca dalla mezzeria verso i fianchi; d'altra parte tale ipotesi favorendo la stabilità del tubo, converrà, per prudenza, considerare anche la possibilità di una reazione uniformemente distribuita sulla proiezione orizzontale del diametro, e perciò tratteremo in appresso questo secondo caso e quello di una legge di variazione lineare con valore zero in mezzeria.

Considerando, come si è fatto nella precedente Nota, l'equilibrio dell'unità di lunghezza di mezzo tubo, limitato dal piano diametrale verticale, riteniamone (Fig. 1 dell'annessa tavola) incastrata la sezione infima, e determiniamo la tensione orizzontale baricentrica H ed il momento M_0 (quantità ambedue iperstatiche) da applicare alla sezione trasversale al vertice, onde mantenere il semianello in equilibrio. Secondo la precedente Nota, le equazioni determinatrici di H ed M_0 si riducono alle

$$(1) \qquad \int M \frac{\partial M}{\partial M_0} ds = 0 \,, \qquad \int M \frac{\partial M}{\partial H} ds = 0$$

nelle quali $M = M_0 + Hy_1 + \mathfrak{M}$ è il momento flettente per una sezione qualunque S, se $\mathfrak{M}$ esprime algebricamente il momento, rispetto al baricentro della sezione S, delle forze applicate fra il vertice e la sezione S, ed y_1 il braccio di leva di H rispetto al detto baricentro.

Si ha pertanto $\frac{\partial M}{\partial M_0} = 1, \frac{\partial M}{\partial H} = y_1$ e quindi le (1) divengono

$$(2) \qquad \begin{cases} M_0 \int ds + H \int y_1 ds = - \int \mathfrak{M} ds \\ M_0 \int y_1 ds + H \int y_1^2 ds = - \int \mathfrak{M} y_1 ds \end{cases}$$

A differenza di quanto abbiamo fatto per i tubi metallici, terremo conto per quelli in cemento armato della differenza fra il diametro esterno e l'interno. Indicando con r il raggio interno, chiameremo r_2 quello esterno ed r_1 quello medio; si avrà perciò

$$ds = r_1 d\varphi , \qquad y_1 = r_1 (1 - \cos \varphi)$$

e quindi le (2) divengono

$$(3) \qquad \begin{cases} M_0 \int_0^\pi d\varphi + H \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) \, d\varphi = - \int_0^\pi \mathfrak{M} d\varphi \\ M_0 \int_0^\pi (1 - \cos\varphi) d\varphi + H r_1 \int_0^\pi (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi = - \int_0^\pi \mathfrak{M} (1 - \cos\varphi) d\varphi , \end{cases}$$

ed essendo

$$\int_0^\pi d\varphi = \pi, \quad \int_0^\pi (1 - \cos \varphi) \, d\varphi = \pi, \quad \int_0^\pi (1 - \cos \varphi)^2 \, d\varphi = \frac{3}{2} \pi ,$$

le (3) divengono

$$(4) \qquad \begin{cases} M_0 + H r_1 = - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathfrak{M} d\varphi \\ M_0 + \frac{3}{2} H r_1 = - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathfrak{M} (1 - \cos \varphi) \, d\varphi . \end{cases}$$

Espressioni delle quantità H ed M_0.

a) **Pressione idrostatica dovuta al battente** y. Essendo eguale ad 1 la densità del liquido ed indicando con ds_i l'elemento di arco interno, di raggio r, si ha

$$\mathfrak{M} = - \int_0^\varphi y \, ds_i r_1 \operatorname{sen} (\varphi - \psi) = - r^2 r_1 \int_0^\varphi (1 - \cos\psi) \operatorname{sen} (\varphi - \psi) d\psi .$$

Dal confronto di questa espressione con quella trovata nella precedente Nota, si deduce immediatamente

$$\int_0^\pi \mathfrak{M}\, d\varphi = -\frac{1}{2}\pi r^2 r_1\,, \qquad \int_0^\pi \mathfrak{M}\,(1-\cos\varphi)\, d\varphi = -\frac{7}{8}\pi r^2 r_1\,,$$

e quindi le (4) divengono

$$M_0 + H r_1 = \frac{1}{2} r^2 r_1\,, \qquad M_0 + \frac{3}{2} H r_1 = \frac{7}{8} r^2 r_1\,,$$

dalle quali si ricava

$$H = \frac{3}{4} r^2\,, \qquad M_0 = -\frac{1}{4} r^2 r_1\,. \tag{5}$$

b) **Peso proprio del tubo.** Dai risultati già ottenuti nella precedente Nota si deduce, indicando con γ_c la densità del cemento armato e con s lo spessore del tubo,

$$H = \gamma_c \frac{r_1}{2} s\,, \qquad M_0 = -\gamma_c \frac{r_1^2}{2} s\,. \tag{6}$$

c) **Ricoprimento in terra** equiparato, in via di approssimazione, al peso del tubo emergente dal terreno, immaginato condensato lungo la circonferenza di raggio r_1.

Da 0 a $\frac{\pi}{2}$ si ha per $\mathfrak{M}$ l'espressione già trovata nella precedente Nota per il peso proprio del tubo, e quindi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{M}\, d\varphi = \gamma_c r_1^2 s \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\varphi \operatorname{sen}\varphi + \cos\varphi - 1)\, d\varphi = 2\gamma_c r_1^2 s \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathfrak{M}\,(1-\cos\varphi)\, d\varphi =$$

$$= \gamma_c r_1^2 s \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\varphi \operatorname{sen}\varphi + 2\cos\varphi - \varphi \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi - \cos^2\varphi - 1)\, d\varphi$$

$$= \gamma_c r_1^2 s \left(3 - \frac{7}{8}\pi\right).$$

Da $\frac{\pi}{2}$ a π si ha (Fig. 2)

$$\mathfrak{M} = \gamma_c \frac{\pi r_1}{2} s \left(r_1 \operatorname{sen} \varphi - \frac{2r_1}{\pi}\right) = \gamma_c \frac{\pi r_1^2}{2} s \left(\operatorname{sen} \varphi - \frac{2}{\pi}\right)$$

$$\mathfrak{M} (1 - \cos \varphi) = \gamma_c \frac{\pi r_1^2}{2} s \left(\operatorname{sen} \varphi - \frac{2}{\pi} - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi + \frac{2}{\pi} \cos \varphi\right)$$

e quindi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathfrak{M}\, d\varphi = 0\,, \qquad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathfrak{M} (1 - \cos \varphi)\, d\varphi = - \gamma_c \frac{\pi r_1^2}{4} s \left(\frac{4}{\pi} - 1\right).$$

Sommando i precedenti risultati si ha

$$\int_0^{\pi} \mathfrak{M}\, d\varphi = 2\gamma_c r_1^2 s \left(1 - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\int_0^{\pi} \mathfrak{M} (1 - \cos \varphi)\, d\varphi = 2\gamma_c r_1^2 s \left(1 - \frac{5}{16} \pi\right),$$

e però le (4) divengono

$$M_0 + H r_1 = - 2\gamma_c \frac{r_1^2}{\pi} s \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$M_0 + \frac{3}{2} H r_1 = - 2\gamma_c \frac{r_1^2}{\pi} s \left(1 - \frac{5}{16} \pi\right)$$

dalle quali si ricava

$$H = \gamma_c \frac{r_1}{4} s\,, \qquad M_0 = - \gamma_c \frac{r_1^2}{4} s \left(\frac{8}{\pi} - 1\right). \tag{7}$$

d) **Reazione orizzontale del terreno** (Fig. 3). Indicando con q_0 l'intensità della reazione, supposta costante alle diverse profondità per le ragioni già sopra dette, la reazione elementare è $q_0 r_2 \operatorname{sen} \psi\, d\psi$; il braccio di leva della medesima rispetto al baricentro della sezione generica dell'anello è $r_1 \cos (180 - \varphi) - r_2 \cos (180 - \psi) = r_2 \cos \psi - r_1 \cos \varphi$; quindi, indicando con γ_t la densità del terreno, si avrà

$$\mathfrak{M} = \gamma_t q_0 r_2^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \operatorname{sen} \psi \left(\cos \psi - \frac{r_1}{r_2} \cos \varphi\right) d\psi$$

$$= \gamma_t q_0 r_2^2 \cos^2 \varphi \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{2}\right),$$

e quindi

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathfrak{M}\, d\varphi = \frac{1}{4}\, q_0\, \pi\, r_2^2 \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathfrak{M}\, (1 - \cos\varphi)\, d\varphi = \frac{1}{4}\, q_0\, \pi\, r_2^2 \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{8}{3\pi}\right),$$

e però le (4) divengono

$$M_0 + Hr_1 = -\frac{1}{4}\, q_0\, r_2^2 \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{2}\right)$$

$$M_0 + \frac{3}{2}\, Hr_1 = -\frac{1}{4}\, q_0\, r_2^2 \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{8}{3\pi}\right),$$

dalle quali si deduce

$$H = -\frac{4r_2}{3\pi}\, q_0 \left(1 - \frac{r_2}{2r_1}\right)$$

$$M_0 = q_0\, r_2^2 \left[\frac{4}{3\pi}\left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{8} - \frac{r_1}{4r_2}\right].$$

Per valutare q_0, corrispondente, come già si è detto, ad $^1/_5$ della spinta passiva, ricordando che la spinta passiva di un terrapieno a profilo superiore orizzontale contro una parete verticale di altezza h che arriva fino al detto profilo è data dalla

$$S_t = \frac{1}{2}\, \gamma_t\, h^2 \left(\frac{1 + \operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\right)^2$$

dove φ è l'angolo d'attrito delle terre, porremo l'equazione

$$q_0 = \frac{1}{5}\, \frac{1}{r_2}\, \frac{1}{2}\, \gamma_t\, r_2^2 \left(\frac{1 + \operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\right)^2.$$

Per un terreno ordinario, facendo $\varphi = 37°$, risulta

$$q_0 = \frac{2}{5}\, \gamma_t\, r_2 \sim$$

e quindi

$$(8)\quad \begin{cases} H = -\dfrac{8}{15}\,\gamma_t\,\dfrac{r_2^2}{\pi}\left(1-\dfrac{r_2}{2r_1}\right) \\ M_0 = \dfrac{2}{5}\,\gamma_t r_2^3\left[\dfrac{4}{3\pi}\left(\dfrac{r_1}{r_2}-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{8}-\dfrac{r_1}{4r_2}\right]. \end{cases}$$

e) **Reazione verticale del terreno, supposta distribuita uniformemente.** Indicando con q_v l'intensità della reazione, la reazione elementare è $-q_v r_2 \cos\psi\, d\psi$; il braccio di leva della medesima rispetto al baricentro della sezione generica S dell'anello (Fig. 4) è $r_2 \operatorname{sen}\psi - r_1 \operatorname{sen}\varphi$, quindi

$$\mathfrak{M} = -q_v r_2^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \cos\psi\left(\operatorname{sen}\psi - \frac{r_1}{r_2}\operatorname{sen}\varphi\right) d\psi$$

$$= q_v r_2^2\left[\frac{1}{2}\cos^2\varphi + \frac{r_1}{r_2}\operatorname{sen}\varphi\,(\operatorname{sen}\varphi - 1)\right]$$

e però

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathfrak{M}\, d\varphi = \frac{q_v r_2^2}{2}\left[\frac{\pi}{4} + 2\,\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{\pi}{4}-1\right)\right]$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathfrak{M}\,(1-\cos\varphi)\, d\varphi = q_v\,\frac{r_2^2}{2}\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{r_1}{r_2}\right)+\frac{2}{3}-\frac{7}{3}\,\frac{r_1}{r_2}\right]$$

quindi le (4) divengono

$$M_0 + Hr_1 = -\frac{q_v r_2^2}{2}\left[\frac{1}{4} + 2\,\frac{r_1}{r_2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{\pi}\right)\right]$$

$$M_0 + \frac{3}{2}\,Hr_1 = -q_v\,\frac{r_2^2}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{r_1}{r_2}\right)+\frac{1}{3\pi}\left(2-7\,\frac{r_1}{r_2}\right)\right]$$

dalle quali si ricava

$$(9)\quad \begin{cases} H = -\dfrac{q_v r_2}{3\pi}\left(2\,\dfrac{r_2}{r_1}-1\right) \\ M_0 = \dfrac{q_v r_2^2}{2}\left[\dfrac{r_1}{r_2}\left(\dfrac{4}{3\pi}-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{4}{3\pi}-\dfrac{1}{4}\right]. \end{cases}$$

L'intensità q_v è data dall'equazione

$$(10) \quad q_v = \frac{1}{r_2}\left(\frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{3}{2}\gamma_c \pi r_1 s\right) = \frac{\pi r^2}{2 r_2}\left(1 + 3\gamma_c \frac{s}{r}\frac{r_1}{r}\right).$$

f) **Reazione verticale del terreno, supposta distribuita con legge lineare con valore nullo in mezzeria.** Rappresentando con q_v' l'intensità massima della reazione, quella corrispondente all'angolo ψ sarà $q_v' \frac{r_2 \operatorname{sen} \psi}{r_2}$ cioè $q_v' \operatorname{sen} \psi$; la reazione elementare è $-q_v' r_2 \operatorname{sen} \psi \cos \psi \, d\psi$ ed il suo braccio di leva rispetto al baricentro della sezione generica S dell'anello è $r_2 \operatorname{sen} \psi - r_1 \operatorname{sen} \varphi$, quindi

$$\mathfrak{M} = -q_v' r_2^2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} \operatorname{sen} \psi \cos \psi \left(\operatorname{sen} \psi - \frac{r_1}{r_2} \operatorname{sen} \varphi\right) d\psi$$

ossia

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{3} q_v' r_2^2 \left(1 - \frac{3}{2}\frac{r_1}{r_2} \operatorname{sen} \varphi \cos^2 \varphi - \operatorname{sen}^3 \varphi\right)$$

e però:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathfrak{M} \, d\varphi = \frac{1}{6} q_v' r_2^2 \left(\pi - \frac{4}{3} - \frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \mathfrak{M} (1 - \cos \varphi) \, d\varphi = \frac{1}{6} q_v' r_2^2 \left(\pi + \frac{1}{6} - \frac{7}{4}\frac{r_1}{r_2}\right)$$

e quindi le (4) divengono

$$M_0 + H r_1 = -\frac{1}{6}\frac{q_v' r_2^2}{\pi}\left(\pi - \frac{4}{3} - \frac{r_1}{r_2}\right)$$

$$M_0 + \frac{3}{2} H r_1 = -\frac{1}{6}\frac{q_v' r_2^2}{\pi}\left(\pi + \frac{1}{6} - \frac{7}{4}\frac{r_1}{r_2}\right)$$

da cui

$$(11) \quad H = -\frac{1}{2}\frac{q_v' r_2}{\pi}\left(\frac{r_2}{r_1} - \frac{1}{2}\right), \quad M_0 = \frac{1}{6}\frac{q_v' r_2^2}{\pi}\left(\frac{13}{3} - \pi - \frac{r_1}{2r_2}\right)$$

nelle quali evidentemente $q_v' = 2q_v$.

Se supponiamo $r_1 = 1{,}075\, r$, $r_2 = 1{,}15\, r$ e per conseguenza $s = r_2 - r_1 = 0{,}15\, r$ e poniamo inoltre $\gamma_c = 2{,}5$ e $\gamma_t = 1{,}8$, otteniamo per le diverse cause sopra contemplate i seguenti valori di H e di M_0.

N° d'ordine	Sollecitazione	$\frac{H}{r^2}$	$\frac{M_0}{r^3}$
1	Pressione idrostatica con battente y	0,7500	— 0,2688
2	Peso proprio del tubo	0,2016	— 0,2167
3	Ricoprimento di terra equiparato in via d'approssimazione al peso della porzione di tubo emergente dal terreno . . .	0,1008	— 0,1674
4	Reazione orizzontale del terreno valutata $^1/_5$ di quella corrispondente alla spinta passiva, e supposta distribuita uniformemente sulla proiezione verticale del tubo	— 0,1880	0,0830
5	Reazione verticale del terreno supposta distribuita uniformemente sulla proiezione orizzontale	— 0,4195	0,2069
6	Id. id. supposta variare linearmente, con valore nullo in mezzeria	— 0,6293	0,3066

In virtù del principio della sovrapposizione degli effetti, sommando algebricamente i valori corrispondenti alle sollecitazioni 1, 2, 3, 4, 5 ovvero a quelle 1, 2, 3, 4, 6 otterremo i

valori complessivi di H ed M_0 corrispondenti alla prima ipotesi riguardo alla reazione verticale del terreno, ovvero alla seconda,

	$\frac{H}{r^2}$	$\frac{M_0}{r^3}$	$\frac{1}{r}\ \frac{M_0}{H}$
Ipotesi I . . .	0,4449	— 0,3630	— 0,816
Ipotesi II . . .	0,2351	— 0,2633	— 1,120

i quali individuano completamente in grandezza e posizione la tensione orizzontale totale attraverso alla sezione al vertice.

Le quantità analoghe per la sezione infima si deducono (V. 1ª Nota) da equazioni della Statica, e cioè

$$H_1 = \frac{1}{2}(2r)^2 - q_0 r_2 - H = \left[2 - \frac{2}{5}\gamma_t \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 - \frac{H}{r^2}\right] r^2$$

$$M_1 = M_0 + H 2r_1 - r^2 r_1 \int_0^\pi \operatorname{sen}\psi\,(1 - \cos\psi)\,d\psi -$$

$$-\frac{3}{2}\gamma_c \pi r_1 s \frac{2r_1}{\pi} + q_0 r_2 \frac{r}{2} + \begin{cases} q_v \dfrac{r_2^{\,2}}{2} & \text{I Ipotesi} \\ \dfrac{1}{2} q_v' r_2 \dfrac{2}{3} r_2 & \text{II} \quad " \end{cases}$$

ossia

$$M_1 = r^3 \left\{\frac{M_0}{r^3} + 2\frac{r_1}{r}\left(\frac{H}{r^2} - 1\right) - 3\gamma_c \frac{s}{r}\left(\frac{r_1}{r}\right)^2 + \frac{1}{5}\gamma_t \left(\frac{r_2}{r}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \begin{cases} \dfrac{\pi}{4}\dfrac{r_2}{r}\left(1 + 3\gamma_c \dfrac{s}{r}\dfrac{r_1}{r}\right) & \text{I Ipotesi} \\ \dfrac{\pi}{3}\dfrac{r_2}{r}\left(1 + 3\gamma_c \dfrac{s}{r}\dfrac{r_1}{r}\right) & \text{II} \quad " \end{cases} \right\}$$

e coi valori numerici supposti per γ_t e γ_c e per i rapporti fissati di r_1 ed r_2 ad r si ottiene

$$H_1 = \left(1{,}0478 - \frac{H}{r^2}\right) r^2$$

$$M_1 = r^3 \left\{\frac{M_0}{r^3} + 2{,}15\left(\frac{H}{r^2} - 1\right) + \begin{matrix} 1{,}1715 \\ 1{,}8367 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{I Ipotesi} \\ \text{II} \quad " \end{matrix}$$

e sostituendo ad $\frac{H}{r^2}$ ed $\frac{M_0}{r^3}$ i loro valori si ha

	$\frac{H_1}{r^2}$	$\frac{M_1}{r^3}$	$\frac{1}{r}\frac{M_1}{H_1}$
Ipotesi I . . .	0,6029	— 0,3850	— 0,639
Ipotesi II . . .	0,8127	— 0,0711	— 0,087

Nella Fig. 5 vedonsi tracciate sulla sezione del tubo le *curve funicolari* corrispondenti alle due ipotesi considerate; la curva disegnata a tratti e punti è relativa alla ipotesi I; quella punteggiata corrisponde alla ipotesi II. Nella Fig. 6 vedonsi disegnate anche le corrispondenti curve delle forze per il semianello sinistro. Questo è diviso in 16 tronchi di eguale lunghezza, ed in altrettanti archetti sono divise le curve delle forze; le divisioni che portano i medesimi numeri delle sezioni del semianello individuano, come è noto, i segmenti equipollenti alle risultanti relative alle dette sezioni (vettori che vanno dal polo ai detti punti di divisione) le cui linee d'azione sono le tangenti alle rispettive curve funicolari, parallele ai detti raggi.

Sulla sezione del tubo furono anche disegnati i diagrammi del momento flettente, i cui valori furono portati radialmente, a partire dall'asse geometrico dell'anello, verso il centro quelli negativi, cioè tendenti a diminuire la curvatura dell'anello, in fuori quelli positivi, tendenti ad aumentarla. Questa rappresentazione, ancor più delle *curve funicolari*, mette in chiaro la diminuzione della sollecitazione a flessione nelle sezioni dell'anello e specialmente nell'infima, apportata dalla ripartizione lineare della reazione verticale del terreno ammessa nell'ipotesi II; fa cioè vedere di quale grande vantaggio sia una poderosa reazione del terreno contro i fianchi del tubo, la quale viene spontaneamente provocata da un'ovalizzazione del medesimo. Ma fare assegnamento su tale beneficio specialmente trattandosi di un materiale come il beton armato, il quale, come già si è detto, non permette notevoli deformazioni senza che producansi soluzioni di continuità, non sembra prudente.

L'andamento delle curve funicolari e delle curve dei momenti mostra l'opportunità di avvicinare l'armatura metallica anulare verso l'intradosso alla chiave ed al basso, e verso l'estradosso ai fianchi, come è rappresentato nella Fig. 5 per il quadrante destro superiore. Ed infatti con tale andamento dell'armatura si diminuisce lo sforzo di compressione nel beton prodotto dalle sollecitazioni anormali contemplate nel presente studio.

Esempio. — Consideriamo una condotta di m. 3 di diametro interno, di cm. 22 di spessore, con un battente $h =$ m. 20

$$r = \text{m. } 1{,}50\,, \qquad h = \text{m. } 20\,, \qquad s = \text{cm. } 22 = \sim 0{,}15\,r.$$

La sezione F_m dell'armatura metallica anulare per m. corr. di tubo, calcolata in base al battente h, assumendo un carico di sicurezza di $1\,{}^{t}/_{cm^2}$, è

$$F_m = \frac{hr}{k} = \frac{20 \times 1{,}50}{10000} = \text{m}^2\, 0{,}003 = \text{cm}^2\, 30$$

che potrà essere formata da 10 tondini di mm. 20 di diametro, cui corrisponde $F_m = \text{cm}^2\, 31{,}4$.

Calcoliamo lo sforzo unitario massimo σ_c nel beton e lo sforzo unitario σ_m nel ferro nelle due ipotesi di $h = 0$ e di $h =$ m. 20.

Supposto $h = 0$, ed ammessa l'ipotesi I, la sezione più cimentata è quella infima; essa trovasi sollecitata in X (Fig. 7) da uno sforzo di tensione (V. Tabella precedente)

$$H_1 = 0{,}6029 \times 1{,}50^2 = \text{t. } 1{,}357 = \text{kg. } 1357$$

alla distanza δ dal lembo compresso del beton (V. Tabella precedente)

$$\delta = 0{,}639 \times 150 + 11 = \text{cm. } 106{,}8.$$

Immaginando posta l'armatura anulare a distanza $h' =$ cm. 15 dal lembo compresso, si ha inoltre

$$h' = \text{cm. } 15\,, \qquad \eta = \delta - h' = \text{cm. } 91{,}8\,, \qquad b = \text{cm. } 100.$$

L'altezza y della porzione di sezione in beton reagente a pressione viene determinata dall'equazione dei momenti intorno al punto X

$$n\sigma_c \frac{h'-y}{y} F_m \eta = \frac{1}{2}\sigma_c by\left(\delta - \frac{1}{3}y\right)$$

nella quale, al solito, $n = \frac{E_m}{E_c} = 10$. Ossia

$$-y^3 + 3\delta y^2 + 6n\frac{F_m\eta}{b}y = 6n\frac{F_m\eta h'}{b}$$

ed introducendo i valori numerici sopra indicati

$$-y^3 + 3 \times 106{,}8\, y^2 + 60\,\frac{31{,}4 \times 91{,}8}{100}\,y = 60\,\frac{31{,}4 \times 91{,}8 \times 15}{100}$$

da cui

$$y = \text{cm. } 6{,}7.$$

Si deduce in conseguenza

$$\sigma_c = \frac{2H_1\eta}{by\left(h' - \frac{y}{3}\right)} = \frac{2 \times 1357 \times 91{,}8}{100 \times 6{,}7 \times 12{,}8} = \sim 29\ {}^{\text{Kg}}/_{\text{cm}^2}$$

$$\sigma_m = n\sigma_c\frac{h'-y}{y} = 290\,\frac{8{,}3}{6{,}7} = \sim 360\ {}^{\text{Kg}}/_{\text{cm}^2}.$$

Quando invece il tubo è sotto il carico completo si ha

$$H_1' = \left(\frac{h}{r} + 0{,}6029\right)r^2 = \left(\frac{20}{1{,}50} + 0{,}6029\right)1{,}50^2$$
$$= \text{t. } 31{,}357 \equiv \text{Kg. } 31357$$

$$\delta = \frac{M_1}{H_1'} + 0^{\text{m}}{,}11 = \frac{0{,}3850\, r^3}{\left(\frac{h}{r} + 0{,}6029\right)r^2} + 0{,}11 = \frac{0{,}3850}{\frac{20}{1{,}5} + 0{,}6029}\,1{,}50 + 0{,}11$$

ossia

$$\delta = \text{m. } 0{,}15$$

cioè il centro di sollecitazione cade esattamente in corrispondenza dell'armatura, e quindi la H_1' è esclusivamente sopportata dal ferro (dovendosi al solito prescindere dalla resistenza del beton alla tensione) con uno sforzo unitario

$$\sigma_m = \frac{31356}{31,4} = \sim 1000 \ ^{\mathrm{Kg}}/_{\mathrm{cm}^2}.$$

È interessante la legge di variazione di δ, y, σ_c, σ_m per valori crescenti di h, ed a tale scopo abbiamo riportato nella seguente tabella i valori delle dette quantità quando h cresce di 5 in 5 metri, facendo astrazione, al solito, come è prescritto dai vigenti regolamenti, dalla resistenza del conglomerato alla tensione

h m.	δ cm.	y cm.	σ_c Kg/cm²	σ_m Kg/cm²
0	106,8	6,7	29	360
5	25,7	5,2	28	530
10	19,0	4,0	23	630
15	16,4	2,6	18	858
20	15,0	0	0	1000

I risultati notevolissimi di questo calcolo numerico mostrano che in questi tubi si utilizza al massimo la resistenza del conglomerato alla compressione nel periodo in cui il battente h è nullo. Tale contributo del beton va mano mano scemando quando h cresce, per subentrare invece con crescente intensità la resistenza dell'armatura anulare metallica alla tensione, finchè, a carico completo, la sollecitazione viene esclusivamente, o quasi, sopportata dalla detta armatura, non rimanendo più al conglomerato che l'ufficio d'involucro.

Torino, Giugno 1912.

Ricerche lito-mineralogiche sopra alcuni pozzi profondi della pianura padana.

II. — *Pozzi di Suzzara, Galliera, Massa Lombarda e Lodi.*

Nota di ALESSANDRO ROCCATI.

Proseguendo lo studio, iniziato con il pozzo di Alessandria (1), sopra alcuni pozzi profondi della pianura padana, presento in questa nota il risultato delle mie ricerche lito-mineralogiche sopra i materiali delle trivellazioni di Suzzara, Galliera, Massa Lombarda e Lodi.

1. *Pozzo di Suzzara.*

Il pozzo di Suzzara, comune della provincia di Mantova, sulla destra del Po a 20 m. s. l. m., fu trivellato dalla Ditta G. Piana nel 1896, per incarico del Municipio, allo scopo di ricercare acqua potabile.

La terebrazione fu spinta fino a 257 m. di profondità senza ottenere un gran risultato, non essendosi trovata la falda sperata (2); dal lato geo-litologico la trivellazione di Suzzara ha però notevole importanza, essendo uno dei pozzi che sono stati spinti a maggior profondità nella pianura padana. Per questo appunto ho creduto interessante uno studio del materiale, che nella collezione del Museo Geo-Mineralogico del R. Politecnico di Torino comprende N. 31 esemplari, purtroppo non molto abbondanti, ma che ad ogni modo mi permisero uno studio completo, seguendo le norme già indicate per il pozzo di Alessandria.

---

(1) *Ricerche lito-mineralogiche sopra alcuni pozzi profondi della pianura padana.* I. *Pozzo di Alessandria*, " Atti R. Accad. delle Sc. di Torino ", vol. XLVII, disp. 13ª, 1912.

(2) F. Sacco, *Geoidrologia dei pozzi profondi della valle padana*, " Annali R. Acc. Agricoltura di Torino ", vol. LIV, 1912.

La serie, che incomincia a 14 metri di profondità, cioè al disotto della zona sabbiosa-argillosa che contiene la falda acquea dei pozzi normali della regione, comprende:

Metri 14-20.

Argilla grigia-chiara, fortemente calcarea, alquanto magnesifera.

Il residuo sabbioso, ottenuto mediante ripetute levigazioni, è poco abbondante, finissimo, e risulta costituito essenzialmente da *quarzo* ialino, latteo e giallognolo, con altro *quarzo* rossastro, *feldspato* rossastro alterato, *pasta felsitica*, *mica* bianca, *clorite*, *orneblenda*, *attinoto* in piccoli solidi di sfaldatura, i quali ricordano perfettamente quelli già incontrati nel materiale del pozzo di Alessandria, *granato* roseo, *serpentino*, *tormalina* bruna in frammenti di cristalli emimorfici.

Fossili. Frustuli di lignite; opercoli di *Bithynia* e frammenti rotolati di conchiglie non determinabili.

Metri 20-23.

Sabbia finissima, grigia, poco argillosa.

Liberata dall'argilla che la inquina, la sabbia, trattata con ac. cloridrico, dà viva e duratura effervescenza; la soluzione si intorbida per la separazione di abbondante sostanza argillosa e dalla soluzione stessa precipitano poscia, in parti si può dire uguali, calce e magnesia. Esistono quindi nella sabbia numerosi grani di calcare e dolomite contenenti argilla.

Dopo l'eliminazione dei carbonati il materiale ha tinta rossigna dovuta a numerosi grani rossastri di *quarzo*, *feldspato* e *pasta felsitica*, provenienti dalla disgregazione di roccie porfiriche, di cui si osservano pure piccole ghiaie commiste alla sabbia.

Il materiale di origine porfirica, insieme a *quarzo* ialino, *feldspato* biancastro alterato, *mica* bianca e bruna (questa più rara) e *clorite* sono i componenti essenziali della sabbia. Molto subordinati sono: *granato* roseo, *orneblenda*, *attinoto*, *serpentino*, *augite* verde-scura con altro *pirosseno* quasi incoloro, *epidoto*, *tormalina* bruna, *rutilo* granulare giallo, *zircone* e discreta quantità di *magnetite*.

Metri 23-26.

Argilla grigia-chiara, fortemente calcarea, con abbondante residuo di sabbia rossiccia corrispondente a quella prima descritta.

Metri 26-34.

Sabbia finissima, di color grigio-chiaro, con poca sostanza argillosa.

Il materiale è nettamente differente da quello incontrato al livello 20-23, specialmente per la scarsezza dei carbonati e dei detriti di roccia porfirica; esso è costituito prevalentemente da *quarzo*, *feldspato* (*ortosio* e *plagioclasi*, sia acidi che basici) e *mica* molto abbondante, in lamine aventi diametro fin di 2 mm. Queste sono specialmente di *muscovite* e non di rado contengono inclusioni di *tormalina* o di *rutilo*.

Gli altri componenti sono: *granato* roseo, *clorite*, *tormalina* incolora e bruna, la cui frequenza è affatto caratteristica; *orneblenda*, *attinoto* e *glaucofane* a tinta chiara; *augite* verde-scura e altro *pirosseno* quasi incoloro; *rutilo*; *cianite* con tinta azzurrognola-chiara; *zircone*. La *magnetite* è poco abbondante.

Metri 34-40.

Sabbia fina, grigia, con scarsa argilla; poco calcarea. Contiene frustuli torbosi.

La composizione mineralogica corrisponde a quella del livello precedente, ma vi è affatto caratteristica la frequenza del *granato*, che rappresenta circa i $^2/_3$ del residuo ottenuto con il liquido di Klein; scarseggia invece la mica, per quanto vi siano lamine di *muscovite* aventi fin 3 mm. di diametro. Pure rara è la *tormalina*.

Metri 40-43.

Sabbia analoga alla precedente, ma un po' più voluminosa e più fortemente calcarea.

Metri 50-56 (1).

Argilla grigia, poco calcarea.

La parte sabbiosa è costituita quasi esclusivamente da *granato* roseo e da *rutilo* granulare giallo.

Metri 56-59.

Argilla brunastra, fortemente calcarea; il residuo sabbioso è scarsissimo e rappresentato essenzialmente da *quarzo*. Abbondano i frustuli torbosi.

È notevole il fatto che dalla soluzione risultante dal trattamento del materiale con acido cloridrico precipita discreta quantità di SiO_2 e di Al_2O_3, il che tenderebbe a dimostrare la presenza nell'argilla di un silicato alluminifero, decomponibile dall'acido cloridrico, e che ho ritrovato a parecchi altri livelli.

Fossili. Frammenti di conchiglie, poco fluitati, di *Veneridi.*

Metri 59-62.

Argilla grigia-verdognola, poco calcarea, alquanto sabbiosa e contenente piccole concrezioni limonitiche e frustuli torbosi.

Il residuo sabbioso consta essenzialmente di *quarzo* e di frustuli di *mica* bianca.

Metri 62-68.

Argilla grigia-brunastra, pochissimo calcarea, con abbondante sostanza torbosa e residuo sabbioso nullo.

Metri 68-74.

Sabbia finissima, argillosa-calcarea.

Il materiale corrisponde, salvo la maggior quantità di argilla, perfettamente a quello del livello m. 20-23. Abbiamo infatti nuovamente abbondanti *carbonati* e frammenti rossigni di *quarzo*, *feldspato* e *pasta felsitica*, mentre scarseggiano i *granati*, gli *anfiboli* ed i *pirosseni*; la *tormalina* bruna sembra mancar del tutto.

---

(1) Nella serie della collezione manca l'esemplare corrispondente al livello metri 43-50, che deve però essere rappresentato da *sabbia* fina (Vedi Sacco, *Geoidrologia*, ecc., loc. cit.).

Dalla parte argillosa trattata con ac. cloridrico si ottiene nuovamente notevole quantità di SiO_2 e di Al_2O_3.

Metri 74-78.

Argilla marnosa, grigia-chiara, con sabbia finissima.

È materiale corrispondente a quello del livello precedente, ma con prevalenza della parte argillosa-calcarea sulla sabbiosa.

Metri 78-80.

Argilla marnosa, giallognola, contenente concrezioni ocracee-rossastre e *calcarelli* arenacei.

Mediante ripetute levigazioni si ottiene un piccolo residuo sabbioso costituito essenzialmente da *quarzo*.

Metri 80-89.

Sabbia finissima, grigia, poco argillosa.

Liberato dall'argilla e trattato con ac. cloridrico, il materiale dà forte effervescenza e dalla soluzione precipitano calce e magnesia press'a poco nelle stesse proporzioni; abbiamo quindi ancora presenza di granuli calcarei e dolomitici.

La parte rimanente dopo eliminati i carbonati contiene i minerali incontrati ai livelli superiori, compresi i frammenti felsitici; predomina però il *quarzo* con abbondante *mica* bianca. Vi è pure discreta quantità di *serpentino* con *magnetite*.

Caratteristica è la presenza di un feldspato triclino in frammenti di sfaldatura con ben visibili le linee della geminazione polisintetica; la grossezza di qualche frammento mi permise di fare un preparato microscopico del minerale, i cui caratteri corrispondono bene a quelli della *labradorite*.

Metri 89-92.

Sabbia analoga alla precedente con numerosi grumi argillosi.

Metri 92-95.

Argilla brunastra, fortemente calcarea-magnesifera, con molti frustuli torbosi e abbondantissimi frustuli di *mica* bianca.

Il residuo sabbioso è quasi trascurabile con pochi granuli quarzosi e felsitici.

Fossili. Opercoli di *Bithynia*.

Metri 95-98.

Argilla marnosa, gialla-chiara, con abbondanti frustuli micacei.

Il residuo sabbioso è poco abbondante, ma complesso con *quarzo*, *pasta felsitica, clorite* in splendide laminette, *anfiboli* (fra cui *attinoto* verde-chiaro in fibre lunghe anche 3 mm.), *pirosseno*, *granato* e *tormalina* bruna.

Trattando l'argilla con ac. cloridrico, oltre a calce, magnesia ed abbondante ferro, si ottiene, come già ad altri livelli, SiO_2 e Al_2O_3.

Metri 98-101.

Argilla marnosa, analoga alla precedente, ma di color grigio.

Contiene concrezioni ocracee rosse e abbondanti frustuli torbosi.

Metri 101-104.

Argilla grigia-giallognola, poco calcarea, con frustuli torbosi e micacei.

Il residuo sabbioso, poco abbondante, comprende *quarzo*, *granato*, *tormalina* bruna, *serpentino* ed alquanta *magnetite*.

Metri 104-110.

Argilla grigia, grumosa, poco calcarea; nel trattamento con ac. cloridrico si ottiene nuovamente SiO_2 e Al_2O_3.

Il residuo sabbioso è discretamente abbondante, finissimo, costituito dai soliti minerali; mancano però i frammenti felsitici.

Metri 110-113.

Argilla grigia, fortemente calcarea-magnesifera, contenente numerose ghiaiette e sabbia finissima.

Le ghiaiette, che raggiungono fin $^1/_2$ cm. di diametro, sono delle seguenti roccie: *Calcare dolomitico* grigio; *serpentino* (ab-

bondante a questo livello); *quarzo*; *micaschisto granatifero-tormalinifero*; *porfido rossastro* fortemente caolinizzato; *porfido* a pasta verdastra.

Nella parte sabbiosa, che è costituita essenzialmente da *quarzo*, determinai: *granato* roseo (molto abbondante), *frammenti felsitici*, *anfibolo*, *pirosseno*, *epidoto*, *serpentino*, *cianite*, *rutilo*, *tormalina* bruna e molta *magnetite*, i cui granuli aderiscono talora a frammenti di serpentino.

Fossili. Frammenti non determinabili di conchiglie marine e terrestri.

Metri 114-118.

Ghiaia minuta con sabbia, ma senza argilla.

Le ghiaiette (alcune delle quali raggiungono fin 1 cm. di diametro) sono delle seguenti roccie: *Quarzo*, *serpentino* nero e verde-giallognolo, subtrasparente; *gneiss vari*: a biotite, a due miche, anfibolico; *schisto micaceo-cloritico*; *schisto micaceo con attinoto*; *schisto micaceo con granato*; *porfido* rossastro e verde; *granito* bianco; pochi frammenti sono di *calcare* grigio dolomitico.

La parte sabbiosa rappresenta circa $^1/_3$ del materiale e comprende pochissimi *carbonati* e scarsa *mica*, essendo invece per circa metà costituita da *quarzo*, *feldspati* e *frammenti felsitici*, per l'altra metà da minerali colorati: *granato*, *serpentino* (fra cui grosse fibre di *crisotilo*), *anfibolo*, *pirosseno*, *tormalina* bruna, *rutilo* ed abbondante *magnetite*, fra cui alcuni piccoli ottaedri perfetti.

Metri 118-119.

Argilla grigia-bruna chiara, fortemente calcarea-magnesifera, con abbondanti frustuli di *mica*.

Il residuo sabbioso è minimo con *granato*, *quarzo*, *rutilo*, *anfibolo*, *pirosseno*, *serpentino* e *tormalina* bruna.

Metri 119-125.

Sabbia finissima, fortemente argillosa, con grumi marnosi e concrezioni di limonite.

Liberata dall'argilla (che rappresenta oltre $^1/_3$ del materiale) e dai carbonati, i cui granuli formano circa il 50 $^0/_0$ della massa e sono di *calcare* e *dolomite*, risulta essenzialmente di

quarzo con *feldspato*, *mica* bianca e bruna e *clorite*, fra cui alcune ampie, splendide lamine. Gli altri componenti, affatto subordinati, sono: *serpentino*, *anfiboli* (*orneblenda*, *glaucofane* e *attinoto* in piccoli solidi di sfaldatura), *augite* verde-scura, *granato* roseo, *tormalina* bruna, *rutilo* e discreta quantità di *magnetite*.

Metri 125-128.

Sabbia analoga alla precedente, ma a grana maggiore e priva quasi totalmente di argilla.

Metri 128-131.

Sabbia finissima, fortemente argillosa, calcarea-magnesifera. Corrisponde esattamente a quella del livello 119-125.

Metri 131-137.

Sabbia analoga alla precedente.

Vi è però caratteristica l'abbondanza del *granato*, di cui sembra essersi operata una vera concentrazione naturale; molto scarsa è invece la *mica*, per quanto vi siano lamine di *muscovite* con diametro fin di 3 mm.

Metri 137-140.

Sabbia grigia, finissima, molto argillosa, ma poco calcarea; contiene abbondanti frustuli di torba.

La composizione mineralogica corrisponde a quella dei livelli superiori con prevalenza del *quarzo* e del *granato* roseo; sembra mancare il *serpentino*, donde anche la scarsa quantità di *magnetite*.

La serie da me studiata presenta a questo punto una interruzione, per chiudersi con un esemplare proveniente dall'ultimo livello raggiunto dal pozzo, cioè da

Metri 257.

Sabbia finissima con forte quantità di argilla (circa 50 $^0/_0$), pochissimo calcarea.

Liberata dall'argilla la sabbia è di color grigio chiaro-bianco corrispondentemente alla sua composizione che risulta in gran

prevalenza di *quarzo* con poco *feldspato* e *mica* (*muscovite* e *biotite*). Vi sono pochissimi altri minerali: *orneblenda*, *attinoto* in piccoli solidi di sfaldatura, *granato* e *serpentino*. È notevole a questo livello la scarsezza del granato già invece così abbondante ai livelli superiori.

* * *

Dall'esame del materiale incontrato ai differenti livelli nel pozzo di Suzzara e dal suo confronto con la composizione delle sabbie dell'Adige e del Po minutamente studiate dall'Artini (1), si può con tutta probabilità dedurre che tale materiale rappresenta una mescolanza delle alluvioni del Po con quelle dell'Adige.

Anzi sembrerebbe che normalmente (eccetto forse nell'ultimo livello) le alluvioni dell'Adige siano in prevalenza su quelle del Po, il che è indubitato per i livelli in cui vedemmo così abbondanti i granuli di pasta felsitica, i quali devono provenire dallo sfacelo dei porfidi del Trentino, e che l'Artini indica appunto come caratteristici delle sabbie dell'Adige, insieme all'augite, alla cianite, alla tormalina bruna, al rutilo, ecc., che sono invece minerali scarsi per le sabbie del Po. La presenza di alluvioni padane nel materiale del pozzo di Suzzara ci è indicata specialmente dal serpentino, dagli anfiboli e particolarmente dalla glaucofane.

Le ghiaiette costituenti il materiale al livello 114-118 metri stanno pure a dimostrarci la provenienza del materiale dalle alluvioni dell'Adige, poichè le roccie incontrate: schisti micacei, granito, ecc., sono appunto tipiche delle formazioni dell'alto bacino del fiume.

In quanto ai carbonati, così abbondanti nei differenti livelli del pozzo, per quanto dallo studio dell'Artini risultino pure caratteristici delle sabbie dell'Adige, io penso però che almeno in parte possano rappresentare materiale portato dai fiumi appenninici, i quali nel quaternario dovevano convergere anch'essi nella grande fiumana, che alluvionò il territorio di Suzzara.

---

(1) *Intorno alla composizione mineralogica delle sabbie di alcuni fiumi del Veneto, con applicazioni della ricerca microscopica allo studio dei terreni di trasporto*, " Rivista di Min. e Crist. it. ", vol. XIX, 1898.

2. *Pozzo di Galliera.*

Il pozzo di Galliera, in provincia e circondario di Bologna, a 16 metri sul livello del mare, fu trivellato nell'anno 1911 dalla Ditta Stierlin di Milano per incarico del Municipio.

La trivellazione fu spinta fino a 135 metri senza però ottenere completamente il risultato desiderato, cioè quello di dotare il comune di acqua potabile; infatti alla profondità indicata, alla quale cessò la perforazione, si incontrò una falda acquea della portata di pochi litri al minuto primo con salienza sino ad un metro sotto il livello del suolo.

Nel suo lavoro citato (1) il Sacco riporta l'indicazione, comunicatagli dalla Ditta Stierlin, della serie completa dei materiali incontrati ai differenti livelli; nella collezione del Museo del R. Politecnico di Torino non esistono però che 4 esemplari dei livelli più profondi.

Ad ogni modo ho creduto interessante il farne lo studio, appunto in vista della notevole profondità a cui fu spinta la terebrazione.

Metri 65-67.

Sabbia fortemente argillosa, calcarea-magnesifera, con numerosi *calcarelli*.

La sabbia liberata dall'argilla dà viva effervescenza; la soluzione si intorbida per la separazione di argilla e dal liquido precipita abbondante non solo la calce, ma anche la magnesia, in proporzioni pressochè uguali. Vi ha quindi abbondanza di *carbonati* (calcare e dolomite) argillosi, che rappresentano circa $^1/_3$ della massa totale del materiale.

La sabbia (dopo eliminati i carbonati) è costituita essenzialmente da *quarzo* con frammenti rossigni di *quarzo, feldspato* e *pasta felsitica*; *clorite, granato* roseo, *attinoto* in solidi di sfaldatura che ricordano perfettamente quelli già incontrati nel pozzo di Suzzara, *orneblenda, augite* verde scura, *diallagio, bronzite, tormalina* bruna ed incolora nei soliti cristallini più o meno ben terminati, *rutilo* granulare giallo, *zircone* incoloro.

(1) *Geoidrologia dei pozzi profondi della Valle padana*, loc. cit.

La *mica* (*muscovite*) è scarsa, come pure è scarso il *serpentino,* nero e verde-giallo chiaro, subtrasparente; vi è pochissima *magnetite* aderente a frammenti di serpentino od alla clorite.

Mescolate alla sabbia stanno ghiaiette, del diametro di circa $^1/_2$ cm. e rappresentate da *calcare arenaceo, arenaria, calcare grigio dolomitico, quarzo, anfibolite.*

Fossili. Frammenti di conchiglie crasse di Bivalvi, rese informi dal rotolamento e quindi non determinabili.

Metri 131.

Argilla verdognola, compatta, untuosa al tatto.

Con acido cloridrico, anche concentrato, non dà che un'effervescenza trascurabile; dalla levigazione e decantazione del materiale non ottenni alcun residuo.

Metri 134.

Sabbia fortemente argillosa, calcarea-magnesifera.

La sabbia liberata dall'argilla, che rappresenta circa la metà del materiale, dà con acido cloridrico vivissima effervescenza; si mette in libertà dell'argilla, proveniente quindi dai *carbonati,* dai quali si ha, in proporzioni pressochè uguali, calce e magnesia.

La composizione mineralogica corrisponde perfettamente a quella della sabbia del livello metri 65-67.

Metri 135.

Argilla grigia fortemente calcarea-magnesifera.

Il residuo sabbioso ottenuto dalla levigazione ripetuta del materiale è scarso ed è costituito essenzialmente da *quarzo* con qualche *granato* roseo e poco *serpentino.*

* * *

La scarsezza del materiale esaminato non permette deduzioni molto precise sulla provenienza del materiale alluvionale del sottosuolo di Galliera. Ad ogni modo mi pare si possa conchiudere che esso dev'essere essenzialmente di origine appen-

ninica-padana con associazione di materiale del bacino dell'Adige, dal quale probabilmente provengono i detriti di porfidi incontrati nei due livelli sabbiosi.

3. *Pozzo di Massa Lombarda.*

Nel territorio di Massa Lombarda, in provincia di Ravenna (circondario di Lugo), all'altitudine di 13 metri sul livello del mare, furono a partire dal 1890 trivellati parecchi pozzi per alimentazione in acqua potabile e generalmente si ebbero buoni risultati, raggiungendo lo scopo (1).

Nel 1911 furono fatte le due ultime trivellazioni, per incarico del Municipio, dalla Ditta Piana.

L'una si spinse fino a 109 metri di profondità alla quale incontrò una falda acquea della portata di circa 204 litri al minuto primo, livellantesi a 3 metri sopra il suolo; la seconda fu portata più in basso, cioè fino a 116 metri, ove si trovò una falda acquea saliente a 6 metri sul piano di campagna, con portata di circa 700 litri al minuto primo, a m. 0,50 sopra il suolo.

Nella collezione del R. Politecnico esiste una serie di 15 campioni, appartenenti alla prima trivellazione del 1911 ed è quella di cui ho fatto lo studio.

Metri 2-23.

Argilla grigia fortemente calcarea-magnesifera, con residuo sabbioso affatto trascurabile e rappresentato da pochi granuli di *quarzo*.

Metri 23-24,65.

Sabbia, finissima, grumosa, fortemente argillosa.

La sabbia, liberata dall'argilla e trattata con ac. cloridrico dà viva effervescenza; si separa abbondante sostanza argillosa e precipitano in proporzioni pressochè uguali calce e magnesia. Abbiamo quindi abbondanza di *carbonati* (*calcare* e *dolomite*) *argillosi*, che rappresentano oltre $^1/_3$ della massa totale.

(1) F. Sacco, *Geoidrologia dei pozzi profondi, ecc.*, loc. cit. — T. Taramelli, *Notizie circa il pozzo artesiano di Bagnocavallo.* Perugia, 1907.

Dopo l'eliminazione dei carbonati, la sabbia risulta costituita, con prevalenza assoluta, di *quarzo* (> 50 %), specialmente ialino, a cui si associano: *Mica* bianca argentea, in lamine del diametro anche di 2 mm., con inclusioni di *rutilo* (talora geminato a ginocchio) e di *tormalina* incolora; *mica* bruna-rossastra; *clorite* in lamine generalmente più ampie di quelle delle miche; feldspati: *ortosio* e *plagioclasi*, fra cui *albite*, nei caratteristici geminati che presenta il minerale incluso nei calcari; *anfiboli*: *orneblenda, glaucofane* in frammenti prismatici, una varietà incolora con estinzione di circa 15° (*tremolite* o *edenite?*); *augite*; *granato* roseo e violaceo; *epidoto* verde-giallo chiaro; *tormalina* bruna ed incolora, in cristalli prismatici ben terminati, specialmente la seconda varietà; *cianite*; *andalusite*; *rutilo* granulare; *zircone* incoloro, in cristalli acuminati con spigoli più o meno netti.

Il *serpentino* è raro; rarissima, ridotta a pochi granuli, la *magnetite*.

Metri 24,65-41,33.

Argilla grigia-giallognola, fortemente calcarea-magnesifera, contenente frustuli torbosi.

Il residuo, ottenuto dopo ripetute levigazioni, è rappresentato da pochi ciottolini di *calcare* grigio, magnesifero e da granuli di *quarzo*.

Metri 41,33-43,70.

Sabbia grigia, fina, fortemente argillosa.

Abbondano i *carbonati* (*calcare* e *dolomite*) argillosi, sia in granelli nella sabbia, che in ghiaiette con varietà nera, grigia-chiara, grigia-scura, biancastra.

Eliminati i carbonati, la sabbia corrisponde abbastanza bene a quella del livello 23-24,65 m.; predomina cioè il *quarzo* con *mica* abbondante, sia incolora che bruna-rossastra, pressochè nelle stesse proporzioni, essendo però la bruna in lamine maggiori; continua l'*albite* nei caratteristici geminati; sono sempre scarsi il *serpentino* e la *magnetite*.

Minerali non osservati prima sono *diallagio* ed *attinoto* con due varietà, una fibrosa, verde-erba, l'altra verde-chiara, trasparente, in piccoli solidi di sfaldatura, analoghi a quelli osservati nelle sabbie degli altri pozzi.

Fossili. Frammenti di conchiglie terrestri e *Nodosaria*.

Metri 43,70-45,80.

Sabbia grigia, alquanto più grossolana che al livello antecedente, avendo i granuli un diametro di mm. 1-1 $^1/_2$. Contiene numerosi frustuli torbosi.

Continuano abbondanti i *carbonati* di varia specie che formano pure piccole ghiaie (diam. 3-4 mm.), con altre di *arenaria*, *quarzo* ialino o latteo, *quarzite* verdognola, *diaspro* rosso ed *anfibolite* con epidoto. Vi sono inoltre piccole concrezioni limonitiche, che si ritrovano si può dire a tutti i livelli.

La sabbia corrisponde a quella già incontrata; vi è però caratteristica l'abbondanza della *clorite* e della *mica*, fra cui lamine di muscovite del diametro di 2-3 mm.

Fossili. Abbondantissimi frammenti informi, molto rotolati, di conchiglie sia terrestri che marine ed opercoli di *Bithynia*.

Metri 45,80-48,15.

Sabbia analoga alla precedente, ma più fina, grumosa, fortemente argillosa, calcarea-magnesifera.

Vi abbondano le *miche* (*muscovite* e *biotite*) e la *clorite*, quest'ultima è notevole per la freschezza delle lamine.

Metri 48,15-50,00.

Argilla di color grigio, fortemente calcarea-magnesifera, con abbondanti frustuli di *mica* bianca.

In seguito alla levigazione si ottiene un discreto residuo, rappresentato da sabbia, *calcarelli* e ghiaiette (diam. 3-4 mm.) di *quarzo*, *serpentino*, *gneiss* a muscovite e a due miche, *diaspro* rosso.

La sabbia comprende essenzialmente *quarzo* con *mica*, *granato*, *tormalina* bruna e raro *serpentino*; manca la *magnetite*.

Fossili. Frammenti rotolati ed informi di conchiglie terrestri e marine.

Metri 50,00-52,45.

Sabbia finissima, grigia, poco argillosa con ricchezza notevole di *muscovite*.

Continuano abbondanti i *carbonati*, eliminati i quali il materiale risulta essenzialmente di *quarzo* (ialino, latteo, giallognolo,

roseo) che rappresenta circa il 50 %; il rimanente comprende *feldspato*, fra cui i caratteristici cristalli geminati di *albite*; *anfibolo*, con *orneblenda*, *attinoto* e *glaucofane* abbondante; *granato* roseo; *augite* ed altro *pirosseno* verde-chiaro quasi incoloro, *tormalina* bruna comune (con alcuni cristalli prismatici emimorfi perfetti), più rara l'incolora; *zircone* incoloro, alcuni individui contenendo inclusioni bacillari minutissime; *rutilo* granulare; *epidoto*; *cianite*; *andalusite* e *pirite*. *Serpentino* e *magnetite* continuano ad esser rari.

Metri 52,45-85,80.

Argilla marnosa, di color cinereo, ricca in carbonato di magnesio.

Il residuo, poco abbondante, è rappresentato da piccole concrezioni limonitiche, da *calcarelli* tondeggianti, che arrivano alle dimensioni di una nocciuola e contengono:

$$CaCO_3 = 32,60 \qquad MgCO_3 = 31,44.$$

Ai calcarelli sono associate poche ghiaiette di *quarzo*; una ne notai di *anfibolite* compatta, costituita da *attinoto* con poco *granato*.

La parte sabbiosa è rappresentata da *quarzo*, con *mica* e qualche granulo di *serpentino*.

Metri 85,20-94,50.

Argilla marnosa, fortemente magnesifera; contiene abbondanti frustuli di *mica* e poco *quarzo* finamente granulare.

Metri 94,50-96,10.

Argilla grigia-cinerea, fortemente calcarea-magnesifera.

Il residuo è costituito esclusivamente da *calcarelli*, che contengono

$$CaCO_3 = 47,52 \qquad MgCO_3 = 22,23.$$

Metri 96,10-97,50.

Sabbia grigia, finissima, fortemente argillosa.

Contiene, come agli altri livelli, abbondanti i *carbonati*, eliminati i quali, la sabbia è costituita per oltre 50 % di *quarzo*,

a cui si associano i soliti minerali: *Mica* (bianca e rossa-bruna), *clorite*, *albite*, *glaucofane*, *orneblenda*, piccoli solidi di sfaldatura di *attinoto*, *granato*, *augite*, *bronzite*, *epidoto*, *tormalina* bruna, *zircone*, *rutilo*, *ematite* aderente a frammenti di quarzo, *pirite*, *ilmenite* (?).

Continua ad essere raro il *serpentino*; rarissima la *magnetite*.

Metri 97,50-105,45.

Argilla marnosa, grigia, meno magnesifera che agli altri livelli; il residuo della levigazione è trascurabile, con poco *quarzo* e *mica*.

Fossili. Frammenti informi, molto rotolati, di conchiglie terrestri e fors'anche marine.

Metri 105,45-108,60.

Sabbia finissima, grigia, alquanto grumosa, poco argillosa.

La composizione corrisponde essenzialmente a quella dell'analogo materiale dei livelli precedenti con prevalenza dei *carbonati* e del *quarzo* ed abbondante *granato*.

Fossili. Frammenti informi di conchiglie; *Nodosaria*.

Metri 108,60-109,93.

Sabbia alquanto più grossolana della precedente e, come questa, relativamente poco argillosa.

La composizione mineralogica si mantiene identica a quella dei precedenti livelli, sembra però alquanto più scarsa la *glaucofane*.

Ho notato tra i *granati* alcuni piccoli cristalli ben terminati e risultanti dall'associazione del rombododecaedro con l'icositetraedro, a cui, in qualche individuo, sembrano associarsi le faccie del cubo.

*
* *

Il materiale di Massa Lombarda è notevole per la costanza di costituzione che si osserva ai differenti livelli. La natura del materiale non mi pare poi lasciare dubbio sulla sua origine in parte padana, in parte appenninica.

4. *Pozzo di Lodi.*

Nel comune di Lodi, a partire dal 1895, furono eseguite, generalmente con buoni risultati, parecchie trivellazioni, delle quali tre nell'interno della città stessa (a circa 70 m. sul livello del mare), con lo scopo di dotare questa di acqua potabile (1).

È notevole il fatto che per quanto questi pozzi dell'interno della città non siano a grande distanza gli uni dagli altri (tutt'al più un 200 metri), nondimeno le formazioni incontrate dimostrano grande differenza di costituzione geologica, risultante dal fatto che il sottosuolo lodigiano consta di depositi assai irregolari, più o meno lentiformi, di origine fluvio-lacustre.

Il Sacco nel suo lavoro citato (*Geoidrologia dei pozzi profondi*, ecc.) riporta le diverse serie incontrate nelle molteplici trivellazioni; io ho rivolto il mio studio alla serie dei 18 esemplari donata al Museo del R° Politecnico dal Municipio di Lodi e che rappresenta il materiale estratto dal pozzo scavato fino a 141 m. nell'anno 1908.

Metri 2.

Sabbia grigiastra, poco argillosa, con numerose ghiaiette e ciottolini del diametro fin di 3-4 cm.

Le ghiaiette ed i ciottolini sono rappresentati dalle seguenti roccie: *Quarzo* e *quarzite micacea*; *Calcari* vari: grigio-argilloso, grigio-scuro, grigio-chiaro, nero, biancastro, sempre più o meno magnesiferi; *Gneiss* molteplici: a muscovite, a biotite, granatifero, con due miche; *Granito* con muscovite e con clorite; *Porfido* rossastro; *Diorite*; *Eufotide*; *Anagenite* a grana media; *Diaspro* rosso.

Il *serpentino*, pure abbondante nella sabbia, sembra mancare nella parte più voluminosa del materiale.

La sabbia trattata con ac. cloridrico dà viva effervescenza, mettendo in libertà argilla, mentre dalla soluzione precipita poi

(1) G. Vanazzi, *Appunti sul traforamento di un pozzo artesiano per dotare d'acqua potabile la città di Lodi*. Lodi, 1897. — Toldo, *Due pozzi artesiani di Lodi*, " Boll. Soc. geol. it. ", XXV, 1906. — Id., *I terreni alluvionali del Lodigiano*, " Boll. Soc. geol. it. ", XXVII, 1908. — F. Sacco, *Geoidrologia dei pozzi profondi della Valle padana*, loc. cit.

abbondante magnesia; abbiamo quindi abbondanza di *carbonati* (*calcare* e *dolomite*) più o meno argillosi.

Liberata dai carbonati la sabbia è a composizione complessa, ma nell' insieme dimostra di provenire dallo sfacelo di roccie dei vari tipi incontrati a formare i ciottoli e le ghiaie. Essa comprende infatti essenzialmente *quarzo* con *mica* bianca e bruna, essendo affatto prevalente la prima, che contiene non di rado inclusioni di *rutilo*; *feldspati*: *ortosio* e *plagioclasi*, sia basici che acidi, fra cui piccoli solidi di sfaldatura di *albite*, analoghi a quelli incontrati nel materiale del pozzo di Alessandria (1); *anfiboli*: *orneblenda* bruna e verde-scura tendente all' azzurro, *attinoto*, fibroso od in frammenti di sfaldatura, *glaucofane*, rara, con tinta chiara; una varietà incolora di anfibolo ha estinzione di circa 18° (*edenite* o *tremolite?*); *granato* roseo, violaceo o rossastro, la prima varietà in piccoli cristalli 110 talora perfetti; *pirosseno*: *augite* verde-scura ed altra varietà verde-chiara; *diallagio*; *bronzite*; *iperstene*; *serpentino* nero e verde-giallognolo subtrasparente; frammenti di *pasta felsitica* rossa; *epidoto*; *diaspro* rosso; *tormalina*, in cristalli più o meno perfetti, bruna ed incolora; *clorite*, non più però con le belle lamine incontrate nel materiale dei pozzi precedentemente descritti; *cianite* azzurrognola; *cloritoide*; *ematite* micacea; *pirite* e *pirrotina*; *magnetite* scarsa, isolata od aderente a granelli di *serpentino*.

Metri 2-19,50.

Sabbia grigia, poco argillosa, corrispondente a quella del livello antecedente, con molte ghiaiette.

Le roccie costituenti sono ancora dei tipi sopra indicati, con abbondanza di *gneiss* e *calcari*; sembra però mancare il serpentino, che è del resto anche affatto scarso nella sabbia, ove è rappresentato più particolarmente dalla varietà verde-chiara, subtrasparente.

Metri 19,50-20.

Ghiaia, i cui ciottolini hanno diametro fin di 3-4 cm., con poca sabbia e pochissima argilla.

---

(1) *Ricerche lito-mineralogiche sopra alcuni pozzi profondi della pianura padana*. I. *Pozzo di Alessandria*, " Atti R. Acc. delle Sc. di Torino ", vol. XLVII, disp. 13ª, 1912.

La sabbia ha la complessa composizione già indicata, con moltissimi *granati*, non di rado in cristalli 110 perfetti, alcuni allungati, pseudosimmetrici.

Le roccie costituenti le ghiaie sono essenzialmente *gneiss*: a biotite, a muscovite, con due miche, granatifero, con muscovite ed attinoto; *quarzo* (fra cui un frammento con aderente ematite micacea); *quarzite micacea*; *calcari*: grigio, nero-cristallino, biancastro; *calceschisto*; *granito* bianco; *porfido* rossastro; *anagenite*; *diaspro* rosso. Il *serpentino* è affatto scarso, anche nella sabbia.

Metri 20-20,50.

Argilla bruna, alquanto calcarea-magnesifera, contenente pochi ciottolini, essenzialmente di *gneiss* (fra cui uno del diametro di 6 cm.), con altri di *calcare* grigio dolomitico, *diorite*, *anagenite* e *porfido*.

Mediante ripetute levigazioni si isola poca sabbia costituita da *quarzo*, *feldspato*, *granato*, *mica* bianca e bruna, *clorite*, *serpentino* verde-chiaro, *attinoto* ed alquanta *magnetite*.

Metri 25,50-36.

Sabbia, grigia, finissima, omogenea (diametro dei granuli = circa $^1/_2$ mm.), alquanto più argillosa che ai livelli precedenti e non contenente nè ghiaiette o ciottoli.

La composizione mineralogica si mantiene nell'insieme costante, ma con molta *mica*, specialmente *muscovite*; caratteristica nella parte arricchita con i liquidi densi è l'abbondanza del *granato*, del *rutilo* in grani o frammenti di cristalli e della *tormalina* bruna, con molti cristallini a terminazioni emimorfiche perfettamente compiute.

Metri 36-36,50.

Ghiaia con alquanta sabbia, poco argillosa.

Le roccie costituenti i ciottolini (diam. 3-4 cm.) sono ancora essenzialmente i vari *gneiss* con *granito*, *quarzo* (ialino, latteo, roseo e violacescente); *diorite* quarzifera, *anagenite*, *porfido* rosso, *diaspro* nero. Sono invece alquanto scarsi i *carbonati*, rarissimo il *serpentino*.

La sabbia corrisponde a quella dei livelli precedenti, ma vi è notevole, come già per la ghiaia, la scarsezza dei carbonati.

Metri 36,50-57.

Sabbia fina, grigia, poco argillosa.

A questo livello è interessante la scomparsa quasi totale dei carbonati dalla sabbia, che non ne contiene più che pochissimi granuli; questa scarsezza dei carbonati, già iniziatasi al livello precedente, vedremo continuare ed accentuarsi fin a circa 100 m., rappresentando certamente una modificazione nell'alluvionamento.

Aumenta invece la quantità del *serpentino* con le sue parecchie varietà e conseguentemente anche della *magnetite*; anzi è questo il punto della trivellazione ove è più abbondante.

La parte arricchita con il liquido di Thoulet rappresenta circa $^1/_5$ del materiale; in essa vi è comune un plagioclasio, che per i caratteri (estinzione sopra $010 = > 30°$, decomponibile dall'acido cloridrico) si può ritenere come *anortite* od almeno *labradorite* fortemente basica. Ad esso si associano abbondanti gli *anfiboli*, i *pirosseni* ed il *granato*, mentre è raro il *rutilo* e rarissima la *tormalina*.

Metri 57-68.

Argilla grigia-scura, pochissimo calcarea, contenente frustuli torbosi.

Il residuo sabbioso è minimo, rappresentato quasi totalmente da *quarzo* con *mica* bianca e pochi *granati*.

Metri 68-75.

Sabbia grigia, finissima, alquanto argillosa; corrisponde a quella del livello 36,50-57, mancando completamente i carbonati; il *serpentino* vi è scarso, ridotto a pochi granuli.

Metri 75-80.

Argilla grigia verdognola, pochissimo calcarea, con abbondantissimi frustuli torbosi.

Il residuo sabbioso è affatto trascurabile, costituito da *quarzo* con poche lamine di *mica*, *granato*, *serpentino* ed alquanta *magnetite*.

Metri 80-100.

Sabbia finissima (diam. $^1/_4$-$^1/_2$ mm.), alquanto argillosa, molto ricca in *mica*, specialmente *muscovite*, alcune lamine della quale raggiungono un diametro di 2-3 mm.

Continua la scarsezza assoluta dei *carbonati*, ridotti a pochi grani calcarei; i componenti sono essenzialmente quelli incontrati nei livelli superiori con predominanza del *quarzo*, dei *feldspati* (alcuni granuli di *ortosio* lasciano scorgere bene la geminazione di Karlsbad) e della *clorite*, mentre sembra mancare il *serpentino* e sono scarsi il *granato* e la *tormalina*. È invece abbastanza comune il *rutilo*.

Metri 100-118.

Sabbia un po' più grossolana e più argillosa che al livello precedente; di color grigio.

Ritornano abbondanti i *carbonati*; quindi nel trattamento con ac. cloridrico si ha forte effervescenza e dalla soluzione precipita non soltanto calce, ma anche abbondante magnesia. Durante il trattamento si ha sviluppo distinto di idrogeno solforato, indizio quindi della presenza nella sabbia di un qualche solfuro decomponibile.

Continua molto abbondante la *mica*, ma con prevalenza della *biotite* sulla *muscovite*, la quale è però normalmente in lamine maggiori con inclusioni di *rutilo* e di *tormalina*.

Sempre scarso il *serpentino*, per quanto vi sia discreta quantità di *magnetite*.

Metri 118-119,50.

Sabbia grigia, molto micacea, analoga quindi alla precedente, ma contenente ghiaiette e ciottoli che arrivano al diametro di 6-7 cm. e costituiti essenzialmente da *gneiss* con pochi di *quarzo*. Un ciottolo è di *quarzite* verde, nella quale si osserva abbondante pirite disseminata nella massa.

Metri 119,50-120,50.

Argilla sabbiosa, grigia, non calcarea con frammenti e frustuli torbosi molto abbondanti.

Sabbia ed argilla sono pressochè nelle stesse proporzioni; nel materiale ho notato un ciottolino grosso come una nocciuola di *gneiss a biotite*.

La sabbia è prevalentemente costituita da *quarzo* con *muscovite*, *biotite*, *clorite*, frammenti di *pasta felsitica*, *feldspato* alterato, *granato*, *orneblenda*, *tormalina* bruna, *serpentino* ed alcuni grani di *magnetite*.

Metri 120,50-125.

Sabbia fina, argillosa, poco micacea.

Ritornano ad essere abbondanti i *carbonati* e nel trattamento con ac. cloridrico si ha nuovamente distinto lo sviluppo dell'idrogeno solforato.

La composizione mineralogica corrisponde essenzialmente a quella dei primi livelli della trivellazione, poichè ai soliti minerali provenienti dallo sfacelo di roccie gneissico-granitiche ed anfiboliche si associano abbondanti frammenti *felsitici*, mentre le *miche* sono alquanto scarse, specialmente in confronto dei livelli immediatamente precedenti.

Gli elementi colorati sono i soliti, con discreta quantità di *serpentino* nero, verde-chiaro e verde-giallognolo.

Metri 125-127,50.

Argilla grigia, poco calcarea, con abbondanti frustuli torbosi.

Il residuo sabbioso è scarso, costituito essenzialmente da *quarzo* con *mica* bianca, *granato*, *orneblenda* e frammenti di *pasta felsitica*.

Metri 127,50-141.

Il materiale di questo livello, ove s'incontrò una zona di acqua abbondante, è **ciottoloso-ghiaioso**, con ciottoli del diametro fin di 7-8 cm. (1).

(1) F. Sacco, *Geoidrologia dei pozzi profondi, ecc.*, loc. cit.

L'esemplare a mia disposizione comprendeva due ciottoli, della grossezza presso a poco di un uovo di gallina.

1° **Diorite** tipica, a grana fina, con i componenti, *orneblenda* e *oligoclase* perfettamente sani; nel fedspato sono evidenti le tre geminazioni dell'albite, del periclino e di Karlsbad. Minerali accessori vi sono: *ortosio*, con geminazione di *Karlsbad*, *microclino* e *magnetite*.

2° **Porfido ortosico**, costituito da una parte fondamentale micromera, con *orneblenda* e *feldspato* quasi totalmente caolinizzato, nella quale stanno sparsi cristalli macromeri di *ortosio* caolinizzato e pochi altri di *orneblenda*.

***

L'esame delle sabbie e ghiaie che costituiscono i materiali estratti dal pozzo di Lodi permette di arguire che l'alluvionamento del sottosuolo dovette essere complesso, ma probabilmente operato dai fiumi Po, Ticino, Adda e affluenti.

Infatti gli abbondanti carbonati che esistono a parecchi livelli derivano evidentemente dalla ampia fascia mesozoica lombarda; le roccie gneissiche e granitiche dalla Valtellina e dalle Alpi centrali lombarde; le roccie anfiboliche, dioriti e serpentini dalla Valtellina o da materiali padani; i porfidi dal Biellese o meglio dal Luganese, mentre è probabile che le anageniti derivino dalle alte Alpi bergamasche: Val Brembana, ecc.

Il prevalere dell'una o dell'altra corrente dovette portare se non a differenze assolute nella composizione del materiale (ed abbiamo visto che essenzialmente non ne esistono) al predominare di alcuni componenti sopra altri.

In quanto alla scarsezza di carbonati che si osserva fra i 36 e 100 metri si può ritenere che corrisponda ad un periodo di prevalenza nell'alluvionamento padano.

Torino. Gabinetto Geo-Mineralogico del R. Politecnico.
Giugno 1912.

Ricerche e considerazioni intorno all'influenza dell'esercizio sulle rappresentazioni spaziali cutanee.

Nota del Dott. MARIO PONZO.

Tra le rappresentazioni spaziali più semplici che possano venirci fornite dagli organi sensitivi cutanei debbono riconoscersi senza dubbio quelle per le quali noi siamo capaci di discernere il luogo di provenienza di una sensazione e quelle altre per cui due impressioni contemporanee vengono riconosciute come spazialmente distinte.

Tuttavia, solo di recente, particolarmente per il valido contributo all'analisi di codesti processi psichici, portato dallo studio di alcuni casi della patologia del sistema nervoso (1), venne riconosciuta l'indipendenza del potere di localizzare uno stimolo cutaneo da quello di distinguere l'un dall'altro due stimoli simili determinati dall'applicazione delle punte di un compasso sulla pelle. Si riscontrò infatti che una delle due capacità può essere molto ridotta e permanere l'altra integra. L'indipendenza delle due funzioni deve ammettersi anche per analogia con quanto si constata nel campo delle sensazioni visive, potendosi, com'è noto, distinguere coll'occhio attraverso ad un prisma due punti e riferirli in pari tempo ad una regione dello spazio diversa dalla loro posizione reale. Per tale tardivo riconoscimento quindi la maggior parte delle ricerche sulle rappresentazioni spaziali cutanee da E. E. Weber a quest'oggi si concentrarono specialmente sul secondo gruppo delle rappresentazioni citate, considderate come l'espressione funzionale più elementare del cosidetto senso spaziale e ritenendosi inoltre la determinazione dei valori di soglia col compasso il metodo di indagine più sicuro.

---

(1) Vedasi per ragguagli sugli studi più recenti in proposito: C. Spearman, *Fortschritte auf dem Gebiete der Psychophysik der räumlichen Vorstellungen*, " Arch. f. d. ges. Psychol. ", Bd. VIII, Literaturber., p. 23, 1906.

La capacità di distinguere fra loro due sensazioni tattili o, come possiamo chiamarla col Binet (1), " la finezza di distinzione tattile „ o anche, col Claparède (2), " la discriminazione tattile „ è stata studiata sotto molteplici condizioni di esperienza, appunto per cercare di indagare i fattori che la compongono e nei quali si è sperato di ritrovare le determinanti fondamentali delle rappresentazioni spaziali. Su tali ricerche si fonda, ad esempio, la teoria dei cerchi tattili di Weber. Alle questioni sulla finezza della discriminazione tattile nelle varie ragioni del corpo, a quella del suo comportarsi nei bambini, negli adulti, nelle donne, alle altre relative all'influenza di farmaci, della fatica, del lavoro mentale, dell'esercizio su tale capacità, sono state date risposte, per quanto non tutte esaurienti; chè, come sempre, col risolversi di una questione altre ne sorgono che alla prima si annodano. Nel campo della localizzazione, al contrario, l'intiero questionario è, si può dire, insoluto.

Il fattore dell'esercizio, per il suo stretto rapporto con diverse teorie sul nostro orientamento nello spazio, è stato studiato, tra gli altri, specialmente da Volkmann e Fechner (3), dal Dresslar (4) e dal Tawney (5) nel campo della discriminazione tattile. I suoi effetti sono evidentissimi e si manifestano già durante la prima seduta (Volkmann e Fechner), ma si fanno sentire ancor più rilevanti quando esso duri piuttosto a lungo, per scomparire poi dopo un lasso di tempo di sospensione delle esperienze. La seguente tabella tolta dal lavoro del Dresslar può servire a dare un'idea del forte e progressivo abbassamento dei

(1) Binet, *La mesure de la sensibilité*, " Année psychologique „, vol. IX, p. 89-129, 1903.

(2) Claparède, *Le " sens de Weber „ et le vocabulaire physiologique*, " Comptes rendus de la Soc. de Biologie „, vol. 54, 1902 (v. C. Spearman, op. cit., p. 13).

(3) A. W. Volkmann, *Ueber den Einfluss der Uebung auf das Erkennen räumlicher Distanzen*, " Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. „, p. 38-69, 1858.

(4) Dresslar, *Studies in the Psychology of Touch*, " Amer. Journ. of Psych. „, vol. VI, p. 313-368. Non essendomi a disposizione il lavoro originale, i dati riferiti più sotto sono stati tolti da Henri, *Ueber die Raumwahrnehmungen des Tastsinnes*, Berlino, 1898, p. 30 e segg.

(5) G. Tawney, *Ueber die Wahrnehmung zweier Punkte mittelst des Tastsinnes, mit Rücksicht auf die Frage der Uebung und die Enstehung der Vexierfehler*, " Philos. Stud. „, Bd. XIII, p. 163-222, 1897.

valori di soglia determinato dall'esercizio, sulla parte media del lato volare dell'avambraccio in due soggetti. Su di essi egli sperimentò col compasso di Weber due volte al giorno per quattro settimane consecutive.

DATA delle esperienze	I Soggetto		II Soggetto	
	Mattino	Sera	Mattino	Sera
11 Ottobre	22 mm.	24 mm.	29 mm.	26 mm.
1ª Settimana eserc.	18 "	19,5 "	21,5 "	16,6 "
2ª " "	13 "	12,5 "	10 "	10,5 "
3ª " "	5,5 "	6 "	5,5 "	6,1 "
4ª " "	4,1 "	4,1 "	2,8 "	2,3 "

Mancava fino alla presente qualsiasi ricerca sugli effetti dell'esercizio nelle ricerche di localizzazione. Nel mio lavoro sulla localizzazione delle sensazioni tattili, prima di dare i valori ottenuti nei diversi soggetti, io notavo unicamente come essi venissero presi dopo un certo numero di localizzazioni preliminari e manifestavo l'opinione che, quando il soggetto fosse abituato a tenere ben concentrata la propria attenzione, non mi pareva che l'esercizio dovesse avere un'influenza apprezzabile sulla grandezza degli errori commessi. Volli, però, con speciale studio verificare se, procedendo nel modo da me tenuto in tutte le mie ricerche sulla localizzazione, si manifestasse, in seguito ad un esercizio prolungato, un'azione chiara di questo sulla grandezza e sulla direzione degli errori.

Condussi quasi tutte le esperienze su un soggetto, il signor Carlo Servetti, al quale esprimo qui il mio vivo ringraziamento, che, per quanto abituato alle ricerche psicologiche, non aveva eseguite in antecedenza che poche localizzazioni; ciò alcuni anni prima. La regione scelta per le prove fu il terzo medio del lato volare dell'avambraccio. Cercai sulla regione 10 punti tattili che fissai con una soluzione al 5 °/₀ di nitrato d'argento. I punti risultarono distribuiti irregolarmente attorno alla linea mediana, in un'area ovale, disposta col diametro maggiore in senso longitudinale e misurante nei suoi diametri longitudinale e trasversale rispettivamente 6 e 3,5 cm. ca. In ogni seduta vennero fatte

50 localizzazioni: 5 per ogni punto tattile. Nelle sedute, che duravano all'incirca due ore, erano intercalate quattro pause, e ad ogni ripresa venivano eseguite 10 localizzazioni, una per punto. Nelle singole riprese i punti non venivano stimolati mai nello stesso ordine, ma irregolarmente, or questo, or quello. Il soggetto durante le esperienze portava, legato al capo, uno schermo perchè non potesse vedere, aprendo gli occhi tra una localizzazione e l'altra, la regione stimolata.

Le sedute vennero tutte tenute nelle ore antimeridiane dalle 9 alle 11. L'esercizio continuò per 10 sedute. Il soggetto eseguì, così, in totale, 500 localizzazioni. Le sedute ebbero luogo nei giorni 10, 11, 12, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 23 gennaio 1912 e l'esercizio si estese quindi per un periodo di 14 giorni. Le localizzazioni vennero condotte col metodo di Weber: il soggetto, cioè, cercava, ad occhi chiusi, tastando qua e là sulla pelle, con un bastoncino, il luogo dello stimolo. Quest'ultimo veniva applicato coll'estesiometro a molla del prof. Kiesow e mantenuto il più possibile costante. Le misure della grandezza e della direzione degli errori furono prese col dermolocalimetro da me ideato (1). Vennero perciò misurate in millimetri le grandezze dei singoli errori ed in gradi le loro direzioni. Nelle tabelle dove raccolsi tali dati, ma che non fu possibile pubblicare qui per limiti di spazio, sono riportati, a lato a ciascun punto, contrassegnato da uno speciale numero, i singoli valori degli errori e, fra parentesi, la loro direzione.

La prima delle tabelle riportate in questa nota raccoglie insieme le medie degli errori pei singoli punti nelle varie sedute, e serve ottimamente a dare uno sguardo al decorso complessivo delle esperienze per quanto concerne la grandezza degli errori di localizzazione. In essa, al piede di ogni colonna, in cui sono riportate le singole medie per ciascun punto (designati questi coi numeri arabici da 1 a 10 nella prima colonna di sinistra), furono trascritte inoltre le medie complessive degli errori nelle varie sedute (I, II, III, IV, ecc.). Nella penultima colonna, procedendo

---

(1) Per schiarimenti su tale apparecchio vedasi: M. Ponzo, *Sur un appareil pour la détermination facile et précise de la grandeur et de la direction des erreurs de localisation dans le champ des sensations cutanées*, " Arch. it. de Biol. ", t. LVI, p. 148.

da sinistra verso destra, sono contenute le medie generali degli errori pei singoli punti dedotte da 50 localizzazioni nelle 10 sedute consecutive; nell'ultima colonna a destra stanno poi le variazioni medie delle medie generali dalle singole medie. Oltre a ciò, al piede delle ultime due colonne vennero riportate la media generale di tutte le localizzazioni (500) eseguite dal soggetto, e a lato, la variazione media di tal valore dalle medie dei singoli punti nelle varie sedute (Vedi Tab. I, pag. seg.).

Se ora si confrontano fra di loro le medie complessive delle varie sedute, si può constatare come nella prima si riscontri, è vero, l'errore medio complessivo un po' maggiore, ma come poi, nelle sedute successive, non si verifichi affatto un progressivo ed evidente diminuirsi dei valori, quale potrebbe invece attendersi dopo l'esposizione dei dati intorno all'influenza dell'esercizio sulla discriminazione tattile. Dalla media di 7,66 mm. della prima seduta, si passa a valori che oscillano non ampiamente tra i 6 e i 7 mm., senza che quest'ultimo valore venga raggiunto. Il valore minimo si ha nella terza seduta, dopo la quale le medie si rialzano fino alla sesta, per presentare poi ancora un leggero abbassamento, seguito infine da un tenue rialzo nelle due ultime sedute.

Non solo dalle medie complessive, ma anche dalle medie degli errori pei singoli punti nelle varie sedute, risulta chiara la mancanza di un'influenza ben determinata dell'esercizio. Le oscillazioni si presentano in questo caso più ampie che non nelle medie complessive. Inoltre, fatto questo molto interessante, non vi è concordanza nella grandezza degli errori medi per i varî punti in una stessa seduta. Perciò le sedute nelle quali si hanno i valori minimi non sono le medesime, ma questi si riscontrano sparsi irregolarmente nelle varie sedute (punto 8 nella seconda, punto 6 e 9 nella terza, punto 10 nella decima, ecc.); e lo stesso può dirsi dei valori massimi, quando non si tenga conto della prima seduta (punto 4 nella nona, punto 6 nella decima, ecc.) (1).

Tale mancanza di una regola costante nelle oscillazioni dei valori per i vari punti fa sì che in quasi tutte le sedute possa

(1) Nella tabella prima i valori minimi sono segnati in corsivo; i valori massimi in grassetto. Nella registrazione dei valori massimi si è fatta appositamente astrazione dei valori che si riscontrano nella I seduta.

Tabella I.

Numero punti	Medie in mm. degli errori dei singoli punti nelle varie sedute										Medie generali in mm. degli errori pei singoli punti	Variazioni medie dalle singole medie
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X		
1	8,0	**9,2**	5,0	7,0	6,6	6,6	*4,8*	6,4	6,6	7,2	6,74	0,888
2	8,0	5,8	6,6	*4,4*	5,8	**7,6**	5,0	5,6	7,2	6,6	6,26	0,940
3	5,8	**8,4**	6,2	5,6	6,0	5,0	6,6	*4,0*	6,6	6,0	6,02	0,744
4	8,2	6,2	4,6	7,2	7,4	6,4	*4,4*	4,6	**8,0**	4,8	6,18	1,264
5	8,0	5,4	**8,6**	8,2	*4,4*	7,4	7,4	6,0	4,8	6,0	6,62	1,300
6	9,2	6,4	*3,2*	6,0	**8,8**	5,8	8,4	8,4	8,6	**11,4**	7,62	1,816
7	6,0	8,6	**9,6**	*4,4*	4,8	8,4	5,8	7,8	9,4	7,4	7,22	1,576
8	9,0	*4,4*	6,6	6,2	6,0	8,0	6,2	**8,4**	5,2	6,2	6,62	1,168
9	6,4	5,4	*3,0*	6,4	6,4	6,0	**7,8**	6,8	5,8	6,4	6,04	0,792
10	8,0	4,8	7,4	**7,6**	7,0	7,4	7,0	5,6	5,2	*4,0*	6,40	1,200
	Medie complessive in mm. degli errori nelle varie sedute										Media generale in mm. delle 500 localizz.	Variazioni medie generali dalle singole medie
	7,66	6,46	*6,08*	6,30	6,32	6,86	6,34	6,36	6,74	6,60	6,572	0,3144

osservarsi la contemporanea esistenza del valore massimo di un punto a lato del valore minimo di un altro, fenomeno questo a tutta prima inesplicabile, ma che nello stesso tempo è la determinante della relativa costanza delle medie complessive.

Oltre che rintracciare l'effetto dell'esercizio attraverso le diverse sedute, volli pure osservare se esso si rivelasse in una stessa seduta con una differenza nei valori tra le varie riprese delle esperienze. Queste riprese, separate l'una dall'altra da pause di circa 15′, erano normalmente in ogni seduta cinque ed in ciascuna di esse veniva stimolato, come già accennai, ciascun punto. In ogni ripresa si facevano perciò 10 localizzazioni. Nelle due tabelle seguenti tali riprese sono indicate nella prima colonna di sinistra con I, II, III, IV, V giro. La seconda tabella riporta i singoli errori di localizzazione ottenuti nei cinque giri della prima seduta nel sig. Servetti, e cioè, a lato della grandezza degli errori in mm. anche la loro direzione espressa in gradi e racchiusa nelle parentesi. Oltre a ciò, nell'ultima colonna a destra sono riportati gli errori medî, cioè le medie aritmetiche delle grandezze degli errori in ciascun giro. La tabella terza raccoglie nello stesso modo le prime 50 localizzazioni ottenute dal dott. Chinaglia, che da lungo tempo non aveva più partecipato ad alcuna ricerca di questo genere, sulla regione anteriore del polso, usando uno stimolo dolorifico pungente (Vedi Tab. II e III, pag. seg.).

Quello che appare a tutta prima strano in queste due tabelle, è che nel primo giro si riscontri in entrambe un errore medio minore che non nel secondo e terzo giro, ma ciò diventa esplicabile col fatto di una tensione insolita del soggetto di fronte ad una ricerca per lui nuova, e che gli offre perciò un interesse maggiore che non quando gli è già conosciuta.

Per il resto, non si scorge nemmeno tra i diversi giri di una medesima seduta una differenza nei valori medî, che possa attribuirsi con certezza all'influenza dell'esercizio. Nella tabella concernente il soggetto C. S. si nota tuttavia nel quarto e quinto giro un lieve abbassamento degli errori medî dopo quelli maggiori del secondo e terzo giro. I valori ottenuti nei primi tre giri in C. S. sono quelli che fanno sì che la media degli errori della prima seduta risulti discretamente più elevata delle medie delle sedute successive.

Tabella II.

Sogg. C. S. — Stimolo tattile.

Lato volare avambraccio — Parte media — I Seduta.

	Grandezza e direzione dei singoli errori	Errori medî
I Giro	6(300) - 4(45) - 10(255) - 3(335) - 3(225) - 6(130) 8(125) - 11(170) - 12(45) - 9(180) -	7,2
II Giro	12(190) - 11(240) - 5(165) - 11(230) - 4(65) 11(20) - 7(220) - 11(45) - 5(5) - 14(125)	9,1
III Giro	11(255) - 4(95) - 5(80) - 7(45) - 8(35) - 12(5) - 9(50) - 11(100) - 10(5) - 5(120) -	8,2
IV Giro	5(225) - 7(215) - 2(55) - 13(225) - 14(205) 6(175) - 0(—) - 9(15) - 5(330) - 7(120)	6,8
V Giro	6(10) - 14(50) - 7(235) - 7(130) - 11(100) - 11(335) 6(45) - 3(210) - 0(—) - 5(65) -	7,0

Nelle tabelle quarta e quinta sono riportate esperienze eseguite su C. S. in un modo alquanto diverso per vedere se eccitando costantemente lo stesso punto tattile si ottenessero risultati diversi dai precedenti. Fu scelto per la stimolazione un punto tattile pilifero, sulla parte media del lato volare dell'avambraccio, sulla linea mediana, che però non venne segnato con alcun punto in inchiostro. Il soggetto non ebbe mai perciò una rappresentazione visiva della posizione del punto stimolato; anzi, nelle prime sedute egli credeva che i punti stimolati fossero diversi. Richiesto poi alla fine delle esperienze di indicare ad occhi aperti il punto eccitato, indicò un punto situato in direzione prossimale rispetto a quello realmente stimolato.

Il punto in questione non era uno di quelli esaminati nelle sedute della serie antecedente. Su di esso venne iniziata, il

TABELLA III.

Sogg. Dott. L. C. — Stimolo dolorifico.
Regione anteriore del polso.

	Grandezza e direzione dei singoli errori	Errori medî
I Giro	0(—) - 2(265) - 5(10) - 2(335) - 0(—) - 4(310) 8(105) - 5(310) - 2(300) - 2(195) -	3,0
II Giro	1(225) - 5(170) - 3(135) - 3(245) - 0(—) 5(45) - 7(60) - 3(175) - 8(20) - 5(110)	4,0
III Giro	3(175) - 5(240) - 5(130) - 8(310) - 2(210) 5(180) - 6(45) - 1(210) - 5(80) - 6(135) -	4,6
IV Giro	4(60) - 4(215) - 6(165) - 4(180) - 2(315) - 0(—) 5(40) - 4(155) - 4(40) - 1(300) -	3,4
V Giro	4(275) - 1(235) - 6(125) - 4(340) -4(320) 5(15) - 4(45) - 2(25) - 5(115) - 5(115)	4,0

TABELLA IV.

Sedute	Data	Grandezza e direzione dei singoli errori	Errori medî
I	7.3.12.18	7(190) - 5(80) - 5(165) - 2(70) - 3(190)	4,4
II	8.3.12.18	8(180) - 4(190) - 10(230) - 7(100) - 7(230)	7,2
III	11.3.12.10	3(265) - 9(200) - 5(150) - 7(230) - 10(185)	6,8
IV	12.3.12.10	5(130) - 4(265) - 3(195) - 4(300) - 5(200)	4,2
V	13.3.12.18	5(100) - 1(90) - 5(150) - 4(180) - 2(40)	3,4
VI	14.3.12.10	10(55) - 5(125) - 9(180) - 12(275) - 8(220)	8,8
VII	15.3.12.18	5(190) - 1(120) - 7(235) - 3(220) - 7(50)	4,6
VIII	16.3.12.16	0(—) - 7(10) - 2(320) - 6(240) - 3(30)	3,3
IX	18.3.12.18	3(340) - 3(265) - 2(215) - 0(—) - 2(215)	2,0
X	19.3.12.18	8(205) - 2(230) - 6(205) - 7(210) - 5(190)	5,6
XI	20.3.12.10	8(240) - 9(225) - 7(120) - 6(200) - 0(—)	6,0

Tabella V.

	Grandezza e direzione dei singoli errori	Errori medî
I Giro Ore 9.30	8(240) - 9(225) - 7(220) - 6(200) - 0(—) - 1(225) 4(90) - 3(90) - 10(210) - 6(260)	5,4
II Giro Ore 9,45	3(230) - 6(245) - 9(230) - 10(205) - 11(195) - 7(160) 10(190) - 4(210) - 3(80) - 0(—) -	6,3
III Giro Ore 10,5	4(245) - 5(200) - 6(230) - 7(210) - 12(205) - 9(230) - 4(65) - 8(255) - 7(240) - 3(255)	6,5
IV Giro Ore 10,30	8(45) - 3(180) - 9(190) - 8(225) - 4(230) - 5(45) 2(210) - 5(130) - 5(310) - 2(130) -	5,1
V Giro Ore 11	6(35) - 6(195) - 5(45) - 6(215) - 1(70) - 4(215) 4(240) - 6(50) - 6(215) - 7(240) -	5,1

7 marzo, una nuova serie di sedute, in tutto 11, che durarono fino al 20 marzo. In ognuna di esse il punto veniva stimolato e localizzato 5 volte consecutive. I risultati riportati nella tabella quarta non ci dimostrano che delle oscillazioni ampie, ma nessun progressivo diminuire dei valori medî. Ad un valore medio degli errori veramente piccolo, nell'ottava seduta, seguono, nelle due sedute successive, dei valori medî superiori a quelli della prima seduta.

Finite le 11 sedute, volli ancora vedere gli effetti di 50 stimolazioni successive sullo stesso punto tattile. Le 50 localizzazioni vennero eseguite in 5 riprese in una sola seduta (Tab. V).

Nei due ultimi giri si nota una leggera diminuzione, troppo lieve perchè possa assumere un significato deciso, dell'errore medio (I giro, errore medio = 5,4 mm.; IV e V giro, errore medio = 5,1 mm.). L'errore medio generale, dedotto dalle 55 localizzazioni, fatte nelle 11 sedute successive, è di mm. 5,12; quello

dedotto dalle 50 localizzazioni consecutive è di mm. 5,68: quest'ultimo valore, superiore al primo, dimostra nuovamente l'effetto negativo dell'esercizio. Questi due valori medî sono però alquanto più piccoli di quelli constatati nei 10 punti esaminati col metodo precedente (Tab. I), da me abitualmente seguito nelle ricerche di localizzazione. Il valore minimo tra le medie generali, pei singoli punti riportate nella tabella prima, è di mm. 6,02. Nuove esperienze dovrebbero venir fatte per determinare se tal fatto dipenda da una maggiore vivezza della rappresentazione di luogo per il punto esaminato da solo, o dalle speciali condizioni di esperienza.

Un altro fattore che doveva sottomettersi a studio in questo esàme dell'influenza dell'esercizio era la *direzione degli errori.* I singoli errori della prima serie di esperienze vennero, a seconda della loro direzione, raggruppati in 4 direzioni principali, ciascuna delle quali abbraccia gli errori di un quadrante di cerchio; e quindi ulteriormente ridotte a due sole (longitudinale e trasversale), ciascuna delle quali riunisce gli errori di due quadranti opposti. Avendo preso come repere la direzione distale espressa da 45° sul cerchio graduato del dermolocalimetro, vennero raggruppati nella direzione distale gli errori compresi tra 360° e 90°; nella direzione prossimale quelli tra 180° e 270°; nella direzione mediale quelli tra 90° e 180°; nella direzione laterale quelli tra 270° e 360° (1) (Vedi Tab. VI a pag. seg.).

La tabella VI dà il numero degli errori e la loro grandezza media in ciascuna delle direzioni su accennate in ciascuna seduta e complessivamente in tutte. Tanto dalle singole sedute quanto dai risultati complessivi risulta la costante predominanza del numero degli errori nella direzione dell'asse maggiore dell'arto, risultante dalla riunione degli errori nelle direzioni prossimale e distale, e la pressochè costante predominanza (in tutte le sedute ad eccezione che nella prima) del numero degli errori

(1) Per maggiori indicazioni sul modo di tener conto della direz. degli errori vedasi il mio lavoro: *Sulla localizzazione delle sensazioni tattili* (" Mem. dell'Acc. delle Scienze di Torino „, Serie II, tomo LX). Gli errori che cadono sui gradi divisorî di due direzioni contigue vennero computati a quella delle 2 direzioni in cui si ebbe il maggior numero d'errori nella seduta (Tab. VI) o pel singolo punto (Tab. VII).

TABELLA VI.

Numero delle Sedute	Distale 360° - 90° Numero errori	Distale 360° - 90° Grandezza err. in mm.	Prossimale 180° - 270° Numero errori	Prossimale 180° - 270° Grandezza err. in mm.	Mediale 90° - 180° Numero errori	Mediale 90° - 180° Grandezza err. in mm.	Laterale 270° - 360° Numero errori	Laterale 270° - 360° Grandezza err. in mm.	Longitudinale Numero errori	Longitudinale Grandezza err. in mm.	Trasversale Numero errori	Trasversale Grandezza err. in mm.	Errori nulli
I	18	7,8	14	8,8	12	7,9	4	6,3	32	8,2	16	7,5	2
II	4	4,5	26	7,6	15	5,3	4	7,0	30	7,2	19	5,7	1
III	6	6,3	20	7,0	14	6,9	5	6,0	26	6,8	19	6,7	5
IV	9	6,0	21	6,3	14	7,1	4	7,3	30	6,2	18	7,1	2
V	3	4,7	32	6,5	10	7,3	3	6,7	35	6,4	13	7,2	2
VI	10	8,5	22	6,7	15	6,6	3	4,0	32	7,3	18	6,2	—
VII	6	6,8	25	6,8	9	5,8	9	6,0	31	6,8	18	5,9	1
VIII	14	6,9	27	5,7	6	9,3	3	3,7	41	6,1	9	7,4	—
IX	9	6,4	28	7,3	10	6,3	2	5,5	37	7,1	12	6,2	1
X	5	4,6	25	7,6	14	6,3	5	5,6	30	7,1	19	6,1	1
Numero e grand. complessiva degli errori nelle varie direz.	84	6,8	240	7,0	119	6,7	42	5,9	324	6,9	161	6,5	15

in direzione prossimale su quelli nelle altre tre direzioni (distale, mediale, laterale). È questo un nuovo dato negativo sull'effetto dell'esercizio, poichè la direzione degli errori non sembra subire alcun sostanziale mutamento nelle diverse sedute. Dal numero complessivo degli errori riportato al piede della tabella risulta, che su 500 localizzazioni quasi la metà degli errori (240) furono commessi in direzione prossimale.

Dai dati riportati al piede della tabella sulla grandezza complessiva degli errori nelle varie direzioni, le differenze pur non essendo forti, ci permettono tuttavia di constatare una lieve predominanza della grandezza degli errori nelle direzioni prossimale e longitudinale sulle altre.

Si presentava ancora interessante per la questione da noi trattata, l'osservare anche il comportarsi delle direzioni degli errori per ciascun punto stimolato. Tali dati sono stati riuniti nella tabella settima (Vedi pag. seg.).

Da essa risulta che la direzione, in cui si ha il maggior numero d'errori, è diversa a seconda dei punti; e si deve notare a tal proposito che ciò si osserva nonostante l'ordine irregolare in cui i punti erano stati stimolati nelle diverse riprese di ciascuna seduta. In 7 dei 10 punti esaminati, si verifica un'accentuata prevalenza del numero degli errori in direzione prossimale sulle altre tre; in 3 punti invece, si ha la prevalenza del numero degli errori in senso mediale. Quest'ultimo fatto ci rende pertanto certi di una cosa, ed è l'indipendenza della direzione degli errori da una rappresentazione generale di tutta la regione, occupata dai 10 punti, quale potrebbe, p. es., venir fornita da una rappresentazione visiva; e ci palesa invece l'esistenza di rappresentazioni spaziali limitate, di natura tattile, con caratteri speciali e dotate di una certa costanza per ciascun punto tattile.

Ed ora, dopo aver constatato l'effetto negativo dell'esercizio nelle esperienze da me condotte sulla localizzazione, noi dobbiamo cercare di spiegarci il motivo dell'effetto diverso di questo sugli errori di localizzazione e sui valori di soglia nelle prove sulla finezza di distinzione tattile. È indubitato, come fu dimostrato con speciali ricerche, che molteplici fattori periferici fisiologici possono esercitare la loro influenza su quest'ultima; ma non certo in essi dobbiamo vedere i fattori essenziali del raffinarsi della soglia per l'esercizio.

Tabella VII.

Numero punti	Distale 360° - 90° Numero errori	Distale 360° - 90° Grandezza err. in mm.	Prossimale 180° – 270° Numero errori	Prossimale 180° – 270° Grandezza err. in mm.	Mediale 90° – 180° Numero errori	Mediale 90° – 180° Grandezza err. in mm.	Laterale 270° – 360° Numero errori	Laterale 270° – 360° Grandezza err. in mm.	Longitudinale Numero errori	Longitudinale Grandezza err. in mm.	Trasversale Numero errori	Trasversale Grandezza err. in mm.	Errori nulli
1	14	7,5	23	7,4	4	5,8	6	6,3	37	7,5	10	6,1	3
2	10	7,6	30	6,7	5	5,4	2	5,0	40	6,9	7	5,3	3
3	7	4,7	31	6,8	8	4,8	3	6,7	38	6,4	11	5,3	1
4	7	4,4	30	6,7	6	6,2	7	5,6	37	6,3	13	5,8	—
5	12	6,3	28	6,7	5	8,4	3	8,3	40	6,6	8	8,4	2
6	4	8,3	30	8,2	8	6,4	8	6,1	34	8,3	16	6,3	—
7	6	7,2	12	6,7	29	7,9	2	5,0	18	6,8	31	7,7	1
8	7	7,7	15	6,7	26	6,4	2	5,0	22	7,0	28	5,9	—
9	8	7,6	22	6,5	13	5,7	4	5,3	30	6,9	17	5,6	3
10	9	6,2	10	5,1	25	7,6	4	6,0	19	5,6	29	7,3	2

Il Volkmann (1), che col Fechner condusse numerose esperienze appunto sugli effetti dell'esercizio sul riconoscimento di distanze spaziali, sosteneva non essere giustificato l'ammettere per il senso spaziale un semplice organo, che offrisse un punto d'appiglio a tutte le esperienze simili, ma che, piuttosto, ogni nervo al servizio del senso spaziale rappresentasse, non tanto alla sua estremità periferica ma alle sue origini centrali, un organo speciale accessibile all'esercizio. A spiegare l'effetto dell'esercizio sulle regioni simmetriche, fatto da lui per primo constatato, ammetteva poi che lo sviluppo di tale organo speciale potesse giovare allo sviluppo di uno o più altri, forse secondo la misura delle parentele esistenti fra di loro. L'esercizio avrebbe agito sui nervi sensoriali analogamente come sui motori. Ed a rinforzo della sua tesi, Fechner (2) faceva seguire alla memoria del Volkmann alcune osservazioni dirette a dimostrare che coll'esercizio degli arti di un lato, anche quelli del lato opposto vengono essi pure a subirne gli effetti.

Ma dai lavori di Klinkenberg (3), di Tawney (4) e di altri apparve poi come gli effetti dell'esercizio per la discriminazione tattile risultavano chiari non solo sulle regioni simmetriche, ma in molteplici altre parti del corpo. Particolarmente estesi sono i dati che il Tawney fornisce a tal proposito. Devon dunque rintracciarsi i motivi degli effetti dell'esercizio in queste ricerche, più nei processi psicologici, che non in quelli puramente fisiologici. Tuttavia, secondo Tawney, tutto il cosiddetto esercizio in codeste ricerche non sarebbe altro che un processo per il quale nella coscienza dei soggetti entrerebbero in giuoco dei processi di autosuggestione. Non si avrebbe perciò, che un apparente affinarsi del soggetto nell'analisi delle sensazioni tattili. Influirebbe sull'abbassamento dei valori di soglia la conoscenza dello scopo delle esperienze e l'intenzione di rendere la soglia il più possibile piccola e precisa. Evitando queste cause d'errori, non

---

(1) Op. cit., p. 68.

(2) G. Th. Fechner, *Beobachtungen, welche zu beweisen scheinen dass durch die Uebung der Glieder der einen Seite die der andern zugleich mitgeübt werden,* " Ber. d. Sächs. Ges. d. Wiss. ", p. 70-76, 1858.

(3) Klinkenberg, *Der Raumsinn der Haut und seine Modifikation durch äussere Reize.* Dissertation, Bonn, 1883.

(4) Tawney, op. cit.

si noterebbe più, secondo lui, l'abbassamento del valore di soglia. La percezione erronea di due punte, quando invece il soggetto è stato toccato da una sola (*Vexirfehler*), sarebbe, per il Tawney, anch'essa un prodotto dell'autosuggestione, provocata dall'esercizio.

Pur concedendo al Tawney che, in certe condizioni di esperienza, e particolarmente in certi soggetti, entrino in gioco i fattori perturbanti di una autosuggestione, l'ipotesi sua si dimostra insufficiente a spiegare i fatti ben conosciuti di una maggiore finezza nella discriminazione tattile nei ciechi e nei tipografi. Inoltre, l'influenza del lavoro mentale sui valori di soglia, constatata dal Griesbach (1), che vide, tra l'altro, accrescersi tali valori nei fanciulli dopo le ore di lezione, influenza che, per quanto contestata da diversi ricercatori, e per quanto tuttora discussa, è stata confermata anche dal Michotte (2) col metodo del contatto continuo delle punte del compasso sulla pelle, dimostrerebbe pur essa l'influenza dello stato dell'attenzione sui valori di soglia.

Ma tanto nelle ricerche sulla " finezza di distinzione „ quanto in quelle sulle localizzazioni, intervengono i fattori dell'attenzione, e, quindi, non si comprenderebbero ancora i risultati diversi. Solo un'analisi dello stato psichico del soggetto di fronte ai due esperimenti, può avviarci alla spiegazione della differenza.

Nell'atto della localizzazione il soggetto ha chiara dapprima in mente la immagine della sensazione sollevata dallo stimolo; successivamente, per il tocco del bastoncino localizzatore sulla pelle, nasce in lui una nuova sensazione. Questa viene presa, qualora essa appaia diversa dall'immagine suscitata dallo stimolo, come guida per procederle più vicino e tende a venir quindi eliminata dalla coscienza, mentre altre ne sorgono e vengono successivamente confrontate colla rappresentazione tattile dello stimolo. La certezza del soggetto di essere giunto finalmente in corrispondenza del punto stimolato viene data dalla consonanza dell'ultima sensazione colla prima. Perciò la direzione

---

(1) H. Griesbach, *Ueber Beziehungen zwischen geistiger Ermüdung und Empfindungsvermögen der Haut*, " Arch. f. Hygiene „, Bd. XXIV, 1895; *Weitere Untersuchungen über Beziehungen zwischen geistiger Ermüdung und Hautsensibilität*, " Internation. Arch. f. Schulhygiene „, Bd. I, p. 317-417, 1905.

(2) A. Michotte, *Les signes régionaux*, Parigi, Alcan, 1905.

dell'attenzione dev'essere nel processo della localizzazione diretta costantemente e con una certa intensità alla sensazione prima, colla quale debbono essere paragonate volta a volta le nuove. In tale permanere della sensazione prima nel centro della coscienza sotto forma di immagine riprodotta, senza che essa si lasci respingere dalle altre, che tendono ad imporsi come processo attuale, sta principalmente il segreto di una localizzazione esatta. Dai risultati ottenuti nelle varie sedute deve dedursi che il soggetto apprenda rapidamente a comportarsi in tal modo di fronte alla localizzazione. È assai raro che il soggetto avvisi lo sperimentatore, durante una localizzazione, di aver dimenticata la sensazione prima; e anche ciò, tuttavia, dimostra come essa rimanga sempre nel centro appercettivo e come, svanita che sia, per momentanea distrazione o altro, non sia più possibile una localizzazione sicura da parte del soggetto.

D'altra parte, nelle varie sedute, e anche in una medesima, deve notarsi che le oscillazioni, tra i singoli valori e tra le medie degli errori dei medesimi punti, sono piuttosto ampie e che solo si compensano reciprocamente trovandosi, tra i valori ottenuti in una unica seduta, a lato a valori medi piuttosto elevati per certi punti, altri più bassi per altri punti. Ciò si potrebbe spiegare ammettendo dei mutamenti nella vivacità delle singole rappresentazioni dei punti stimolati, che avvengano anche nel corso di una seduta, e delle influenze reciproche fra le rappresentazioni dei vari punti tattili di una regione. Quest'ultime, pur non giungendo a chiara conoscenza del soggetto, si svolgerebbero continuamente nel campo della coscienza. Codeste rappresentazioni secondarie mutevoli fanno sì che si rafforzino o si indeboliscano, a seconda dei casi, certi caratteri secondari della rappresentazione del luogo del punto stimolato. Infatti, è per me certo, che, anche nello stimolare un singolo punto tattile, una serie numerosa di caratteri secondari della rappresentazione, dipende da altre rappresentazioni riprodotte, o da frammenti di queste, legate in qualche modo ai punti sensitivi delle parti circostanti, e che esse contribuiscono in gran parte a dare ciò che fu detto il colore locale della sensazione.

Tali caratteri secondari della rappresentazione hanno modo di farsi valere particolarmente quali determinanti della direzione degli errori. In sette dei punti esaminati, predominano, come

abbiamo rilevato (Tab. VII), gli errori in senso prossimale; in tre invece in senso mediale. Nella direzione, nella quale viene commesso il maggior numero di errori, si ha ragione di supporre che le rappresentazioni dei vari punti sensibili abbiano con quelle dei punti realmente stimolati, dei caratteri di somiglianza, maggiori che non nelle altre direzioni. Sulle pareti laterali del torace, in parecchie regioni delle quali ho studiato con cura la direzione degli errori, ho visto che questi predominavano nella direzione degli spazi intercostali e quindi dei rispettivi nervi. I caratteri della rappresentazione varierebbero perciò meno lungo il decorso del nervo. Ed ho cercato inoltre di spiegare tale fatto supponendo che alla sensazione suscitata dallo stimolo si associno nella rappresentazione del luogo toccato anche sensazioni riprodotte, determinate da eccitazioni antecedenti dello stesso nervo o filo nervoso.

Le condizioni di innervazione del braccio sono molto più complesse di quelle degli spazî intercostali; e, da ciò, la maggiore difficoltà per potere affermare che i fattori accennati siano le uniche cause del predominio degli errori in determinate direzioni. Rimane però certo per me che queste non possono vedersi nelle rappresentazioni visive generali della parte, poichè non si comprenderebbe, per es., come a lato alla prevalenza in 7 su 10 dei punti esaminati del numero degli errori nella direzione prossimale, si abbia in tre tale predominio in quella mediale, per quanto questi ultimi tre punti fossero piuttosto distanti tra loro e frammisti agli altri.

A lato al riprodursi di rappresentazioni legate ad organi di senso dipendenti dallo stesso nervo, altre associazioni si stabiliscono in qualche modo con elementi di rappresentazioni connesse coi punti sensitivi delle regioni circonvicine. Solo quindi da numerose localizzazioni si può riuscire a determinare i fattori associativi prevalenti e ad ottenere un valore medio relativamente costante, anche date le oscillazioni dei singoli errori; valore che non appare modificarsi sotto l'azione dell'esercizio. L'effetto della mancanza di uno speciale esercizio si manifesta perciò, almeno da quanto risulta dalla mia esperienza, solo durante le prime decine di localizzazioni, e dipende, non da una minore precisione nelle rappresentazioni di luogo, ma piuttosto da un adattamento del soggetto alle esperienze di localizzazione, in

quanto egli imparerebbe, come già dissi, a trattenere nel centro visivo della coscienza la sensazione suscitata dallo stimolo per tutta la durata della ricerca del punto toccato.

Passiamo ora a considerare brevemente lo stato del soggetto di fronte all'altro gruppo di esperienze. Nella determinazione della finezza della discriminazione tattile, il soggetto deve distinguere fra di loro due sensazioni contemporanee. Da principio, certamente, egli indirizza la sua attenzione più al numero degli stimoli, che non ai caratteri qualitativi della sensazione, e solo quando la dualità si impone, senza alcuno sforzo di analisi, esprime il suo giudizio sulla loro duplicità.

Anche il Tawney ammette a tal proposito che l'attenzione dei soggetti sia diretta all'inizio obbiettivamente e che essi non siano in principio affatto consci dei caratteri delle sensazioni. Solo nel seguito delle esperienze il soggetto dirige la propria attenzione ai caratteri della sensazione. Ed io credo che ciò avvenga spontaneamente in gran numero di soggetti. Ma le condizioni per l'apprezzamento dei caratteri proprî delle due sensazioni rimangono sfavorevoli per la contemporaneità dei tocchi. All'inizio del periodo d'esercizio si impongono maggiormente alla mente del soggetto i caratteri di identità che non quelli più lievi di differenza, che esistono tra sensazioni della stessa qualità fondamentale; e inoltre, rende più difficile la distinzione la tendenza a riunire in un'unica rappresentazione le sensazioni riferite ad una limitata regione cutanea, servendoci le sensazioni tattili, non aiutate da movimenti, sopratutto alla percezione e interpretazione di superficî di contatto piuttosto estese. Si comprende, perciò, come solo in seguito al ripetersi frequente delle esperienze, il soggetto possa poi riuscire a cogliere le lievi differenze che prima sfuggivano, e ad astrarre, fino ad un certo punto, dai caratteri comuni delle due sensazioni. Tale apprezzamento tuttavia permane sempre difficile per la contemporaneità delle impressioni. Analoghe difficoltà per un'analisi delle diverse componenti di una rappresentazione si incontrano facilmente anche in altri campi di sensazioni. Soltanto un orecchio allenato può, ad es., distinguere i componenti di un accordo ad una prima audizione; laddove un altro, che non lo sia, li potrà distinguere solo dopo ripetute audizioni. Con ciò, però, non può negarsi che in determinate condizioni di esperienza l'esercizio

possa essere simulato, esagerato ed offuscato per opera dell'auto-suggestione e di fattori analoghi.

Le presenti ricerche sono ancora troppo limitate per potere escludere che si constatino delle varietà individuali anche negli effetti dell'esercizio sulle localizzazioni, e che i segni dell'esercizio nel campo delle localizzazioni si vadano lentamente stabilendo; assai più lentamente forse di quanto possa essere constatato in una serie di ricerche anche più estese delle mie. Lo studio dell'esercizio, quale io ho condotto sulla localizzazione, ha voluto essere, oltre che un tentativo di analisi psichica delle rappresentazioni spaziali cutanee, anche l'inizio di un gruppo di ricerche sulla localizzazione tattile, che potrebbero essere condotte con relativa facilità e particolarmente nelle scuole, su molte altre questioni, ad alcune delle quali ho accennato all'inizio del lavoro, e ciò analogamente a quanto si è in parte già fatto per le ricerche sulla discriminazione tattile.

Istituto di Psicologia sperimentale della R. Università di Torino (Fondazione E. E. Pellegrini) diretto dal Prof. F. Kiesow.

Il decorso nel tempo delle rappresentazioni spaziali cutanee.

Nota del Dott. MARIO PONZO.

Erano necessarie la dolorosa esperienza di Kinnebrook, le ricerche del Bessel (1) e quindi il grande sviluppo ulteriore di quel capitolo della psicologia sperimentale, così ricco di risultati, intorno ai tempi di reazione, per convincere dell'intercorrenza di un tempo relativamente lungo tra il momento dell'applicazione dello stimolo e quello della percezione del medesimo. Di questo fatto ogni sperimentatore è oggi convinto, ma non lo è egualmente chi, estraneo a ricerche sperimentali psicologiche, eseguisce le prime reazioni e dubita ancora che ciò possa essere l'effetto della registrazione mediante gli ordigni oscuri e complicati dello sperimento.

---

(1) Per particolari in proposito vedasi: N. Alechsieff, *Reactionszeiten bei Durchgangsbeobachtungen*, " Wundt's Philosophische Studien ", Bd. XVI, p. 1-60, 1900.

Vi è però ancora nelle stesse esperienze un altro punto, sul quale l'introspezione da sola ci induce nuovamente in inganno. Codesto punto è costituito dal credere che colla percezione della sensazione si abbia immediata anche quella del luogo stimolato. Tali pensieri possono cogliersi con facilità, all'inizio di ricerche simili a quelle da me condotte e che verrò dimostrando nel presente lavoro, dalla bocca dei soggetti, che si stupiscono dell'esperienza alla quale sono sottoposti, e *sentono* di reagire con uguale rapidità, tanto nella reazione sensoriale, quanto in quella di discernimento del luogo stimolato. Codeste manifestazioni dei soggetti persistono anche quando essi sono già abituati alle esperienze ma ne vengono tenuti loro nascosti i risultati, sotto forma di dubbio che i risultati non siano buoni, che la preparazione di fronte allo stimolo sia erronea, ecc.

Osservazioni e pensieri simili debbono essere stati, a parer mio, una delle fonti delle teorie nativistiche nel dominio delle rappresentazioni spaziali. Certo è che, anche senza volere insistere su di ciò, non mancano nelle trattazioni sulle rappresentazioni spaziali delle decise affermazioni sulla contemporaneità della percezione della qualità di una sensazione con quella della sua provenienza da un determinato luogo dello spazio. Così Stumpf afferma che da nessuna delle ragioni portate dagli empiristi a proposito dell'origine delle rappresentazioni spaziali può trarsi un argomento valevole in qualsiasi modo contro l'ipotesi che lo spazio venga rappresentato contemporaneamente alla qualità e lo sia originariamente come questa (1).

Non solo lo spazio, ma anche l'ordine spaziale è, secondo lui, dato originariamente insieme alla qualità di una sensazione. La localizzazione non è quindi un prodotto dell'anima, ma è primitiva e solo condizionata da cause fisiche, le stesse dalle quali dipende lo spazio (2).

In Funke (3) trovasi, ad es., il passo seguente: " Contemporaneamente ad una pressione e ad una sensazione termica di

(1) C. Stumpf, *Ueber den psychologischen Ursprung der Raumvorstellung*, Leipzig, S. Hirtel, 1873, p. 126.

(2) Op. cit., p. 275.

(3) Funke, *Ortsinn der Haut*, " Hermann's Handb. d. Physiologie der Sinnesorgane ", Bd. III, Teil II, p. 375.

qualsivoglia intensità ed indissolubilmente legata ad esse, si presenta alla coscienza la rappresentazione del luogo stimolato „.

Il campo di esperienze da me tentato è già stato antecedentemente argomento di ricerche per v. Kries e Auerbach (1) e per Buccola (2), il geniale pioniere delle ricerche cronometriche in Italia.

Kries e Auerbach usarono, nel determinare i tempi di reazione per un atto di localizzazione tattile, degli stimoli consistenti in scosse di una corrente di induzione, che venivano senza regola determinate ora sul terzo inferiore dell'avambraccio ed ora sul dorso della mano. Il soggetto reagiva quando aveva riconosciuto il luogo di provenienza dello stimolo, ma solo quando esso avveniva su una delle due località, che veniva stabilita prima dell'inizio delle reazioni. In queste esperienze si aveva però, come giustamente osservò il Wundt, non solo un atto di discernimento della regione eccitata, ma anche un atto di scelta per il fatto che il soggetto doveva pure decidersi tra il movimento di reazione e l'astenersi da esso. Più facilmente interpretabili sono quindi i dati di Buccola, che, seguendo le idee direttive del Wundt, determinò i tempi del discernimento tattile applicando gli stimoli sul terzo inferiore dell'avambraccio e sulla punta di un dito, mentre il soggetto reagiva ad ogni applicazione, non appena aveva riconosciuto il luogo dello stimolo. Lo stimolo usato dal Buccola non era più elettrico, ma di natura meccanica. Egli, da alcune serie di esperienze, potè così ricavare, come media generale del tempo di reazione con discernimento, un valore di 177^{σ} sulla punta del dito e di 191^{σ} sul terzo inferiore dell'avambraccio. Il tempo di reazione semplice sulle stesse regioni era di 146^{σ} sulla prima regione e di 149^{σ} sulla seconda.

Nuoce, però, qualora si vogliano stabilire delle considerazioni sul perchè delle differenze di tempo nelle due specie di

---

(1) J. v. Kries und F. Auerbach, *Die Zeitdauer einfachster psychischer Vorgänge*, " Arch. f. Anatomie u. Physiol. „, Physiologische Abth., 1877, p. 297-378.

(2) G. Buccola, *La legge del tempo nei fenomeni del pensiero*, Milano, Dumolard, 1883, cap. IX.

reazione, il fatto che, dopo la scoperta del Lange (1), si prende per lo più come termine di confronto, per le reazioni ad atti psichici complessi, la forma sensoriale della reazione semplice. Ora, data la non grande entità delle differenze di tempo tra la reazione semplice del Buccola e quella di discernimento, questa potrebbe venire interpretata come una diversa preparazione del soggetto di fronte allo stimolo, nel senso che, nella reazione con discernimento, questi reagisca piuttosto sensorialmente, e, nella reazione semplice, piuttosto muscolarmente.

Le mie esperienze differiscono poi da quelle del Buccola in quanto che tutte le stimolazioni furono eseguite nella stessa regione, sulla quale rimaneva di continuo tesa l'attenzione del soggetto, che perciò non doveva, nel momento dell'applicazione dello stimolo, spostarsi dalla mano al braccio. Procedendo in tal modo, non vi era inoltre il pericolo che vi potessero essere delle differenze nei tempi di reazione in ragione delle diversità di sensibilità, di esercizio, ecc., tra le parti in esame.

La regione prescelta per le mie esperienze fu la palma della mano, in corrispondenza della parte centrale della quale veniva limitata con alcuni segni in matita una zona della grandezza all'incirca di una moneta da 10 centesimi, ed entro tali limiti veniva, or qua, or là, applicato lo stimolo. Pur essendo la zona così limitata, le differenze regionali tra i diversi punti stimolati erano chiarissime e balzava subito evidentissima alla mente del soggetto l'immagine della località toccata. Lo stimolo tattile usato era di intensità media e lo si applicava per mezzo dell'estesiometro per i tempi di reazione ideato dal prof. Kiesow (2). L'applicazione di esso era preceduta, ad intervallo costante di 2 secondi, da apposito segnale. Per non avere il disturbo del metronomo nella stanza, in cui soggetto e sperimentatore lavoravano, quello era collocato in un'altra, ed i suoi battiti erano trasmessi con segnali luminosi (3). Il soggetto durante le rea-

(1) L. Lange, *Neue Experimente über den Vorgang der einfachen Reaction auf Sinneseindrücke*, " Wundt's Philos. Studien ,, Bd. 4, pag. 479-510.

(2) F. Kiesow, *Neue Aesthesiometer für Reactionszwecke nebst der entsprechenden Versuchsanordnung*, " Zeitschr. f. biol. Techn. und Meth. ,, Bd. II, p. 243, 1912.

(3) M. Ponzo, *Ueber eine Vorrichtung um Lichtreize für gewisse Reactionsversuche als Signale zu verwenden*, " Zeitschr. f. biol. Techn. und Meth. ,, Bd. II, p. 188, 1911.

zioni manteneva gli occhi chiusi. La reazione consisteva nell'alzare il dito indice dal tasto di reazione. Nelle esperienze servimmo da soggetti io ed il sig. C. Servetti, al quale porgo anche qui il mio ringraziamento.

Nella reazione sensoriale il soggetto reagiva quando diveniva chiara nella sua coscienza la qualità tattile della sensazione, sulla quale concentrava, nel periodo di attesa, l'attenzione.

Nelle reazioni di localizzazione il soggetto reagiva nel momento in cui sorgeva in lui la rappresentazione del luogo toccato. In base a quali criteri essa sorgesse, è difficile dire, poichè il soggetto aveva, come già accennai, l'impressione della contemporaneità della sensazione e della rappresentazione di luogo. Si può però escludere che, nel modo da me usato, la localizzazione intervenisse in base a rappresentazioni spaziali di carattere visivo. Nel momento dell'attesa il soggetto aveva certamente una rappresentazione visiva della palma della mano, ma questa non era che vaga. Io ho provato coll'osservazione ad analizzarne il contenuto. Tale rappresentazione mi appariva come mal definita nei suoi limiti, a carattere generale, comprendente intieri tratti di mano confinanti colla palma; in essa non potei mai visualizzare la conformazione della pelle, pur così caratteristica per l'esistenza delle serie papillari e delle pieghe funzionali. Malgrado tale incertezza, il punto toccato era localizzato con tanta sicurezza, che deve ritenersi che la percezione del luogo della localizzazione, pur non potendo tradursi in immagine visiva, avvenga in base a motivi di ordine puramente tattile.

Un fenomeno che parla per la diversa preparazione del soggetto di fronte alle due forme di reazione, è questo, da me spesse volte osservato durante il decorso delle esperienze: che nelle reazioni di localizzazione mi era possibile far sorgere, e di frequente sorgeva spontaneamente, il ricordo dei punti della palma eccitati nelle applicazioni precedenti dello stimolo, mentre tal fatto non avveniva nelle semplici reazioni sensoriali. In queste, le sensazioni parevano molto più uniformi, sparivano dalla coscienza senza lasciar traccia. Il soggetto non avrebbe potuto dire se il luogo stimolato attualmente fosse lo stesso, o diverso dal precedente.

L'effetto della diversa disposizione dell'attenzione del sog-

getto nei due ordini di esperienze, mi costrinse a mutare inoltre l'ordine nel quale io intendevo condurle. Mentre io, da principio, contavo di alternare, di 10 in 10, reazioni sensoriali a reazioni di localizzazione, mi convinsi che era impossibile variare così frequentemente la direzione dell'attenzione del soggetto, senza correre il pericolo di rendere i dati malsicuri, poichè questi permaneva, o ricadeva, nel modo di reagire della serie antecedente. Dovetti quindi fare eseguire prima le reazioni sensoriali, e, dopo queste, quelle di localizzazione.

Vennero eseguite complessivamente dai due soggetti 800 reazioni, delle quali, in ciascuno di essi, 200 furono sensoriali e 200 di localizzazione.

Nella tabella sottostante (Tab. I) sono riportate le medie di ciascun centinaio, la media generale e la variazione media da codesto valore. È inutile dire che, come in tutti i lavori che si conducono in codesto campo, si cercò di evitare la stanchezza del soggetto lasciando una piccola pausa tra reazione e reazione, una maggiore tra ogni decina, e non prolungando eccessivamente la seduta. Le esperienze vennero condotte in parte nelle ore del mattino, in parte in quelle del pomeriggio e vennero esaurite nel decorso di parecchie settimane.

Alla prima tabella, che dà i tempi medî delle reazioni sensoriali e di localizzazione e le variazioni medie, ne segue una seconda, in cui è stata segnata la distribuzione dei singoli valori di reazione nella serie di decine comprese tra quella, in cui cade il valore minimo, e quella, in cui si ha il valore massimo. Tale tabella unitamente alla variazione media generale serve sopratutto a dimostrare il decorso delle esperienze e a dare maggiore valore ai tempi medî di reazione (1).

---

(1) F. Kiesow, *Ueber die einfachen Reactionszeiten der taktilen Belastungsempfindung*, " Zeitschr. f. Psychologie d. Sinnesorg. ", Bd. 35, p. 37 e seg., 1903.

TABELLA I.

Soggetti	Forma delle reazioni	Medie in σ delle singole centinaia: I cent.	II cent.	Medie generali in σ	Variazioni medie generali
M. Ponzo	sensoriali	178,72	177,44	178,08	18,0176
	di localizzazione	241,41	227,03	234,22	25,9342
C. Servetti	sensoriali	174,57	168,63	171,60	14,657
	di localizzazione	219,42	223,84	221,63	27,2208

TABELLA II.

Decine	Soggetto M. Ponzo: Reazioni sensoriali	Reazioni di localizzazione	Soggetto C. Servetti: Reazioni sensoriali	Reazioni di localizzazione
131 - 140	2	—	2	—
141 - 150	18	—	22	—
151 - 160	23	—	39	—
161 - 170	34	—	**44**	—
171 - 180	27	1	38	14
181 - 190	**40**	8	25	23
191 - 200	26	21	15	25
201 - 210	12	**27**	9	**27**
211 - 220	10	22	3	**26**
221 - 230	1	22	1	12
231 - 240	5	**26**	2	22
241 - 250	1	11	—	14
251 - 260	0	16	—	8
261 - 270	1	17	—	10
271 - 280	—	11	—	4
281 - 290	—	7	—	5
291 - 300	—	7	—	4
301 - 310	—	4	—	5
311 - 320	—	—	—	1

Il tempo medio di localizzazione risulta nei due soggetti più lungo di quello medio della reazione sensoriale semplice, e cioè in Ponzo di 56 $^{\sigma}$, in Servetti di 50 $^{\sigma}$ circa. Dalla tabella di distribuzione dei valori nelle decine, il massimo addensamento dei valori risulta, per le reazioni sensoriali, in Ponzo nella decina tra 181 e 190 $^{\sigma}$, in Servetti in quella tra 161-170 $^{\sigma}$; in entrambi, nella decina antecedente a quella, in cui cade la media generale. Per le reazioni di localizzazione si hanno in entrambi i soggetti due massimi, in Ponzo nelle decine tra 201 e 210 $^{\sigma}$, e tra 231 e 240 $^{\sigma}$; in Servetti, in quelle tra 201 e 210 $^{\sigma}$ e tra 211 e 220 $^{\sigma}$. Il valore medio generale cade in Ponzo in corrispondenza del primo massimo; in Servetti, nella decina dopo il secondo massimo.

La maggiore lunghezza media delle reazioni di localizzazione di fronte a quelle sensoriali, dimostra all'evidenza che la localizzazione non avviene contemporaneamente al chiaro presentarsi della sensazione nella coscienza, ma la segue.

Questo intervallo di tempo deve, con ogni verosimiglianza, essere impiegato in processi psichici svolgentisi con grande rapidità nel campo più oscuro della coscienza. Essi non possono venire colti dall'osservatore nel loro decorso, ma la loro esistenza è unicamente rilevabile dai tempi impiegati nel compiersi.

Nello stesso campo di ricerche, altre esperienze possono venir condotte rendendo più determinato e limitato il discernimento, studiando, cioè, il tempo necessario a distinguere tra di loro due sensazioni tattili contemporanee.

Lo studio di tali atti di discriminazione tattile nel loro decorso nel tempo, era già stato tentato dal Buccola (1), che registrava il momento dell'applicazione sulla pelle delle due punte di un compasso di Weber, e quindi quello in cui il soggetto le riconosceva. Il metodo seguito dal Buccola in tali atti di discriminazione tattile, era un po' complicato, in quanto egli alternava irregolarmente le applicazioni di una punta sola con quelle di due punte; e, contemporaneamente alla reazione, il soggetto do-

(1) G. Buccola, *Il tempo del processo psichico nell'estesiometria tattile*, " Rivista speriment. di freniatria e di med. legale ", a. IX, p. 253-273, 1883.

veva dire se aveva percepito una impressione unica o doppia. Venivano perciò determinati i tempi di reazione per gli apprezzamenti delle impressioni uniche e doppie. Veniva poi ancora tenuto conto del numero dei giudizi erronei.

I risultati ottenuti dal Buccola sono molto interessanti sotto varî riguardi, ma le sue ricerche dovevano venire riprese ed estese anche per il fatto che, per la moltiplicità degli intenti che egli si era proposto, il numero delle sue esperienze era insufficiente a renderne i risultati assolutamente sicuri.

Con fine ben determinato, e precisamente con quello di mettere le reazioni di discriminazione in rapporto con quelle precedenti di localizzazione e trovarne così i caratteri comuni, e possibilmente i differenziali, io condussi sugli stessi soggetti una serie di esperienze a tal proposito. Mi servii, per l'applicazione degli stimoli, dell'estesiometro doppio da me ideato (1), e che presenta sull'apparecchio del Buccola indubbi vantaggi. Le lancette dell'orologio di Hipp si mettevano in movimento nel momento in cui entrambe le punte del compasso toccavano la pelle. Il soggetto reagiva appena avvenuta la percezione distinta dello stimolo doppio. Il suo giudizio non poteva che essere quello della duplicità dell'impressione, poichè la distanza a cui si trovavano fra di loro le due punte del compasso (in una serie di reazioni la distanza di 45 mm., in un'altra di 12 mm.) era superiore al valore della soglia di discriminazione sulla palma della mano in senso trasversale. In tal senso vennero infatti eseguite sempre le applicazioni delle punte.

Nelle tabelle sottostanti sono riportati i risultati delle reazioni di discriminazione per le due distanze prescelte, e la distribuzione dei singoli valori nelle decine. Le reazioni colla distanza maggiore delle punte furono eseguite prima di quelle colle punte a distanza minore. Vennero eseguite 600 reazioni, 300 per soggetto, di cui 200 usando la distanza maggiore e 100 usando quella minore.

---

(1) M. Ponzo, *Sur un nouveau compas pour mesurer les perceptions d'espace dans le champ des sensations cutanées*, " Archives ital. de biologie ", t. LVI, p. 139-144, 1911.

TABELLA III.

Soggetti	Distanza delle punte	Medie in σ delle singole centinaia		Medie generali in σ	Variazioni medie generali
		I cent.	II cent.		
M. Ponzo . .	45 mm.	224,26	209,37	216,82	22,92835
	12 „	247,24	—	—	27,7248
C. Servetti .	45 „	204,82	208,08	206,45	23,399
	12 „	220,19	—	—	29,0538

TABELLA IV.

Decine	Soggetto M. Ponzo		Soggetto C. Servetti	
	Distanza delle punte 45 mm. I e II cent.	Distanza delle punte 12 mm. III cent.	Distanza delle punte 45 mm. I e II cent.	Distanza delle punte 12 mm. III cent.
151 - 160	—	—	2	1
161 - 170	4	—	17	3
171 - 180	13	1	21	11
181 - 190	17	2	24	8
191 - 200	**36**	7	**33**	10
201 - 210	26	5	25	13
211 - 220	21	7	20	5
221 - 230	20	10	17	**16**
231 - 240	28	**12**	15	8
241 - 250	12	7	11	4
251 - 260	6	**12**	4	6
261 - 270	7	9	4	2
271 - 280	2	9	4	4
281 - 290	7	8	3	5
291 - 300	0	8	—	3
301 - 310	0	3	—	1
311 - 320	1	—	—	—

Come si scorge dalla terza tabella, l'atto di discriminazione, quando le due punte del compasso sono più vicine fra di loro, è più lungo. L'atto della discriminazione diviene in tal caso più difficile per il fatto che i caratteri differenziali tra le due sensazioni, che maggiormente si imponevano, quando le punte erano molto più discoste, diminuiscono, mentre aumentano i loro caratteri di somiglianza. In uno dei soggetti, in Ponzo, tale difficoltà, per la maggiore entità della differenza di tempo tra le due serie di esperienze, appare più grande che nell'altro.

Confrontando queste reazioni di discriminazione tattile con quelle sensoriali, esse risultano più lunghe di quest'ultime. Minore è la differenza tra le reazioni di localizzazione e quelle di discriminazione. Quando le punte sono tenute a 45 mm. di distanza, l'atto di discriminazione è nei due soggetti un po' più breve di quello di localizzazione sulla palma della mano. Per il fatto della poca entità della differenza tra i tempi di localizzazione e quelli di discriminazione, mentre è poco giustificabile vedere in ciò un carattere differenziale tra i due ordini di esperienze, è più opportuno di arguirne i caratteri comuni. Infatti, nei due atti psichici deve stabilirsi una serie di rapporti, nell'un caso tra due sensazioni attuali, nell'altro tra una attuale ed altre molteplici riprodotte. Lo stabilirsi di questi rapporti è espresso dal ritardo delle reazioni di localizzazione e di discernimento di fronte alle reazioni sensoriali.

Tali relazioni devono con ogni probabilità consistere in processi psichici di natura associativa. Parla, secondo me, in favore di codesta ipotesi il fatto trovato dal Buccola, che il tempo di localizzazione è vario a seconda delle diverse regioni cutanee ed è uguale in regioni omonime (1). Può forse ancora portarsi in favore dell'esistenza di codesti fattori associativi un'altra osservazione del Buccola (2), che, nel mettere a confronto i tempi di discernimento con quelli di semplice reazione, aveva potuto constatare che l'esercizio sarebbe di gran lunga più valido nella cronologia del processo mentale che implichi il discernimento dello spazio tattile eccitato.

---

(1) Buccola, *La legge del tempo nei fenomeni del pensiero*, p. 272. Vedasi anche a tal proposito il lavoro citato di v. Kries e Auerbach, p. 314.

(2) Buccola, “ Riv. sper. di freniatria „, op. cit., p. 272.

In base ai risultati così evidenti delle esperienze su esposte rimarrebbe quindi esclusa, secondo me, la possibilità di una localizzazione contemporanea alla semplice percezione di una sensazione tattile; e, sopratutto per tale ritardo della localizzazione, si avrebbe un forte argomento per supporre come probabilissimo che nella localizzazione si tratti sempre dello stabilirsi di nessi associativi tra molteplici rappresentazioni tattili. Non sarebbe perciò ammissibile, a parer mio, nell'individuo cosciente una localizzazione tattile assoluta, intesa nel senso che quest'atto psichico possa avvenire in base alla sola natura della sensazione provocata da uno stimolo puntiforme, senza che essa debba prima mettersi in un sistema di rapporti più o meno vasti con altre. Con ciò, però, non intendo qui entrare nella questione sull'origine delle rappresentazioni spaziali tattili, sulla quale spero di potermi trattenere in un prossimo lavoro.

Istituto di Psicologia sperimentale della R. Università di Torino (Fondazione E. E. Pellegrini), diretto dal Prof. F. Kiesow.

Sulla lunghezza di una curva.

Nota di LEONIDA TONELLI

In una comunicazione fatta, alcuni anni or sono, a cotesta illustre Accademia (*), determinai la condizione necessaria e sufficiente affinchè la lunghezza l di una curva continua, rettificabile:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \qquad (t^{(0)} \leq t \leq t^{(1)}),$$

sia data dall'integrale classico:

$$\int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\, dt. \tag{1}$$

Più precisamente, dimostrai che:

1° *Ponendo uguali a zero le derivate* $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$

(*) L. Tonelli, *Sulla rettificazione delle curve*, " Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino ", vol. XLIII, 1908.

nei punti ove esse non risultano determinate e finite, l'integrale (1) *esiste sempre e sempre soddisfa alla disuguaglianza*:

$$\int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \leq l\,;$$

2° *Condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia*:

$$\int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt = l$$

è che le x(t), y(t), z(t) *siano funzioni assolutamente continue* (*).

La dimostrazione di questo enunciato, da me data, per quanto perfetta dal punto di vista del rigore, è un po' lunga e *pesante*, e sempre fu in me vivo il desiderio di sostituirla con altra più breve ed agile. La lettura della dimostrazione di un caso particolare dello stesso teorema in questione, che trovo nel bel *Cours d'Analyse Infinitésimale* di Ch. I. De la Vallée Poussin (**), me ne offre ora il modo. Debbo anzi dichiarare che, con l'aggiunta di alcune considerazioni, io posso ripetere qui tal quale il ragionamento del De la Vallée Poussin, e sostituire così il mio antico in quella parte — che è appunto la più laboriosa — che si riferisce alla dimostrazione del primo dei due risultati sopra ricordati, e della condizione sufficiente per l'uguaglianza tra la lunghezza e l'integrale.

La seconda parte di questa Nota ha intento prevalentemente didattico.

Nella scuola, considerata la rappresentazione cartesiana:

$$y = f(x) \qquad (a \leq x \leq b)$$

di una curva, si dimostra che, se la funzione $f(x)$, continua, ammette, in tutto (a, b), una derivata $f'(x)$ *limitata* e integrabile (nel senso di Riemann), allora la curva ha lunghezza determinata e finita, la quale viene data dall'integrale:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{ f'(x) \}^2}\, dx\,.$$

(*) Vale a dire, delle funzioni integrali.

(**) Deuxième édition, Louvain, A. Uystpruyst, 1909, pag. 362. Il De la Vallée Poussin suppone l'esistenza, per le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, dei numeri derivati finiti.

Ma poichè nelle applicazioni pratiche si presenta frequentissimo il caso della derivata infinita (tangente parallela all'asse delle y) (*), è conveniente considerare — ciò che in generale non si fa — anche questo caso, del quale appunto noi ci occuperemo qui (**).

§ I.

1. Sia la curva continua, rettificabile:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \qquad (t^{(0)} \leq t \leq t^{(1)})$$

e indichiamone con $l(t)$ la lunghezza nel tratto $(t^{(0)}, t)$. Questa $l(t)$, come funzione non decrescente di t, ha la derivata $l'(t)$ finita in tutti i punti di $(t^{(0)}, t^{(1)})$, ad eccezione al più di un insieme di misura nulla (***); e si ha (****):

$$\int_{t^{(0)}}^{t} l'(t)\, dt \leq l(t). \tag{2}$$

Per essere poi a variazione limitata le tre funzioni che dànno le coordinate della curva (teorema di Jordan), possiamo dire che, ad eccezione di un insieme di nulla misura E, le quattro derivate x', y', z', l', esistono insieme, determinate e finite. Poniamo, per definizione, in E:

$$x'(t) = y'(t) = z'(t) = l'(t) = 0.$$

(*) Per es.: nella rettificazione di una semicirconferenza.

(**) Lo spezzamento della curva e il cambiamento degli assi coordinati — fatto per ricondurre il caso attuale a quello precedente — impongono maggiori restrizioni e dànno luogo ad un'obbiezione, per rimuovere la quale occorre fare ragionamenti che sono, in sostanza, quelli che andiamo ad esporre.

(***) Cfr. H. Lebesgue, *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris, Gauthier Villars, 1904, pag. 128; De la Vallée Poussin, loc. cit., pag. 268.

(****) Cfr. per es.: De la Vallée Poussin, loc. cit. pag. 266.

Se t è un punto di $(t^{(0)}, t^{(1)})$ non appartenente ad E, abbiamo:

$$(3) \qquad l'(t) = \lim_{t_1=t} \frac{l(t_1)-l(t)}{t_1-t} \geq \lim \frac{\sqrt{\{x(t_1)-x(t)\}^2 + \{y(t_1)-y(t)\}^2 + \{z(t_1)-z(t)\}^2}}{t_1-t}$$
$$\geq \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 + \{z'(t)\}^2}\,.$$

La funzione $\sqrt{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 + \bar{z}'^2}$, come limite di funzioni continue, è misurabile sul gruppo complementare di E, e perciò anche su tutto $(t^{(0)}, t^{(1)})$. Essendo poi, sempre sul complementare di E, non negativa e minore ed uguale alla funzione integrabile $l'(t)$, è essa pure integrabile. Dalle disuguaglianze (2) e (3) si ha allora:

$$(4) \qquad \int_{t^{(0)}}^{t} \sqrt{\bar{x}'^2 + \bar{y}'^2 + \bar{z}'^2}\, dt \leq l(t)\,.$$

La prima parte del nostro teorema è dunque dimostrata.

2. Si divida ora l'intervallo $(t^{(0)}, t)$ in un numero finito di parti (t_i, t_{i+1}), e si supponga che la distanza di un punto qualsiasi della curva da un punto fisso della curva stessa sia una funzione assolutamente continua del parametro t — e ciò qualunque sia il punto fisso scelto. Si avrà così, ponendo:

$$\varphi_i(t) = \sqrt{\{x(t)-x(t_i)\}^2 + \{y(t)-y(t_i)\}^2 + \{z(t)-z(t_i)\}^2}$$
$$= \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}\,,$$

$$\varphi_i(t) = \int_{t_i}^{t} \varphi_i'(t)\, dt = \int_{t_i}^{t} \frac{(x-x_i)x' + (y-y_i)y' + (z-z_i)z'}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}\, dt$$
$$\leq \int_{t_i}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt\,.$$

E perciò:

$$l(t) = \lim \sum \varphi_i(t_{i+1}) \leq \lim \sum \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$
$$\leq \int_{t^{(0)}}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt\,.$$

Da questa disuguaglianza e dalla (4), si ricava precisamente:

$$l(t) = \int_{t^{(0)}}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt. \tag{5}$$

3. Occorre vedere quando l'ipotesi ammessa al numero precedente risulta soddisfatta. A tal fine ricordiamo un lemma da noi dimostrato alla Nota citata: condizione necessaria e sufficiente affinchè la lunghezza $l(t)$ sia una funzione assolutamente continua è che lo siano $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Possiamo allora dire che, se $\varphi_i(t)$ è assolutamente continua, vale la (5) (n. precedente) e perciò $l(t)$ e le $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ sono anch'esse assolutamente continue. Viceversa, se lo sono le tre ultime funzioni, lo è anche $l(t)$ e per conseguenza $\varphi_i(t)$. Ciò scende subito dalle disuguaglianze (*):

$$|\varphi_i(t') - \varphi_i(t'')| \leq \sqrt{\{x(t') - x(t'')\}^2 + \{y(t') - y(t'')\}^2 + \{z(t') - z(t'')\}^2}$$
$$\leq |l(t') - l(t'')|$$

e dalla definizione stessa di funzione assolutamente continua. Si ha così la proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè la distanza di un punto mobile della curva:

$$x = x(t), \qquad y = y(t), \qquad z = z(t), \qquad (t^{(0)} \leq t \leq t^{(1)})$$

da un punto fisso della curva stessa, sia — per qualunque punto fisso — funzione assolutamente continua di t, *è che tali siano* x(t), y(t), z(t) (**).

4. Da quanto si è detto ai nn. 2 e 3 scende che:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè si abbia:

$$l(t) = \int_{t^{(0)}}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

(*) La differenza di due lati di un triangolo è minore del terzo; la corda è minore dell'arco corrispondente.

(**) In questo enunciato si può sostituire al punto fisso preso sulla curva un punto qualunque dello spazio.

è che le x (t), y (t), z (t) *siano assolutamente continue.*

Osservando poi che se è:

$$l(t^{(1)}) = \int_{t^{(0)}}^{t^{(1)}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt$$

è anche:

$$l(t) = \int_{t^{(0)}}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt,$$

per essere (n. 1):

$$\int_{t^{(0)}}^{t} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \leq l(t),$$

$$\int_{t}^{t^{(1)}} \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\, dt \leq l(t^{(1)}) - l(t),$$

si vede che il teorema precedente equivale a quello enunciato nell'introduzione.

§ II.

1. In questa seconda parte non faremo più uso della nozione di integrale del Lebesgue, ma considereremo solo integrali nel senso di Cauchy-Riemann (*).

Supponiamo già dimostrato che se la derivata $f'(x)$ della funzione continua $f(x)$ è limitata in tutto (a, b) e $\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ è, in (a, b), integrabile, la lunghezza, ossia il limite delle poligonali inscritte nella curva:

$$y = f(x), \tag{1}$$

al tendere a zero del massimo loro lato, esiste determinato e finito, ed è uguale a:

$$\int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx. \tag{2}$$

(*) Ricordiamo che, nel caso delle funzioni illimitate, le definizioni d'integrale di Lebesgue e di Cauchy-Riemann non sono del tutto concordi; nel senso che se è pur vero che, esistendo i due integrali, essi sono necessariamente uguali, esistono però anche delle funzioni che ammettono il primo integrale e non il secondo, e viceversa. Possiamo, tuttavia, osservare che, nel caso che andiamo a considerare, le due definizioni sono in tutto equivalenti.

Da ciò si deduce immediatamente che la lunghezza di una qualsiasi poligonale inscritta sulla curva (1) (*) è sempre minore od uguale all'integrale sopra scritto.

Osservato ciò, ci proponiamo di dimostrare che:

Se la f′(x) *non è limitata nell' intorno di un sol punto* c *di* (a, b), *pur esistendo l'integrale* (2), *esiste anche qui il limite per le lunghezze delle poligonali inscritte nella curva al tendere a zero del massimo loro lato, e tal limite è ancora uguale al solito integrale.*

Per maggior generalità, supporremo c interno all' intervallo (a, b). Sia $(c - \delta, c + \delta)$ un intorno di c, appartenente ad (a, b) e tale che ogni segmento rettilineo congiungente due punti qualsiasi della curva, che corrispondano a punti di questo intorno, sia in lunghezza minore di ϵ. La cosa è possibile per la continuità della $f(x)$.

Inscriviamo nella curva una poligonale, tale che le proiezioni dei suoi lati sull'asse x siano tutte $< \delta$, e siano M ed N i vertici della poligonale, distinti da C (punto corrispondente a c) e più vicini a esso, rispettivamente a sinistra e a destra. M e N cadono in $(c - \delta, c + \delta)$ ed è:

$$\overline{MC} < \epsilon, \qquad \overline{CN} < \epsilon.$$

2. Indicando con A e B i punti estremi della curva, si ha, poichè in (a, m) e (n, b) (m e n ascisse di M e N) la $f'(x)$ è limitata, e si è perciò nel caso della dimostrazione già ammessa:

$$\text{lung. polig. } AM \leq \int_a^m \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx,$$

$$\text{lung. polig. } NB \leq \int_n^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx,$$

$$\text{lung. polig. } AM + \text{lung. polig. } NB < \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx,$$

$$\text{lung. polig. } AB < \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx + 2\epsilon; \tag{3}$$

(*) Intenderemo sempre che sulle poligonali i vertici si susseguano nello stesso ordine che sulla curva.

la quale disuguaglianza risulta dunque dimostrata per ogni poligonale inscritta nella curva e avente le proiezioni dei suoi lati sull'asse x tutte minori del δ di dianzi.

Questo δ prendiamolo in modo che sia anche:

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\, dx < \epsilon . \tag{4}$$

Determiniamo poi un $\delta_1 < \delta$ in modo che: 1° ogni poligonale inscritta nell'arco $\widehat{AR}$ (R punto di ascissa $c-\delta$) o in $\widehat{SB}$ (S punto di ascissa $c+\delta$), ed avente le proiezioni dei suoi lati sull'asse x tutte minori di δ_1, differisca da:

$$\int_a^{c-\delta} \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\, dx \qquad \text{o} \qquad \int_{c+\delta}^{b} \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\, dx$$

per meno di ϵ — il che è possibile per un'osservazione analoga ad altra già fatta; 2° ogni corda della curva la cui proiezione risulti interna a $(c-\delta-\delta_1,\ c-\delta)$ o $(c+\delta,\ c+\delta+\delta_1)$ sia minore di ϵ. Fatto ciò si consideri una poligonale qualunque inscritta nella curva ed avente le proiezioni dei suoi lati sull'asse x tutte minori di δ_1. Siano R_1 e S_1 i vertici della poligonale più prossimi, a sinistra e a destra, rispettivamente, a R e S. R cade in $(c-\delta-\delta_1,\ c-\delta)$; S in $(c+\delta,\ c+\delta+\delta_1)$, ed è:

$$\overline{R_1R} < \epsilon , \qquad \overline{SS_1} < \epsilon .$$

È:

$$\text{lung. polig.}\, AB + 2\epsilon > \text{lung. polig.}\, AR_1 + \overline{R_1R} + \overline{SS_1} + \text{lung. polig.}\, S_1B$$

$$> \int_a^{c-\delta} \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\, dx - \epsilon + \int_{c+\delta}^{b} \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\, dx - \epsilon$$

e per la (4):

$$> \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\, dx - 3\epsilon$$

$$\text{lung. polig.}\, AB > \int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\, dx - 5\epsilon .$$

Da questa e dalla (3) si ricava:

$$\left| \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx - \text{lung. polig. } AB \right| < 5\epsilon ,$$

e questa disuguaglianza è soddisfatta per tutte le poligonali inscritte nella curva che hanno le proiezioni dei loro lati sull'asse x tutte minori di δ_1. Poichè ϵ è arbitraria, ciò basta per dimostrare che al tendere a zero del massimo lato delle poligonali le loro lunghezze tendono tutte a:

$$\int_b^a \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}\, dx .$$

Dimostrata la proposizione per un sol punto c, essa vale, necessariamente, anche per un insieme riducibile di tali punti (*).

(*) Facendo uso della nozione d'integrale del Lebesgue e del teorema di Jordan sulla rettificazione delle curve, la proposizione ora dimostrata potrebbe stabilirsi così: poichè esiste l'integrale nel senso di Cauchy Riemann di $\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$ esiste anche quello nel senso del Lebesgue (trattandosi qui di una funzione non negativa). E siccome $f'(x)$ è misurabile ed è $|f'(x)| < \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$, esiste anche l'integrale nel senso del Lebesgue di $|f'(x)|$ e perciò di $f'(x)$. La f' è finita in tutti i punti di (a, b), ad eccezione di un insieme riducibile; è quindi, per un noto teorema:

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(x)\, dx$$

per ogni x di (a, b). $f(x)$ risulta così funzione integrale, e, di conseguenza, assolutamente continua e a variazione limitata. Il teorema di Jordan dà allora che la curva $y = f(x)$ è rettificabile; e quello di cui si è trattato al § I, mostra che la lunghezza è data dall'integrale di $\sqrt{1 + \{f'(x)\}^2}$.

Di un fenomeno fotoelettrico osservato su lamine metalliche immerse nel toluene.

Nota del Socio ANDREA NACCARI.

Descrissi già in una breve Nota dell'aprile 1909 (1) alcune esperienze, nelle quali avevo osservato un fenomeno fotoelettrico su lamine metalliche immerse in un dielettrico liquido. Sul fondo di una vaschetta cilindrica contenente del toluene stava un disco di rame nichelato. Un disco di rete metallica vi stava sopra e dei pezzetti di vetro interposti impedivano ch'esso toccasse l'altro disco. La corrente data da una pila attraversava il liquido in un senso o nell'altro. Quando si faceva cadere sulla bacinella la luce diffusa del giorno, la corrente aumentava d'intensità.

Feci da quel tempo un gran numero di esperienze e ora mi propongo d'indicare il modo di ottenere il fenomeno con sicurezza e di descrivere gli effetti prodotti dalle radiazioni diurne, da quelle di una lampada Nernst e dalle ultrarosse, riservandomi di studiare in avvenire gli effetti delle radiazioni ultraviolette, il che non ho potuto fare finora.

Con la bacinella orizzontale, che aveva servito alle prime esperienze, non era possibile evitare una rapida evaporazione. Questo ed altri inconvenienti mi fecero abbandonare quella disposizione. Mi servii poi sempre di una vaschetta verticale con sezione rettangolare. Aveva essa l'altezza di 16 cm. e la larghezza di 14; fra le due pareti verticali maggiori la distanza interna era di 2 cm. Un rettangolo di rete metallica era addossato alla superficie interna della parete che doveva venir esposta alle radiazioni. Al di là della rete ponevasi una lamina metallica d'eguale altezza e d'eguale larghezza, circa 16×12 cm. Prima di mettere a posto la lamina la si fregava con carta di smeriglio. Dei sottili bastoncini di vetro impedivano il contatto fra rete e lamina. La distanza di esse stava fra uno e due mm.

(1) " Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino ", vol. XLIV, p. 580.

La vaschetta s'empiva con toluene. Un termometro stava a fianco della lamina col bulbo a metà dell'altezza in modo da essere esposto alle radiazioni come la lamina stessa.

La corrente era prodotta da una pila di coppie Leclanché e veniva misurata da un galvanometro a circuito mobile costruito da Hartmann e Braun e molto sensibile. Due reostati applicati al galvanometro, l'uno in serie, l'altro in derivazione, permettevano di variare entro limiti molto lontani la sensibilità dello strumento. La massima sensibilità, di cui si fece uso, corrispose a $0{,}5.10^{-9}$ Amp. per una divisione.

La vaschetta era collocata sopra una mensola vicina ad una finestra volta a levante. Le imposte interne della finestra servivano a dare e a togliere la luce.

1. Andamento e intensità del fenomeno. — Quando siasi disposto l'apparecchio nel modo descritto, occorre in generale lasciar chiuso il circuito per parecchie ore prima che si possa osservare il fenomeno nella sua piena intensità. Conviene anzitutto attendere che la corrente assuma un valore costante. Indi un riposo di qualche ora è pur utile. Per ciò avevo da principio sospettato che il fenomeno dipendesse dalla polarizzazione degli elettrodi, ma apposite esperienze fatte invertendo la corrente dopo aver osservato il fenomeno con un dato senso di essa, mi convinsero che quell'ipotesi non era giusta. Nè pare che un'azione elettrolitica della corrente, modificando il liquido, dia origine al fenomeno.

Quando le condizioni opportune sono raggiunte, l'aumento della corrente si fa manifesto tosto che le radiazioni cadono sull'apparecchio. Ciò vale specialmente per le radiazioni diurne quando hanno grande intensità. Se l'azione è debole, il ritardo può giungere anche a un minuto.

Coll'andare del tempo l'aumento della corrente per minuto cresce, poi va rallentandosi e alla fine cessa. Di poi succede, in generale, se la luce continua ad agire, una lenta diminuzione. Così, anche sotto l'azione della luce, la corrente ritorna dopo molto tempo al valor primitivo o almeno avvicinasi a questo. L'apparecchio rimanendo al buio, dopo un certo intervallo di tempo riprende la sua sensibilità. Il fenomeno è diverso da quell'indebolimento (*Ermüdung*) che si verifica nel fenomeno

Hallwachs e che si manifesta anche al buio. Nel caso delle mie esperienze si potrebbe piuttosto parlar di stanchezza, perchè l'apparecchio, stando al buio e a circuito chiuso, diventa nuovamente sensibile come prima.

Quando si lasci che le radiazioni operino per un tempo minore di quello che è necessario perchè l'aumento si estingua e la corrente torni al valore primitivo, tostochè si chiuda l'imposta, la deviazione diminuisce e ritorna dopo un certo tempo al valore primitivo o prende un valore poco diverso da quello. L'esperienza qui sotto riferita può servire come esempio dell'andamento del fenomeno nel caso, in cui si tolga l'azione delle radiazioni quando l'aumento della deviazione si arresta. La lamina era di rame e negativa, la rete di ottone. La pila aveva 127 coppie. Il cielo era perfettamente sereno. L'asterisco indica il momento in cui le radiazioni cominciarono ad agire e i due asterischi quello, in cui cessarono. La luce del cielo sereno attraversava il vetro dell'invetriata. Le deviazioni sono contate dalla deviazione osservata a circuito aperto. In questa e nelle altre esperienze riferite il galvanometro aveva la massima sensibilità.

Le temperature osservate al momento, in cui s'apriva l'imposta e quando la si chiudeva, sono segnate a fianco delle rispettive deviazioni.

$16^h\ 16^m$	311,2	
17	310,8	* 20°,80
18	327	
19	340	
20	351	
21	359	
22	365	
23	365	
24	365	** 20°,80
25	346	
26	338	
30	315	

Seguono i valori relativi ad un'altra esperienza, in cui lasciai agire la luce finchè l'effetto di essa si estinguesse, vale a dire finchè la corrente, dopo esser molto diminuita, assumesse

un valore costante. La lamina era di rame e positiva, la rete d'ottone. Il cielo era nuvoloso, ma la luce abbastanza abbondante.

$13^h\,59^m$	299,2
14 0	299,2 *
1	312
2	330
3	346
4	358
10	381
20	393
24	396,2
25	397
27	396
30	395
40	385
15 0	357
10	345
30	330
16 0	318
17 0	306
50	297
18 0	294 **
10	295

Riaprendo poco dopo l'imposte, non ho osservato effetto sensibile, ma il giorno dopo ripetei l'esperienza con effetto poco diverso.

L'intensità del fenomeno fu, nelle varie esperienze, molto diversa, non solo perchè la luce del giorno, che usai quasi sempre, è incostante, ma anche perchè la sensibilità dell'apparecchio dipende, come vedremo, da varie condizioni e sopra tutto dalla natura del liquido. Con alcuni saggi di toluene gli effetti furono molto minori di quelli riferiti, ma sempre chiari e con lo stesso andamento. Giova in generale che le maglie della rete non siano troppo larghe.

Cito qui un' esperienza, in cui l'effetto fu singolarmente grande, sicchè l'aumento della corrente salì a $^{51}/_{100}$ del valor primitivo della corrente stessa. La lamina era di rame e posi-

tiva, la rete d'ottone con maglie strette. La camera era fortemente illuminata, perchè i raggi solari entravano dalla finestra presso la quale stava l'apparecchio: essi non cadevano però sull'apparecchio, nè sui corpi vicini.

$11^h\ 6^m$	356
9	356 *
10	367,5
11	383,7
12	398
13	409,2
14	422
19	478,8
24	514
29	531,8
30	534
32	536
34	539
36	537,7 **
37	530
38	521

Ecco un'altra esperienza fatta in un pomeriggio di giugno con cielo coperto. La lamina era di rame e negativa. La rete d'ottone con maglie strette.

$14^h\ 18^m$	355
19	355,2 *
22	370,5
23	380
24	388,2
28	410
32	427
43	453
50	464
51	465,5
55	471
15 0	471 **
1	465
2	458

Anche quando la luce è debole, si può avere degli effetti notevoli. Ecco un' esperienza fatta finchè pioveva, con lamina positiva di rame e rete d'ottone.

11h 1m	307
2	307 *
3	310
10	332
20	347
30	355
40	367
41	367 **
42	356

L'esperienza che segue, fu fatta durante una nevicata abbondante, con lamina negativa di zinco e rete d'ottone.

15h 15m	553	
17	552,5 *	15,12
18	554,3	
19	558	
20	562	
21	564	
22	562 **	15,13
23	558,8	
24	556	

2. Influenza del riscaldamento. — Il fenomeno descritto poteva di primo tratto attribuirsi al riscaldamento prodotto dalle radiazioni. Fin da principio feci molte esperienze per mettere in chiaro la cosa. Determinai la variazione dell'intensità della corrente, che attraversava la vaschetta, tenuta al buio, quando la temperatura della stanza e con essa quella della vaschetta variavano. Trovai che all' incirca la variazione di un grado portava una variazione di circa venti divisioni nella deviazione. Esponendo poi l'apparecchio alle radiazioni diurne per cinque minuti, ebbi delle deviazioni di 30, di 60 e anche di 100 divisioni senza che il termometro indicasse un riscaldamento maggiore di qualche centesimo di grado. Qualche volta anche furono osservati degli effetti notevoli mentre la

temperatura della vaschetta andava abbassandosi. Non può dunque attribuirsi a riscaldamento l'aumento di corrente che costituisce il fenomeno.

3. **Effetto delle variazioni ultrarosse.** — Anche queste radiazioni producono un effetto consimile a quello delle luminose.

Una vaschetta eguale a quella, attraverso la quale passava la corrente, ma piena di acqua calda, veniva posta a pochi centimetri dall'altra. Si teneva conto della deviazione e del riscaldamento e sempre si trovò che l'aumento della deviazione era grandemente superiore a quello che il solo riscaldamento avrebbe prodotto. Si notò inoltre che al cessare delle radiazioni cessava l'aumento della deviazione e anzi la deviazione, come nel caso delle radiazioni luminose, diminuiva tanto da ridursi presto quasi al valore primitivo. Il termometro invece s'arrestava o discendeva lentamente: in qualche caso continuava a salire.

Ecco alcune di queste esperienze fatte con acqua a 50°. L'asterisco indica il momento in cui cominciò l'azione delle radiazioni, i due asterischi il momento, in cui essa finì.

$10^h\ 18^m$	482,7	
19	483 *	14° 62
20	509 **	78
21	503	80
22	490	80
23	489	78
$11^h\ 0^m$	482,8	
10	483 *	14° 35
11	507 **	43
12	501	
13	491	46
14	489	
$10^h\ 52^m$	561,8	
53	561 *	16° 50
54	575 **	16 70
55	562	82
56	558,2	80

4. Efficacia delle diverse radiazioni. — Non è possibile confrontare, a parità di condizioni, l'efficacia della lampada Nernst con quella delle radiazioni diurne. La lampada, cui era stato tolto il globo di vetro, si poneva a 60 cm. dalla vaschetta. In generale gli effetti ottenuti così da essa furono notevolmente minori di quelli dati dalle radiazioni diurne. Parrebbe anche dai risultati dell'esperienze che il rapporto fra i due effetti variasse a seconda della natura dei metalli e della qualità del toluene.

Quanto all'efficacia delle diverse radiazioni diurne feci alcune esperienze giovandomi di filtri opportuni. Una vaschetta di vetro contenente dell'acqua che formava uno strato di due centimetri, attenuava, com'è naturale, l' intensità del fenomeno e più ancora lo attenuava uno strato eguale della soluzione di solfato di ferro ammoniacale, quale fu suggerita dal Russner per trattenere i raggi ultrarossi. In media l'effetto venne così ridotto a $^{75}/_{100}$ del valore primitivo, il che conferma l'efficacia delle radiazioni luminose.

Di queste radiazioni quelle che hanno oltrepassato una soluzione concentrata di bicromato potassico sono molto meno efficaci di quelle che hanno oltrepassato uno strato eguale di una soluzione concentrata di solfato di rame.

5. Influenza della natura delle sostanze e della polarità degli elettrodi. — Dalle numerosissime esperienze eseguite risulta, in generale, che l'intensità del fenomeno dipende anzi tutto dal liquido. I numerosi saggi di toluene di provenienze diverse di cui mi servii, diedero tutti il fenomeno, ma con intensità molto diversa. Cercai con la distillazione frazionata di ottenere un liquido più attivo, ma non vi riuscii. Solo notai che il liquido distillato si presta meno bene del residuo, ma con poco o nessun vantaggio rispetto al liquido primitivo.

Sperimentai con parecchi metalli, rame, rame nichelato, zinco, alluminio, stagno, piombo e trovai piccole differenze quando il liquido rimaneva lo stesso. Non adduco dei numeri perchè è impossibile eseguire le varie esperienze successive in condizioni identiche, specialmente rispetto alla distanza degli elettrodi.

Quanto alla polarità degli elettrodi, parecchie esperienze riuscirono favorevoli alla supposizione che per ottenere l'effetto con maggiore intensità dovesse essere negativo l'elettrodo, su cui l'azione della luce è maggiore, cioè la lamina, ma altre esperienze mi diedero l'effetto opposto in modo chiarissimo. Nell'insieme si può dire che la polarità degli elettrodi non ha influenza decisiva e prevalente sull'intensità dell'effetto.

6. **Casi in cui il fenomeno ha segno opposto.** — Osservai in più casi, specialmente quando usavo la lampada Nernst, che nei primi due o tre minuti le radiazioni producevano una diminuzione della corrente anzichè un aumento. Il fenomeno si ripetè regolarmente per molte esperienze successive. I numeri che seguono, indicano l'andamento di una di tali esperienze fatta con la luce diffusa del cielo semisereno, con lamina negativa di zinco e rete di ottone.

$14^h\ 59^m$	529,2
15 1	529,2 *
2	524
3	520
4	528,5
5	538
6	551 **
7	549,8
8	545,2
9	541,2
10	540

Il fatto si presenta così raramente che lo si può considerare come un'anomalia.

7. Come risulta da quanto precede, il fenomeno descritto ha somiglianza con quello del Becquerel e con quello dell'Hallwachs: potrebbe anche spiegarsi con una semplice ionizzazione del liquido. Il fatto costante che il fenomeno non si manifesta se una corrente non attraversa il dielettrico, lo distingue dal fenomeno Becquerel. La poca influenza del senso della corrente e

altre particolarità del fenomeno ne mostrano la differenza dal fenomeno Hallwachs.

Quanto ad una semplice ionizzazione del liquido, l'esperienze che ho fatto per rintracciarla illuminando soltanto il liquido, non me ne diedero il più piccolo indizio, ma siccome in queste esperienze l'intensità del campo elettrico era necessariamente molto minore di quello che fosse nelle esperienze, in cui anche gli elettrodi erano illuminati, può darsi che tale condizione mi abbia impedito di osservare il fenomeno.

Relazione sulla Memoria: *Ricerche sui giacimenti di Brosso e di Traversella*. Parte I: *Osservazioni petrografiche sul massiccio dioritico di Valchiusella*, del prof. Luigi Colomba.

La presente memoria costituisce la prima parte di una serie di studi sui giacimenti di Brosso e di Traversella, e in essa sono riportati i risultati delle osservazioni litologiche riguardanti le roccie del massiccio di Valchiusella, lungo il cui margine appunto sono disposti i giacimenti in questione.

A premettere questa parte l'A. fu indotto sopratutto dal fatto che fra le ipotesi emesse per spiegare l'origine dei giacimenti di Brosso e di Traversella, una delle più attendibili è quella del Novarese il quale li considerò come dovuti ad una serie di fenomeni di contatto avvenuti fra le roccie del massiccio e le formazioni scistose circostanti, attraverso le quali le roccie stesse, sotto forma di masse intrusive, si sarebbero fatta strada.

Premessa una opportuna e breve introduzione bibliografica l'A. passa ad esporre i risultati delle sue osservazioni.

In un primo capitolo sono descritti i caratteri generali di posizione, di sviluppo e di struttura delle roccie del massiccio, ed è dimostrata con molti argomenti la loro vera natura intrusiva.

Il secondo capitolo, che è il più importante ed il più sviluppato, tratta delle roccie granulari che costituiscono quasi completamente il massiccio.

Data la relativa uniformità presentata dalle varie forme litologiche del massiccio, le quali si possono tutte considerare come varietà riferentisi ad un solo tipo fondamentale, l'autore

ha descritto in questo capitolo i minerali delle roccie stesse considerandoli complessivamente, ed in seguito ha indicato le differenze che essi presentano tanto nei loro caratteri quanto nella loro maggiore o minore frequenza nelle singole varietà, classificando poscia queste in un certo numero di gruppi ben caratterizzati.

Nella descrizione dei minerali sono specialmente importanti, per i risultati ottenuti, le osservazioni compiute sull'ortosio e sui feldispati plagioclasici. Riguardo al primo di questi minerali è da ricordare il fatto che, oltre a presentarsi diffuso nella massa fondamentale delle roccie come vero minerale di ultima formazione, esso apparisce pure in grandi plaghe allotriomorfe, molto irregolarmente distribuite e che mostrano notevoli fenomeni di riassorbimento e di corrosione a spese dei feldispati plagioclasici e di altri minerali.

Per i feldispati plagioclasici poi sono specialmente degne di nota le osservazioni riguardanti la struttura zonale che essi frequentemente presentano in modo molto evidente, essendo la variazione di accrescimento in diretta relazione con differenze progressive ed alternanti nella composizione chimica.

Riguardo poi alla classificazione delle roccie del massiccio, l'autore, dopo avere in modo esplicito concluso che esse debbono tutte riferirsi a dioriti e non a sieniti, come era stato ammesso da S. Traverso, stabilisce una serie di varietà rappresentate da *dioriti anfiboliche*, *dioriti quarzifere*, *dioriti pirosseniche*, *dioriti micaceo-pirosseniche* e da *dioriti bronzitiche*.

Fra queste varietà le più importanti sono quelle anfiboliche le quali, per quanto dotate di grana più o meno fina a seconda che appartengano alle zone periferiche oppure a quelle più profonde, costituiscono la massima parte del massiccio. Quelle quarzifere invece costituiscono semplicemente delle modificazioni locali nelle anfiboliche e rappresentano generalmente termini profondi.

Parimenti a forme localizzate e quindi poco estese appartengono le dioriti pirosseniche, nelle quali il pirosseno monoclino, rappresentato da diopside, è generalmente associato a quantità rilevanti di anfibolo, dando luogo a fenomeni molto evidenti di accrescimento parallelo.

Nelle varietà che si possono considerare come più tipiche per il massiccio si nota che esse presentano sensibili modificazioni

coll'aumentare della profondità. Oltre al fatto già accennato dell'aumento della loro grana, si nota pure che esse vanno arricchendosi in ortosio e quarzo tanto più quanto più sono profonde, per cui dai termini piuttosto basici che si hanno nelle zone periferiche del massiccio si giunge gradatamente a termini anche assai acidi. Ciò porterebbe ad ammettere, secondo l'autore, che le dioriti del massiccio di Valchiusella rappresentano semplicemente o l'involucro esterno, od una grande apofisi di masse molto più estese, e che per la loro maggiore acidità giungerebbero non solamente a termini sienitici, ma pur anche a termini granitici del tipo di quelli che formano la grande massa che affiora assai potente lungo il bordo occidentale del Lago Maggiore, nell'Ossola, nella Valsesia e nel Biellese, riapparendo anche nelle regioni dell'alto Canavese.

Nel terzo capitolo l'autore si occupa dei caratteri presentati dalle roccie del massiccio nelle zone di immediato contatto con le formazioni scistose avvolgenti.

Si hanno in queste zone delle modificazioni molto importanti, le quali assumono per le roccie del massiccio caratteri endomorfi od esomorfi. Però l' esame di queste numerose forme di contatto ha portato l'autore a concludere come lo studio di molte di esse trovi più logicamente il suo posto nelle altre parti di queste ricerche, cioè in quelle in cui l'autore si occuperà dei fenomeni metalliferi avvenuti nei giacimenti di Brosso e di Traversella; per il che egli ha creduto bene di limitarsi per ora alla descrizione di alcune forme di contatto nelle quali è assolutamente prevalente il carattere petrografico.

Sono esse rappresentate essenzialmente da alcuni interessanti casi di intercalazioni reciproche di lembi di roccie appartenenti tanto al massiccio quanto alle formazioni scistose e che hanno, sia in un caso che nell'altro, subito modificazioni molto grandi.

Inoltre l'autore si occupa pure in questo capitolo dei numerosi noduli che si hanno specialmente nelle roccie periferiche del massiccio e che danno talvolta, in causa della loro frequenza, un carattere nettamente brecciforme alle roccie stesse; egli conclude, a proposito di questi noduli, che se per alcuni è da accogliere l'ipotesi di Traverso, che si tratti cioè di secrezioni delle roccie lungo le zone di contatto, per altri invece deve indub-

biamente trattarsi di veri inclusi provenienti da frammenti o da spuntoni delle roccie scistose oppure da frammenti di forme di contatto, che vennero inglobati nel magma ascendente non ancora consolidato.

Nell'ultimo capitolo l'autore si occupa di alcuni dicchi di roccie porfiriche collegati col massiccio cristallino. Egli premette che queste roccie porfiriche non sono localizzate alle regioni occupate dal massiccio, poichè se ne osservano anche in altre località della valle e con caratteri che sembrano analoghi a quelli delle consimili roccie affioranti in vari punti del Biellese e della Valle di Aosta, e dimostra come esse debbano dividersi in due gruppi ben distinti: al primo appartengono roccie porfiroidi che si presentano in apofisi diramanti dal massiccio, essendo semplicemente da considerarsi come microdioriti porfiroidi, mentre all'altro appartengono roccie le quali debbono considerarsi come vere porfiriti, che presentano però tutte il carattere di essere ricche di ortosio come componente della massa fondamentale.

Alla memoria sono annesse tre tavole, nelle quali sono riprodotte sezioni microscopiche e particolarità strutturali delle roccie, e uno schizzo topografico, intercalato nel testo, del massiccio dioritico.

Da questo riassunto appare manifesta l'importanza dei risultati consegnati alla memoria, sia nel riguardo mineralogico come in quello geologico: e, siccome il lavoro risulta anche condotto con rigoroso metodo scientifico, siamo indotti a proporne l'accoglimento per la stampa nei volumi accademici, come pregievole saggio di nuove ricerche sopra i giacimenti di Brosso e Traversella, dei quali esso rende sempre più evidente il grande interesse scientifico.

C. Somigliana
C. F. Parona, *relatore.*

L'Accademico Segretario
Corrado Segre.

CLASSI UNITE

Adunanza del 23 Giugno 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. BARONE ANTONIO MANNO
DIRETTORE DELLA CLASSE
DI SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Sono presenti i Soci:

della Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali: D'Ovidio, Segre, Jadanza, Guareschi, Guidi, Parona, Mattirolo. — È scusata l' assenza del Vice Presidente Camerano e del Socio Foà;

della Classe di Scienze morali, storiche e filologiche: Renier, Ruffini, Stampini, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza del Presidente Boselli e dei Soci Carle, Pizzi, Chironi e Sforza.

È letto ed approvato l'atto verbale dell'adunanza antecedente a Classi Unite, 4 febbraio 1912.

Invitato dal Presidente, il Socio Tesoriere dà lettura del conto consuntivo dell'esercizio 1911 e del bilancio preventivo per l'esercizio 1912. Dà pure il rendiconto dei fondi particolari per i premi Bressa, Gautieri, Pollini e Vallauri. Consuntivi e preventivo sono approvati con voto unanime.

Il Tesoriere fa poi a nome del Comitato per le onoranze ad Amedeo Avogadro questa comunicazione:

Il Comitato per le onoranze ad Amedeo Avogadro, nella sua ultima adunanza (2 febbraio 1912) deliberò la pubblicazione

negli *Atti* accademici del seguente riassunto della gestione del fondo, raccolto per sottoscrizione internazionale:

Entrata.

Sottoscrizioni	L.	20515,80	
Interessi delle medesime	„	794,57	
Incasso totale	L.	21310,37	21310,37

Uscita.

Ai tipografi per circolari ed altri stampati . . .	L.	1073 —	
Spese per la funzione presso l'Accademia . . .	„	265 —	
All'*Unione tipografico-editrice* per il volume delle Opere dell'Avogadro e per quello delle "Onoranze"	„	4000 —	
Allo scultore autore del busto	„	10000 —	
Medaglia commemorativa	„	1915 —	
Spese postali, cancelleria, gratificazioni e minute	„	2485,04	
Totale	L.	19738,04	19738,04
Rimanenza attiva	L.		1572,33

Il Comitato deliberò inoltre di destinare il residuo ad un premio per concorso, delegandone l'istituzione alla Classe di scienze fisiche e naturali. La Classe stessa nell'adunanza del 26 maggio u. s. accettava il mandato, deliberando che il premio sia internazionale e consista in una medaglia d'oro del valore di 1500 lire. Per studiare le modalità del concorso fu nominata una Commissione apposita.

Il Presidente dà atto al Tesoriere di questa comunicazione e ne prende occasione per ringraziare nuovamente tutti quelli che collaborarono al felice successo delle onoranze ad Amedeo Avogadro e in particolare il Socio Guareschi.

Gli Accademici Segretari
Corrado Segre.
Gaetano De Sanctis.

CLASSE
DI
SCIENZE MORALI, STORICHE E FILOLOGICHE

Adunanza del 23 Giugno 1912.

PRESIDENZA DEL SOCIO COMM. BARONE ANTONIO MANNO
DIRETTORE DELLA CLASSE

Sono presenti i Soci: Renier, Ruffini, Stampini, Einaudi, Baudi di Vesme, Schiaparelli e De Sanctis Segretario. — È scusata l'assenza del Presidente Boselli e dei Soci Carle, Pizzi, Chironi e Sforza.

Si legge e si approva l'atto verbale dell'adunanza precedente, 9 giugno 1912.

Invitato dal Presidente il Socio Stampini legge, anche a nome del Socio De Sanctis, la relazione intorno alla memoria del Dr. M. Lenchantin de Gubernatis, *Appunti sull'ellenismo nella poesia arcaica latina*, e il Socio De Sanctis, anche a nome del Socio Stampini, quella intorno alla memoria del Dr. E. Pozzi, intitolata: *Le battaglie di Cos e di Andro e la politica marittima di Antigono Gonata*.

La Classe approva le relazioni e poi, presa conoscenza delle due monografie, delibera per l'una e per l'altra, con pienezza di voti segreti, la inserzione nelle *Memorie* accademiche.

Il Socio Renier presenta per gli *Atti* una nota della Dottoressa Emilia Regis, intitolata: *Una legge fiorentina inedita contro Rinier dei Pazzi. Saggio Dantesco*.

Il Socio Einaudi offre per le *Memorie* un suo studio *Intorno al concetto di reddito imponibile e di un sistema d'imposte sul reddito consumato*, dando intorno ad esso ampio ragguaglio.

La Classe con voto unanime, astenendosi l'autore, ne delibera a scrutinio segreto la inserzione nei volumi delle *Memorie*.

LETTURE

Una legge fiorentina inedita contro Rinier de' Pazzi.

Saggio dantesco della Dott.ª EMILIA REGIS.

Nel primo girone del settimo cerchio, ove nella riviera di sangue bollente sono puniti i violenti contro il prossimo, Dante pone Rinier da Corneto e Rinier Pazzo e fa che di essi, ultimi nella rapida rassegna del gran Centauro, questi, pur nella classica brevità, scolpisca la patria e il casato, gridi la pena eterna, ricordi le colpe spietate:

" La divina giustizia . . . . .
in eterno munge
le lagrime, che col bollor disserra,
a Rinier da Corneto, a Rinier Pazzo,
che fecero alle strade tanta guerra „ (1).

A chiusa del canto, Dante aggiunge:

" Poi si rivolse, e ripassossi il guazzo „.

E noi possiamo notare che simile verso si addice pure ai commentatori antichi e moderni, i quali, quasi paghi della rappresentazione viva della fida scorta, non fecero altro, in generale, che ripetere le sue parole e passar oltre.

" Grandi robbatori di strada „ dissero di Rinier da Corneto e di Rinier Pazzo e Jacopo della Lana e l'Anonimo fiorentino e Pietro di Dante e il Boccaccio e Francesco da Buti, il quale aggiunge di suo, a proposito di Rinier Pazzo, " questo fu fiorentino e per le pazzie che faceva fu chiamato pazzo, che era temerario „! Solo l'Ottimo Commento ci dà più ampie notizie di Rinier Pazzo, ricordando i particolari di uno di quei suoi delitti, forse il maggiore e il più famoso, per cui Dante lo immerse nel fiume di sangue. " Rinieri Pazzo — commenta egli — fu uno

(1) *Inferno,* XII, vv. 136 e sgg.

cavaliere de' Pazzi di Valdarno, del contado tra Firenze ed Arezzo, antichi uomini; questi fu a rubare li prelati della Chiesa di Roma per comandamento di Federigo II imperatore delli Romani, circa li anni del Signore milledugento ventotto, per la qual cosa elli e li suoi discendenti furon sottoposti a perpetua scomunicazione e contro a loro furon fatte leggi municipali in Firenze, le quali li privarono in perpetuo d'ogni beneficio „.

Abbiamo dunque dall' " Ottimo „ la notizia di una scomunica papale e di leggi fatte contro di lui in Firenze. Questa notizia, quantunque sommaria e parzialmente inesatta, è vera.

Per quanto riguarda la scomunica, Fr. Cristofori pubblicò fin dal 1889, senza trarne per altro alcun profitto, tre documenti Vaticani, a dir vero finora poco noti e rimasti pressochè inutilizzati, che rappresentano i tre atti successivi di un processo di scomunica intentato dalla Corte romana contro Riniero ed i suoi complici (1). Prendiamo subito in attento esame questi documenti, senza i quali difficilmente si potrebbe intender bene la legge fiorentina che noi pubblichiamo.

Il primo atto del processo canonico è una sentenza emanata nel giovedì santo del 1268, nel quarto anno del pontificato di Clemente IV. Sarà utile anzitutto riferire il fatto, quale è narrato in questo documento. Mentre, adunque, il vescovo Silvense, il decano ed arcidiacono Salamantino ed il milite Arnaldo con numerosa comitiva di famigli e di servi, chierici e laici, transitavano per le terre della Toscana diretti alla Sede apostolica per certi loro affari, Rinier dei Pazzi e Scartalupo di Safena con molti altri satelliti e complici, cavalieri e pedoni, avuto sentore del loro passaggio, postisi in agguato lungo la via, assalirono improvvisamente il vescovo ed i suoi compagni, e li depredarono trucidandoli, fatta eccezione di pochi che o scamparono con la fuga, o feriti gravemente furono lasciati per morti, oppure vennero fatti prigionieri (2).

(1) Fr. Cristofori, *Di Raniero da Corneto e di Rinier Pazzo ricordati da Dante nel canto XII dell'Inferno,* in " L'Arcadia „, 1889, an. I, pp. 77-84.

(2) " Nefandum et horribile facinus preteritis diebus in Tuscie partibus a viris sanguinum perpetratum voce publica .....recensentes, ad illud " puniendum eo ferventiori attentione procedimus, quo tanti patratio sceleris " in Dei maiorem contumeliam et offensam, Apostolice sedis iniuriam, et " plurimorum scandalum redundavit. Cum enim bone memorie Silvensis

Per tale misfatto la sentenza fulmina di scomunica e di anatema Riniero, Scartalupo ed i suoi complici, li priva, essi ed i loro successori, di ogni diritto, sia di avvocatura che di patronato, sulle chiese delle loro terre; pronuncia la perdita e la confisca dei beni immobili da essi tenuti eventualmente a titolo di feudo sia dall'Impero che da altre potestà, commina il bando per le lor persone e per i loro beni mobili, in modo che ciascuno potrà impossessarsene impunemente, esclusa soltanto la facoltà di uccidere i condannati o di mutilarli. Inoltre i loro fratelli, figli, nipoti e discendenti sino alla quarta generazione vengono privati della capacità di avere uffici e benefizi ecclesiastici.

In tutte queste pene noi possiamo vedere l'applicazione esatta e fedele delle disposizioni generali stabilite dal diritto penale canonico allor vigente contro simili delitti. E invero, poichè si tratta di un reato di grassazione compiuto su persone, di cui alcune rivestivano la dignità ecclesiastica, noi riscontriamo per la scomunica e per il bando, l'applicazione delle pene stabilite in generale pei delitti di latrocinio (1) e di assassinio (2), e per le altre pene, l'applicazione delle sanzioni stabilite dal concilio Lateranense IV (an. 1215) contro i patroni, gli " advocati ", i " vicedomini ", i feudatarî e i beneficiarî che commettessero omicidio sacrilego contro le persone degli ecclesiastici (3).

" episcopus et dilecti filii..... Decanus et..... archidiaconus Salamantius (nel " 3° documento è detto Salmantinus), quondam Arnaldus miles, et nonnulli " alii de comitiva, et famuli eorundem clerici et laici per Tusciam tran- " situm facerent ad apostolicam sedem pro certis negotiis accessuri, dam- " pnationis filii Raynerius de Pazzis, et Scartalupus de Safena, et multi " satellites et complices eorundem equites et pedites, eorum presentientes " adventum, positis secus iter insidiis, Dei timore postposito, et debito " prorsus humanitatis excluso, in episcopum et alios predictos immaniter " irruerunt, et eos, paucis exceptis, quorum aliqui evaserunt fuge presidio, " quidam vero affecti vulneribus fuerunt quasi mortui derelicti, et alii " captivati, trucidarunt ". La ruberia risulta dalle seguenti parole del 2° documento: " spoliis eorum depredationi miserabiliter deditis ".

(1) C. 1, X, *de rapt.*, V, 17; c. 5, C. VI, qu. 3.

(2) C. 1 (Innocenzo IV, an. 1245), in VI, *de homic.*, V, 4.

(3) C. 2, X. *de poenis*, V, 37.

La sentenza poi colpisce con interdetto perpetuo i castelli, le ville e i possessi dei detti malfattori, e quelle altre terre ov'essi avevano dimorato al tempo del commesso maleficio, togliendo loro perpetuamente i diritti proprî dei municipî e delle università, privandole degli uffizi ecclesiastici, dei sacramenti e delle funzioni religiose, e vietando per sempre a chiunque di abitarvi o di ritornarvi " ita quod deserta iaceant, hominum habitationem nullis unquam temporibus habitura „, pena la scomunica minore ai contravventori, sino a che non avessero abiurato quelle dimore proibite.

Così, mentre con la scomunica si escludeva Riniero e i suoi complici dalla comunità religiosa, sciogliendo i loro sudditi da ogni vincolo di fedeltà e di obbedienza, mentre col bando si mettevano le loro persone indifese e i loro beni alla mercè di chiunque (non si contrastava ancora in quei tempi alla Chiesa la potestà di applicare pene temporali), coll'interdetto invece, che estendeva gli effetti della condanna agli abitanti delle terre e delle castella dei condannati, ai sudditi e ai coloni dei loro feudi, si cercava di scatenare contro i colpevoli, che la Chiesa non poteva raggiungere e punir direttamente coi mezzi secolari, la indignazione, la rivolta, gli appetiti, le vendette degli uomini che per colpa loro si vedevano esposti a tanto danno spirituale.

Dopo di aver minacciato infine la scomunica minore a tutti coloro che avessero prestato ai condannati consiglio, aiuto o favore, la sentenza ordina la pubblicazione dei suoi dispositivi alle porte esterne della chiesa maggiore di Viterbo.

Il secondo atto del processo, che reca la data del giovedì santo del 1271, primo anno del pontificato di Gregorio X, e che venne pubblicato a voce e per iscritto nella Basilica Lateranense, dopo d'aver approvato in tutto la condanna di Clemente, intima a Riniero, a Scartalupo e ai loro complici di venire all'obbedienza della Chiesa entro il dì della prossima festa dell'Ascensione, per fare atto di sottomissione completa ai suoi precetti e per dar plenaria riparazione (" satisfactio „) dei loro delitti; in difetto si procederà contro di essi con più gravi pene spirituali e temporali.

Infine la terza sentenza, dopo di aver ricordato che, vista la sprezzante contumacia dei delinquenti, si era in quel dì reiterato la scomunica e l'interdetto, e si era ripetuta l'intimazione a com-

parire entro il primo del prossimo settembre, dopo d'aver osservato che anche questa volta i condannati si eran dimostrati contumaci, rinnova pubblicamente e solennemente le condanne precedenti, fissa un nuovo termine perentorio per la prossima festa della Purificazione, ripetendo la solita intimazione (" monitio ") e le solite minaccie.

In questi atti insomma noi vediamo svilupparsi la procedura normale della scomunica che, quale mezzo di censura rivolta ad ottenere per forza la penitenza, la sottomissione e la riparazione da parte del reo, richiedeva, perchè il provvedimento potesse diventar definitivo, una triplice ammonizione (1). Incorsa la scomunica, il condannato non poteva più uscirne se non a patto di invocarne l'assoluzione, rendendo soddisfazione completa alla Chiesa con l'emenda, la penitenza e la riparazione del danno (2).

Intanto da questa sentenza risulta chiaramente che il delitto di Rinier dei Pazzi fu commesso verso la fine del 1267 o nei primi tempi del 1268, in quel periodo fortunoso e rabbioso pei ghibellini, che corre dalla loro uscita definitiva da Firenze, seguìta dal dominio papale di Carlo d'Angiò e dalla brutale lor persecuzione da parte delle soldatesche di Guido di Monforte, alla distruzione finale delle loro speranze sui campi di Tagliacozzo; e che sino alla fine del 1271 nè Riniero nè i suoi complici si erano gran che preoccupati della censura ecclesiastica che li aveva colpiti.

***

Noi siamo ora in grado di confermare e di completare la seconda parte della notizia riferita dall'Ottimo Commento. Abbiamo infatti rintracciato negli Statuti tuttora inediti del Podestà di Firenze degli anni 1322-1325 la legge a cui l'antico commentatore accenna. È la rubrica 113 del libro III degli Sta-

(1) C. 21, C. XII, qu. 2: " nemo excomunicandus est, nisi praecedat admonitio trina ".

(2) Cfr. Hollweck, *Die kirchlichen Strafgesetze*. Mainz, 1899, § 45 sgg., pag. 114 sgg.

tuti, il quale tratta dei malefizi e delle pene (1). Ne trascriviamo qui il testo esatto:

Contra occisores et derobatores prelatorum.

Statutum et ordinatum est, ad honorem et reverentiam sacrosancte Romane Ecclesie et summi pontificis, et ne orribile et detestabile facinus commissum per Ranerium Paczum et alios adiutores et fautores satellites et complices eius et alios qui in hiis prestiterunt consilium auxilium et favorem in personis venerabilis patris Salvani (*sic*) episcopi et dyaconi et archidiaconi Salamanni (*sic*) et Arcialdi (*sic*) militis et nonnullorum aliorum prelatorum de comitatu et familia eiusdem clericorum et laycorum occisorum et mortuorum et derobatorum in partibus Valli Arni, remaneat impunitum, quod potestas et capitaneus Florentie et omnes officiales Comunis Florentie teneantur et debeant eos et quemlibet eorum habere pro rebellibus et exbannitis perpetuo Comunis Florentie pro maleficio et exbanniti et rebelles sint et esse intelligantur et debeant, nec aliquod beneficium vel privilegium possint habere vel consequi a Comuni vel pro Comuni Florentie, nec prosit eis aliqua pax specialis vel generalis vel aliquod capitulum constituti editum vel edendum, et quod prefatum statutum semper de constituto ponatur per arbitros et semper esse intelligatur et sit posterius et derogatorium ceteris capitulis constituti. Et predicta intelligantur et locum habeant nisi predicti de predictis maleficiis et excessibus per Romanam Ecclesiam absolutionis sententiam consequerentur.

Non è chi non veda come questa legge contro Riniero ed i suoi complici sia strettamente connessa col processo di scomunica che li aveva colpiti. Essa non è una vera e propria sentenza penale di condanna, emessa dal Comune di Firenze di propria iniziativa, in seguito ad un giudizio intentato dal giudice del Comune contro i colpevoli per un delitto ordinario di grassazione. Firenze non avrebbe forse mai intentato d'ufficio un procedimento penale contro Rinier Pazzo, per la semplice ragione che, per quanto fosse costui, almeno teoricamente, soggetto alla sua giurisdizione, tuttavia il delitto era stato com-

(1) Il testo fu trascritto dal Codice membranaceo in asse, esistente nel R. Archivio di Stato di Firenze, contraddistinto nell'inventario dell'Archivio (Statuti) col N. 7, e recante il titolo: " Codex membranaceus archetypus " Statutorum Populi Florentini, nomine Potestatis, ex publica recensione " anni MCCCXXIV „ (stile comune 1325).

messo contro persone che non erano suddite nè della città nè del suo contado. Inoltre Riniero non era un volgare malfattore, che potesse trattarsi alla stregua del diritto comune. Al contrario, era egli, come si vedrà, un potentissimo signore del contado, membro di una consorteria ghibellina numerosa, turbolenta e guerriera, era insomma un capo-partito, rivestito di sovranità e di privilegi politici, che con la sua fiera schiatta rivendicava la propria autonomia di fronte al Comune; era un personaggio importante, da cui Firenze aveva molto a temere, e che perciò, per ragioni di prudenza e di politica, non era nè possibile nè opportuno trattare come un delinquente comune. Noi pensiamo dunque che questa legge, proposta ed approvata nel pubblico parlamento, debba la sua origine unicamente ad un'istanza della Corte di Roma, direttamente offesa in questa faccenda. Lo dimostra lo stesso esordio della legge, in cui si afferma ch'essa fu approvata " ad onore e riverenza della sacrosanta chiesa romana e del sommo pontefice ". Anche il suo titolo dimostra come la condanna sia stata emanata non tanto per colpire un reato comune di grassazione, quanto per punire l'uccisione e la rapina commessa in persona di *ecclesiastici*. La legge fu compilata evidentemente sulla falsariga dell'atto di scomunica, il quale fu per certo notificato a Firenze, insieme con la richiesta della Corte papale. Le parole che qualificano il delitto " orribile et detestabile facinus " sono le parole stesse della sentenza papale; la descrizione del fatto, il modo e l'ordine con cui ne son designati gli autori e le vittime ricordano in modo evidente il testo degli atti pontifici. La condanna inoltre non è pura e semplice, come avrebbe dovuto essere una condanna comunale; essa ha invece un carattere condizionale, di modo che la sua efficacia ed i suoi effetti dovranno venir meno se Riniero e i suoi complici otterranno una sentenza d'assoluzione dalla Chiesa romana: il che dimostra precisamente ch'essa doveva servire soltanto ai fini del processo papale, e che fu sollecitata da Roma appunto quando la persistente contumacia dei colpevoli dimostrò che le semplici armi spirituali erano per essi inefficaci, per avere aiuto dal braccio secolare del Comune e per costringere i colpevoli col maggior danno delle pene temporali a prestar la giusta riparazione.

Guardiamo infine alla pena. Essa non è la pena comune, con la quale gli Statuti punivano generalmente tale specie di

delitti, cioè la pena della forca (1). Ma non è che l'equivalente secolare della pena canonica, vale a dire il bando. Era questa la ordinaria sanzione della scomunica, comminata dalla legislazione medioevale in ossequenza all'autorità della Chiesa, ma, nel caso particolare, tale pena è ancora l'applicazione fedele dei precetti ecclesiastici stabiliti dal Concilio di Lione (an. 1245), i quali dichiaravano che gli assassini, oltre alla scomunica, dovessero aversi come posti fuor della legge presso a tutti i popoli cristiani, onde avrebbero potuto essere impunemente uccisi (2). Il Comune, al tempo della condanna, era ormai decisamente guelfo, e quindi poteva far sua l'offesa fatta alla Chiesa, dichiarando ribelli i delinquenti, con tutte le conseguenze gravissime derivanti, col bando, da questa qualità: la confisca, la pena implicita di morte, la perdita di ogni diritto, di ogni benefizio, di ogni giurisdizione tenuta dal Comune, la facoltà in ciascuno di catturare e di uccidere i ribelli; tanto più che costoro erano, come si è detto, ghibellini attivi e turbolenti, e quindi nemici effettivi del nuovo Comune.

Si affaccia ora a noi una domanda: qual' è la data della legge? Essa deve comprendersi nel periodo massimo che corre dal 1268, epoca del delitto, al 1280, anno in cui Riniero risulta già defunto negli atti della pace del Cardinal Latino (3). Saremmo tentati a credere a tutta prima che questa legge sia stata approvata nello stesso anno 1268, tanto più che il nome di Riniero non compare, strano a dirsi, nella lista di proscrizione compilata nel dicembre dello stesso anno dal Comune guelfo contro i ghibellini ribelli, fra cui pure sono compresi tre figli di Riniero coi loro discendenti (4). Ma il provvedimento presuppone una sentenza di scomunica definitiva, e quindi non potè essere emanato prima della fine del 1271; anzi, noi crediamo che la sua data non possa essere anteriore al 1273, perchè risulta che in quell'anno appunto alcuni complici di Riniero, ancora vivente, avevano potuto venir liberamente a Firenze come

(1) Cfr. Kohler, *Das Strafrecht der Italienischen Statuten vom 12-16. Jahr.* Mannheim, 1897, pag. 455 e sgg.

(2) C. 1 cit. in VI, *de homicid.*, V, 4.

(3) *Delizie degli Eruditi toscani,* IX, 93 e seg.

(4) *Delizie* cit., VIII, 277.

ambasciatori per le trattative di pace tentate da Gregorio X fra guelfi e ghibellini. Il papa se ne lagna con Aldobrandino Cavalcanti, vescovo d'Orvieto (1), in una lettera donde appare che Riniero e i suoi complici in quell'epoca erano scomunicati, ma non sbanditi. Il Pontefice ordina in questa sua lettera che Riniero e i suoi complici siano, pel loro delitto, esclusi dalla pace. Quindi noi crediamo di non andare errati, tanto più se ricordiamo che la legge nostra stabilisce, fra le sue pene, anche l'esclusione dei condannati da ogni pace, generale o speciale, affermando ch'essa fu approvata subito dopo tale fatto, o forse anche in occasione di esso, in seguito ad istanza fatta dallo stesso papa Gregorio X, quel papa che aveva sì alacremente proseguito il processo di scomunica, e cioè fra gli anni 1273 e 1276, data della sua morte.

La legge compare ancora negli Statuti del 1325, sia per l'obbligo fatto agli statutarî d'inserirla perpetuamente negli Statuti di Firenze a titolo di esempio, sia perchè, sebbene la sentenza fosse personale e non riguardasse espressamente gli eredi dei delinquenti (alcuni dei quali anzi, figli e nipoti dello stesso Riniero, furono compresi nella pace del Cardinal Latino) (2), qualcuno fra i complici di Riniero poteva essere ancor vivo in quell'età. Ad ogni modo è certo che Dante potè, anzi dovette, o direttamente o per pubblica fama, conoscere questa sentenza, la quale fu sempre negli Statuti di Firenze per tutto il tempo della sua vita, e andò soggetta alla grande pubblicità che si dava allora al corpo delle leggi comunali.

È questo uno dei rarissimi casi, forse l'unico, in cui il giudizio di Dante appare fondato su una condanna penale da noi conosciuta nella sua primitiva integrità. Molti fra i giudizi danteschi sono confermati, è vero, da notizie di condanne penali tramandateci da commentatori e da cronisti: basta ricordare gli esempî di Fra Dolcino, di Capocchio da Siena, di Maestro Adamo, di Sassol Mascheroni, di Tesauro dei Beccheria, del Conte Ugolino. Ma di tali condanne nessuna, tranne forse

(1) Robert Davidsohn, *Forschungen zur Geschichte von Florenz.* Vierter Teil. Berlin, 1902, pag. 213.

(2) *Delizie* cit., IX, 93.

quella di Vanni Fucci, " ladro alla sacrestia de' belli arredi " (1), ci è pervenuta, come pur dovremmo desiderare per il buon commento del poema, nel suo testo originale.

* * *

A tal punto vien fatto di domandarci: Chi è mai questo Rinier Pazzo contro cui si accaniscono le leggi civili e le ecclesiastiche e che ci passa dinanzi flagellato da condanne?.

Una ricerca diligente sulla stirpe di costui e sulla sua storia, varrà a lumeggiarne meglio la fosca figura ed a chiarire la nostra sentenza.

Discendeva egli dalla famiglia de' Pazzi di Valdarno superiore.

" E' Pazzi di Valdarno furono antichissimi gentili uomini, signori di castella e di ville assai per antico nel Valdarno di sopra " — c'informa il Malespini (2). Appartenevano per certo a quella classe di nobili o cattani del contado le cui origini si riallacciano alla feudalità e che di queste origini conservano l'impronta viva nel periodo comunale. Fieri della loro indipendenza, gelosi dei loro privilegi feudali, questi signori, come ognuno sa, sono il nemico naturale e perpetuo del sorgente Comune. Anche Firenze per estendere la sua signoria sul contado, è costretta a far guerra ai signori che vi spadroneggiano e che a nessun costo vogliono piegare il capo nè rinunziare alla giurisdizione sui loro uomini e sulle loro castella. Nè vale talvolta che le milizie del Comune disfacciano le loro fortezze ed i loro beni. Essi giureranno, ricalcitrando, fedeltà ed obbedienza al loro nemico, accetteranno a forza la cittadinanza del Comune, pronti però alla prima occasione a risollevare la fronte per poco umiliata.

Vivi campioni di questi nemici irreducibili del Comune e sempre in lotta con esso, sono appunto i Pazzi di Valdarno. Più volte ebbero distrutti col ferro e col fuoco i loro castelli da Firenze (3): più volte, forse, furono obbligati a giurarle fedeltà: ma la loro soggezione, come non fu mai spontanea, così non fu

(1) Cfr. Ciampi, *Notizie inedite della sagrestia pistoiese de' belli arredi*. Firenze, 1810.

(2) Malespini, *Storia fiorentina*, c. 103.

(3) Id., c. 55.

mai duratura. Si aggiunga che questi Pazzi tennero sempre parte ghibellina (1) vuoi per odio verso il Comune guelfo, vuoi per il loro dovere di signori feudali verso l'imperatore. Dopo ciò nessuna meraviglia se i bandi, le confische, le condanne, le rappresaglie li accompagnano e li incalzano senza posa; anzi ben possiamo dire che solo coll'aiuto di essi ci fu possibile seguire il filo delle loro vicende particolari attraverso alle vicende generali della storia di Firenze.

Quando il vicario dell'imperatore Federico coi ghibellini guerreggia in Valdarno contro i guelfi, subito i Pazzi si schierano per lui (2). La vittoria ghibellina di Montaperti li rende arditi, ma trionfando i guelfi nel 1268 per l'appoggio dato loro da Carlo d'Angiò, son posti in bando dal comune di Firenze (3). Da allora noi li troviamo continuamente mescolati alle gesta dei fuorusciti e delle città nemiche di Firenze, specialmente d'Arezzo. Nel 1270 i Pazzi e gli usciti di Firenze ribellano i castelli di Piano di Mezzo e di Riscuccioli ed obbligano i Fiorentini all'assedio ed alla distruzione di essi (4).

Nel 1275 Guglielmo de' Pazzi di Valdarno, figlio del nostro Riniero, capo dei Ghibellini fuorusciti di Firenze, con Guido di Montefeltro, sconfigge i Bolognesi Guelfi (5). Nè importa che nel 1280 alcuni de' Pazzi siano inclusi nella così detta pace del Cardinal Latino (6). Vi fu escluso quel Guglielmo Pazzo — di cui abbiamo già fatto menzione — che, capitano di guerra in Arezzo ghibellina, nel 1288 sorprende in agguato i Senesi alleati dei Guelfi fiorentini alla Pieve al Toppo (7), e muore nella battaglia di Campaldino dopo avervi trascinato quasi a forza il vescovo d'Arezzo patteggiante con Firenze per sè, pei suoi consorti e per la stessa famiglia de' Pazzi (8). Infatti durante il gennaio ed il febbraio del 1289 sono attive le pratiche fra il

---

(1) Isidoro Del Lungo, *Dino Compagni e la sua Cronica*. Firenze, Succ. Le Monnier, 1879, vol. II, 29.

(2) Malespini, c. 136.

(3) *Delizie degli eruditi toscani*, vol. VIII, pag. 221-277.

(4) Malespini, c. 207.

(5) Id., c. 214. — Giov. Villani, *Istorie fiorentine*, VII, 48.

(6) *Delizie degli eruditi toscani*, vol. IX, pag. 93 e seg.

(7) Giovanni Villani, *Istorie fiorentine*, VII, 120.

(8) Id., VII, 131.

comune di Firenze ed i Pazzi di Valdarno, con la mediazione del Vescovo d'Arezzo, per piegare questi all'obbedienza e per indurre quello a cancellare ogni bando, ogni condanna (1). E il 13 febbraio nel Parlamento pubblico, nella Chiesa di Santa Reparata, dopo che i Pazzi, figli e nipoti tutti del nostro Riniero, e i loro fedeli avranno giurato di avere i nemici di Firenze per inimici, gli amici per amici e di essere della parte de' Guelfi, in presenza del Vescovo " son levati d'ogni bando, cancellati d'ogni condennagione, restituiti nei loro beni, ragioni e honori (2) „. Nuovamente vi è escluso Guglielmo, ma vi furono inclusi i suoi figli stessi Angelo, Janozzo, Geri e Betto, detto Ficazzaia; i fratelli suoi Uberto Spiovanato e Neri, i nipoti Cantino e Paffiera, figli di Uberto, Cione e Geri, Mino e Vieri figli di Neri; Guido e Simone, Bettino e Manfredi figli del fratello Ubertino (3), tutta insomma la gagliarda e violenta e rubesta schiera che ritroveremo ben presto in ben altri documenti, ora riuniti a gruppi più che pel vincolo del sangue per la sete delle sanguinose imprese, ora divisi solo per la diversità dei delitti.

Infatti nell'anno 1302, l'anno delle vendette de' Neri, nello stesso gruppo di sentenze politiche che colpiscono Dante, emanate o per *baratteria* o per *malefizi* dal potestà messer Cante de' Gabrielli e inserite nel famoso libro del Chiodo, ritornano i loro nomi con sinistra frequenza. Il 1° febbraio son condannati, per omicidio, ad aver mozzo il capo: Paffiera, Cione, Bernardino, Bettuccio, nipoti di Riniero (4); l'8 febbraio, Zono, Paffiera, Bettino e Cantino, nipoti di Riniero, per aver preso di notte, con altri Ghibellini Aretini, Castel Piano e per aver ferito e rubato; il 10 febbraio Uberto Spiovanato e i suoi figli Cantino e Dato, per baratteria, e poi Cione e Rapetra e Paffiera, nipoti di Riniero, per aver preso e saccheggiato il castello di Pofignano gridando: " Muoiano i guelfi! muoiano i guelfi! „; il 17 febbraio

(1) Alessandro Gherardi, *Le consulte della repubblica fiorentina.* Firenze, 1896, vol. I, pag. 347 e 417; vol. II, pag. 672.

(2) Id., Op. cit., pag. 672.

(3) Id., Op. cit., pag. 672.

(4) *Delizie degli eruditi toscani*, vol. X, pag. 93 e seg. e Isidoro del Lungo, *Dell'esilio di Dante,* Documenti, pag. 82 e seg.

Bettino, figlio di Ubertino, per la stessa cagione d'aver ferito gente di Castel Piano (1).

Uniti ai Bianchi ed ai Ghibellini fuorusciti, aiutati dagli Ubaldini e dai Pisani, prendono parte alle guerre mugellane; anzi uno di essi e più precisamente Bettino de' Pazzi, figlio di Ubertino e nipote — notisi bene — del nostro Riniero, si trovò con Dante nella solitaria chiesa di S. Godenzo, l'8 giugno 1302 (2), ed il suo nome ricorre con quello degli Uberti, dei Cerchi e di altri fuorusciti nell'atto famoso stipulato per acquistare, per mezzo di sicurtà, l'aiuto degli Ubaldini. Condannati ancora con sentenza del 2 giugno (3), non desistono dagli attacchi nè dalle violenze e quantunque vengano ora a mancarci i documenti attestanti con altre condanne l'opera loro di ribelli, non mancano gli accenni al loro perpetuo stato di guerra.

Nel 1303 Firenze è costretta a mandare un esercito " in partibus Valli Arni contra Paczos et Ubertinos (4) „; nel 1304 i Pazzi con gli Aretini e gli Ubertini tolgono a Firenze il castello di Laterino (5). Nè ci illuda il fatto di trovare un Agnolo, figlio di Guglielmo de' Pazzi, fra i rappresentanti dei fuorusciti Bianchi e Ghibellini venuti in Firenze a trattar pace coi Neri nella conciliazione vana tentata dal Cardinal da Prato (6).

Ancora nel 1323 i Pazzi con l'aiuto degli Ubertini riprendono il loro castello della Trappola che s'era dato ai Fiorentini, infliggendo a questi una sconfitta (7); ancora nel 1342, approfittando della guerra dei fiorentini contro i Pisani, ribellano i castelli di Castiglione, di Campogiallo e di Treggiaia (8). Insomma ben si può dire che mai non smentiscono ciò che di loro ebbe ad affermare un cronista d'Arezzo: " Pactii et Ubertini et huiusmodi homines quietis libertatisque hostes (9) „. Strano

---

(1) *Delizie degli eruditi toscani*, vol. X, pag. 99 e seg.

(2) Isidoro del Lungo, *Dino Compagni e la sua Cronica*, vol. II, pp. 569-570.

(3) *Delizie degli eruditi toscani*, vol. X, 99, e Isidoro del Lungo, *Dell'esilio di Dante.* Documenti, pag. 84.

(4) Robert Davidsohn, *Forschungen zur Geschichte von Florenz*, Zweiter Theil. Berlin, 1900, pag. 256.

(5) Giov. Villani, VIII, 73.

(6) Isidoro del Lungo, *Dino Compagni e la sua Cronica*, II, 283.

(7) Giov. Villani, IX, 225.

(8) Id., XI, 139.

(9) Isidoro del Lungo, *Dino Compagni, ecc.*, II, 29.

casato invero, che come ci fornisce il nome dei suoi membri dai bandi e dalle condanne, così ci dà il nome dei suoi castelli solo dalle rappresaglie contro di essi, o dalla loro ribellione e dalla loro distruzione. Luco e Castiglione, Ostina e Piano di Mezzo Riscuccioli e Laterino, Campogiallo e Treggiaia, sono altrettanti nidi di questi avoltoi.

Strano casato, ripetiamo, che ebbe i traditori e gli infami, come Uberto Spiovanato, figlio di Riniero, che nel 1265, tenendo pei Guelfi, libera il Castello Nuovo di Valdarno di cui egli era capitano, dai Ghibellini (1): come Carlin de' Pazzi, infamato da Dante (2), che nel 1302 dette ai Neri Fiorentini il castello di Piantavigne, rocca " de' migliori nuovi usciti Bianchi e Ghibellini (3) „ onde verrà poi cancellato dalla condanna del 2 giugno, per balìa data a' Priori (4); ma che ebbe pure il suo cavaliere in quel Guglielmo de' Pazzi già da noi ricordato, che muore a Campaldino combattendo fra le file dei Ghibellini e che fu, secondo il Villani (5), " il migliore e il più avvisato capitano di guerra che fosse in Italia al suo tempo „. " Maxime Ghibellinus (6) „ vien detto ancora parecchi anni dopo la sua morte da alcuni, vittima delle soperchierie de' Pazzi, in una lor querela a Firenze guelfa; e la sua figura di guerriero puro, giganteggia su tutte le figure de' suoi consanguinei ascendenti e discendenti che non si limitano solo a compiere atti giustificati dallo stato di guerra, ma che commettono continue vessazioni, aggressioni ed usurpazioni.

***

Nè di queste tacciono i documenti del tempo, ma dal 1206 al 1241 continui sono i ricorsi della Badia di S. Maria di Firenze contro i Pazzi di Valdarno, ascendenti del nostro Riniero, che ne ingiuriavano i possessi, ininterrotte le sentenze contro costoro

---

(1) Malespini, c. 189 e Giov. Villani, VII, 12.

(2) *Inferno*, XXXII, 69.

(3) Giov. Villani, VIII, 53, e Isidoro del Lungo, *Dino Compagni*, ecc. I, 520.

(4) *Delizie degli eruditi toscani*, X, 99.

(5) Giov. Villani, VII, 131.

(6) *Delizie degli eruditi toscani*, VIII, p. 282.

che citati a comparire, non compaiono, condannati a pagare, non pagano (1). E che oltre ad ingiuriare ed usurpare i possessi, usassero violenza alle persone fa fede una petizione o querela del 1294 di alcuni di Valdarno stati costretti per forza " et per metum et fraudolenter etiam propter captionem personarum „ dalla brigata de' Pazzi, i soliti famigerati figli e nipoti di Riniero, a confessare " se esse fideles et colonos ipsorum „, dei Pazzi, venuti per questo " armata manu cum militibus et peditibus et cum vexillis „ ammazzando ed ardendo (2). Ma pure per ammazzare e per ardere non tarderanno a cavalcare quei di Castelfranco di Valdarno contro i Pazzi stessi.

Narra infatti il Villani nella sua cronaca: " Il 29 aprile 1344 quelli di Castelfranco di Valdarno ed altri cavalcarono sopra i Pazzi di Valdarno; irruppero nel castello di Campogiallo ch'era dei Pazzi, uccisero dieci della casa dei Pazzi e vi misero fuoco. Onde costò caro a' Pazzi la guerra e oltraggi fatti a quelli di Castelfranco e agli altri Valdarnesi del contado di Firenze per lo tempo passato (3) „. E noi attraverso alla mirabile rappresentazione del Villani risentiamo l'urto dei cavalieri lanciati furiosamente contro il Castello, l'urlo degli uomini ebbri di vendetta e rivediamo al bagliore delle fiamme che avvolgono la dimora ed i corpi degli odiati oppressori, il gesto selvaggio e finale dei trionfatori fattisi giustizieri anche delle colpe passate.

Tale la famiglia dei Pazzi di Valdarno che noi dobbiamo tenere ben distinti dai Pazzi di Firenze, coi quali, all'infuori del nome e della qualità magnatizia, nulla ebbero in comune, forse neppure l'origine. Questi ultimi infatti, furono delle antichissime famiglie che, venendo da Fiesole, " si puosono nel primo cerchio di Fiorenza „; abitarono sempre nel sesto di Porta S. Piero (4) ove possedevano torri (5). Piegandosi alle nuove

(1) Pietro Santini, *Documenti dell'antica costituzione del Comune di Firenze*. Firenze, 1895, pagg. 232-234, 267-269, 272.

(2) *Delizie degli eruditi toscani*, VIII, p. 282.

(3) Giov. Villani, XII, 30. L'annientamento politico ed economico dei Pazzi di Valdarno risulta da un documento del 1345. Cfr. *Documenti degli Archivi Toscani*, 1866. Capitoli del Comune di Firenze. Inventario e regesto. Tomo II, XVI, 12*.

(4) Malespini, c. 100 e *Delizie, ecc.*, VII, 161.

(5) Malespini, c. 137.

esigenze della vita cittadina, si diedero alla mercatura (1). Fin dalla prima divisione fra Guelfi e Ghibellini, essi furono Guelfi (2); nella scissione dei Guelfi tra Bianchi e Neri, essi furono Neri (3): nella lotta fra magnati e popolani essi, pur essendo magnati, tennero pel popolo (4). Non si potrebbe immaginare un'antitesi più profonda fra queste due famiglie omonime, di cui l'una tanto utile e ossequente al Comune guelfo e popolare quanto l'altra infesta ed ostile. Dopo ciò parrà pressochè superflua l'avvertenza di non confondere un Riniero de' Pazzi di Firenze (5), vissuto circa i tempi del nostro Riniero, col Riniero infamato da Dante.

***

Ora, dato il carattere brutale, prepotente della famiglia, quale, per sommi tratti, siamo venuti delineando, più non ci stupisce il delitto orrendo che non sta già solo, ma che ben s'inquadra in una corona di eguali delitti politici e comuni, che non fu già il solo reato di grassazione commesso da Riniero, ma che dovette senza dubbio allacciarsi ad altri delitti della stessa natura se Dante potè dire di lui e di Rinier da Corneto: " che fecero alle strade *tanta* guerra ". Piuttosto può nascere a tal punto spontanea una domanda: " Il delitto ebbe esso una causa politica, o fu un delitto comune? ". Secondo l'Ottimo che, unico, accenna nelle sue chiose al comandamento di Federigo II circa l'anno 1228, parrebbe trattarsi di un delitto politico. A noi sembra di doverlo escludere. Anzitutto Federico II più non viveva all'epoca del misfatto che, come sappiamo, accadde verso il 1267-68, e l'Ottimo errò nella data; nè è più possibile, da parte nostra, credere col Torraca che l'antico commentatore abbia confuso in uno fatti separati e distanti (6), perchè si è dimostrato ormai sino

(1) Id., c. 52.

(2) Id., c. 172, e Villani, VI, 33.

(3) Villani, VIII, 39.

(4) Giov. Villani, VIII, 65. Da questa famiglia usciranno i congiurati contro i Medici.

(5) Del Lungo, *Dino Compagni, ecc.*, II, 435.

(6) Francesco Torraca, *Di un commento nuovo alla Divina Commedia.* 1899, pag. 109, xii, 137.

all'evidenza che il delitto a cui accenna l'Ottimo è quello stesso che provocò la sentenza di scomunica e la condanna del comune di Firenze. In secondo luogo la qualità personale delle vittime, non potè, se mai, offrire al nostro Riniero, ghibellino, altro che un apparente pretesto per dar colore di delitto politico ad un volgare misfatto, poichè ben sappiamo che il suo scopo non fu solo di incrudelire sulle persone dei prelati e dei loro compagni, ma altresì di depredarli bassamente. In realtà noi ci troviamo di fronte non già ad un uomo di parte che compie le vendette sue e dei consorti, ma ad un rappresentante di quei nobili feudali che, degeneri dei loro avi, si davano alle grassazioni di strada e delle cui gesta abbondano le cronache del tempo. Questa delinquenza che traeva in parte le sue origini dalla decadenza finanziaria ed economica dei signori feudali, dovuta allo svolgersi continuo e progressivo della vita dei Comuni, era pure come il risultato naturale della condizione in cui venivano a trovarsi quei nobili che, fieri della loro indipendenza, non volevano adattarsi al nuovo stato di cose, sottomettersi alla sorgente città, assumere la cittadinanza e darsi alla mercanzia (1). Considerati come ribelli, fatti oggetto a continui attentati da parte del Comune che irresistibilmente tendeva all'espansione, esclusi dai rapporti pacifici, tutto per essi, in certo modo, diventava lecito. Lecito saccheggiare le case altrui se il Comune smantellava i loro castelli, lecito l'irrompere nei confini altrui se il Comune confiscava i loro beni, lecito l'aggredire, l'uccidere, il derubare se il Comune li condannava nel capo e negli averi.

Tale era la sorte dei nobili feudali del contado, e di essa il Boccaccio, interprete, pur qui, dei contemporanei che staccavano questi grassatori dalla schiera dei volgari delinquenti, fa esporre la diagnosi da uno dei loro rappresentanti più famosi, da Ghino di Tacco. — “ Messer l'abate — dice Ghino all'abate di Cligni nell'atto di congedarlo dopo d'aver guarito lui e d'aver meravigliosamente onorati i suoi famigliari mentre al contrario aveva loro tese le reti per derubarli e per farne ricatto — voi dovete sapere che l'esser gentile uomo e cacciato di casa sua

(1) Per questa decadenza cfr. Salvemini, *Magnati e popolani in Firenze dal 1280 al 1295*. Firenze, 1899, pag. 24 e sgg.

e povero, et avere molti e possenti nemici, hanno, per potere la sua vita difendere e la sua nobiltà, e non malvagità d'animo, condotto Ghino di Tacco, il quale io sono, ad essere rubatore delle strade e nimico della corte di Roma „. E l'abate udito ciò e più altro, abbraccia l'ospite ed esclama: “ Maledetta sia la *fortuna* la quale a sì dannevole mestier ti costrigne „, poi per sottrarlo a simile mestiere lo proporrà alla clemenza del Papa (1)

***

In modo ben diverso usò Dante con Riniero de' Pazzi anch'egli “ rubatore di strade e nemico della corte di Roma „. Dante che pure ha una pennellata vigorosa ma non infamante per Ghino di Tacco (2), immerse Riniero nel fiume di sangue e fece che il Centauro, nuovo banditore non più del Comune ma dell'umanità, ne gridasse il nome e il casato e la colpa, quasi eco eterna e formidabile degli innumerevoli bandi di cui il cattano era stato oggetto. Gli è che nell'animo dell'Alighieri si aggiungeva altra ragione di dannazione, altro stimolo d'odio contro costui.

Già notammo altrove che Dante, come fuoruscito bianco, si trovò in S. Godenzo a contatto coi Bianchi fuorusciti, coi rappresentanti dei Cerchi, degli Ubertini, degli Ubaldini, dei Pazzi, nobili tutti ghibellini di contado che si rassomigliavano fra loro per istinti e per costumi. E come in S. Godenzo si trovò con Bettino de' Pazzi, nipote di Riniero, così per qualche tempo, durante le guerre mugellane, egli fu costretto per certo a sofferire la compagnia di altri membri di questa famiglia e dovette — chissà? — dalla bocca stessa dei figli e de' nipoti udire le gesta dell'infame Riniero.

Più tardi, staccatosi definitivamente da costoro, dopo l'insuccesso delle loro armi, egli, l'agnello che agognando al ritorno nel bello ovile, aveva dovuto stringersi ai lupi, sentì profondo il disgusto per l'ignominiosa alleanza subita. Questa è “ la compagnia malvagia e scempia „ (3). Malvagia e scempia non solo

---

(1) Giov. Boccaccio, *Il Decamerone*, X, 2.
(2) *Purgatorio*, VI, vv. 13-14.
(3) *Paradiso*, XVII, 62.

perchè composta di gente che dal segnacolo ghibellino traeva pretesto per conseguire i suoi fini particolari (1) e che dalla guerra traeva occasione di rapina, ma anche perchè era composta di persone dall'animo perverso e dalle tendenze delittuose. La spietata e raffinata malvagità de' Neri travolse nella stessa condanna Dante e la compagnia malvagia; ma come egli pose ogni studio nel forbirsi da tali costumi, così pose ogni cura nello staccar sè da quell'orda di malvagi e di violenti, contrapponendo, sempre che gli fu possibile, alla feroce e partigiana retorica del Podestà Messer Cante de' Gabrielli (2), la formola incisiva dei suoi versi attingenti ad un'alta, universale e perenne idea di giustizia.

Relazione intorno alla Memoria del professore Massimo Lenchantin de Gubernatis, intitolata: *Appunti sull'ellenismo nella poesia arcaica latina.*

Chiarissimi Colleghi,

Sotto il titolo " Appunti sull'ellenismo nella poesia arcaica latina „ il professore Massimo Lenchantin de Gubernatis ha svolto largamente un importante capitolo di storia della letteratura romana, sul quale se tutti possiamo andar d'accordo quanto al principio generale irrefutabile della dipendenza della poesia arcaica latina dalla greca, cessa invece l'accordo, e si complicano le questioni, quando si deve stabilire, in termini definiti e precisi, quali rappresentanti del pensiero greco e dell'arte greca abbiano avuto speciale efficacia sul pensiero e sull'arte di quella età; e quindi necessariamente si affaccia il quesito se, e fino a qual punto, si abbiano a mettere in relazione gli scritti de' poeti arcaici latini con la letteratura classica o prealessandrina, anzichè con quella del periodo alessandrino o ellenistico; e poi, fermato il rapporto generale, si presenta un altro complicato quesito, per determinare quali possano essere state le parti-

(1) *Paradiso,* VI, 101-105.
(2) Isidoro del Lungo, *Dell'esilio di Dante,* Documenti, pag. 82.

colari influenze che si esercitarono su ciascun poeta, anzi su ciascun prodotto della sua artistica attività.

Si comprende perciò agevolmente che il prof. Lenchantin, sebbene abbia dato al suo lavoro il modesto titolo di appunti, per trattare in modo conveniente il tema propostosi ha dovuto far oggetto delle sue indagini e considerazioni ogni manifestazione della poesia arcaica di Roma, dalla traduzione dell'Odissea omerica alla satira di Lucilio, con la disamina della quale si chiude la sua monografia. È una tela amplissima che ci si dispiega davanti, piena di questioni e di raffronti, accompagnati da osservazioni acute e da parecchie vedute originali. Notevole è il fatto, che il Lenchantin si schiera risolutamente contro coloro i quali amano raccostare i poeti arcaici all'ellenismo antico, sostenendo, al contrario, che Livio Andronico, Nevio, Ennio, e gli altri rappresentanti della poesia arcaica latina si sono formati alla scuola dell'ellenismo più recente. Perciò l'alessandrinismo nella letteratura latina non comincerebbe con i così detti *cantores Euphorionis*, ma s'inizierebbe col principio stesso della letteratura romana; onde l'Omero e i tragici imitati dai poeti di Roma non sono, per il Lenchantin, l'Omero e i tragici dell'età classica della Grecia, ma bensì l'epica e la tragedia alessandrina. Anzi la letteratura alessandrina, a suo avviso, informa di sè talmente il pensiero e l'arte di que' poeti, che Ennio ne dipenderebbe anche là dove altri lo potrebbe giudicare indipendente, come nelle *satyrae*, la cui materia non avrebbe punto quella originalità che comunemente si ammette, ma avrebbe, all'incontro, stretta relazione con le satire di Timone di Fliunte e coi carmi cinedologici di Sotade: la stessa grafia *satyrae*, sostenuta dal Lenchantin, mostrerebbe la dipendenza da lui affermata, e non solamente per Ennio, ma anche per Lucilio, del quale s'argomenta di dimostrare i molteplici contatti con la letteratura ellenistica, sì per mezzo di Menippo (che il Lenchantin ritiene fonte comune di Lucilio e di Luciano, per quanto dichiari che questi non deve aver letto " il latino difficile di Lucilio „), come per mezzo della commedia, ma non veramente della commedia di Eupoli, di Cratino e di Aristofane, conforme alla testimonianza di Orazio, sì bene, in ispecial guisa, per mezzo della ilarotragedia rintoniana e dell'atellana romana. Di questa il Lenchantin torna a studiare i rapporti, e non soltanto a proposito di Lucilio, ma

ancora di Plauto e degli altri drammatici dell'età arcaica. Lucilio è, per il Lenchantin, così pervaso dalla influenza di Rintone, che, oltre ad avere parodiato la *Hymnis* di Cecilio Stazio (e ciò pare sufficientemente provato), a quella guisa che Rintone aveva parodiato Euripide, egli avrebbe altresì rappresentato la grande figura di Socrate con l'intento di parodiarla. Ora d'un siffatto intento riesce assai difficile comprendere la ragione nel poeta romano, mentre invece facilmente si capisce in un fliacografo greco la parodia d'un poeta greco, come si capisce nella filosofia popolare alessandrina la tendenza a " prendere in burla i *δογματικοί* ", secondo che scrive il Lenchantin al termine della sua monografia.

Come questa, così altre conchiusioni, alle quali perviene il Lenchantin nel suo complesso lavoro, possono dar luogo a parecchi dubbi e ad alquante obiezioni; ma in tutta la monografia è tale copia di soda dottrina, e la trattazione è condotta con tale rigore di metodo scientifico, senza pompa di citazioni — le quali sono anzi limitate allo stretto necessario —, che i sottoscritti non esitano a proporne la stampa nelle *Memorie* della nostra Accademia.

GAETANO DE SANCTIS
ETTORE STAMPINI, *relatore*.

Relazione intorno alla Monografia del Dr. Emilio POZZI, intitolata: *Le battaglie di Cos e di Andro e la politica marittima di Antigono Gonata.*

EGREGI COLLEGHI,

Il *κοινὸν τῶν νησιωτῶν* è una delle leghe dell'età ellenistica che maggiormente hanno attirato negli ultimi anni l'attenzione degli studiosi. Non menzionato mai dalle fonti classiche e ricordato solo da non molti documenti epigrafici, il *κοινὸν τῶν νησιωτῶν* non poteva certo competere d'importanza con le maggiori leghe di quella età, la etolica e la achea. Ma le sue vicende sono di sommo interesse perchè s'intrecciano con quelle della lotta tra due delle maggiori potenze ellenistiche, la Macedonia

e l'Egitto, per la supremazia nel mare Egeo. Si riteneva fin qui che tali vicende si rispecchiassero nei documenti deliaci. Centro religioso delle Cicladi, Delo fornisce documenti, databili almeno approssimativamente, di fondazioni sacre dei Tolemei, degli Antigonidi e d'altri principi del III secolo av. Cr. Era opinione comune che tali fondazioni si collegassero con l'alterno predominio politico dell'una o dell'altra Potenza sulla lega degl'isolani; e s'era cercato anzi per mezzo di esse di datare precisamente le grandi battaglie navali di Cos e di Andro in cui appunto si è disputato tra quelle Potenze il primato marittimo sul bacino orientale del Mediterraneo nel momento stesso in cui Roma e Cartagine si disputavano nella prima punica la supremazia del bacino occidentale.

Recentemente peraltro Werner König ha creduto di dover respingere come infondate tutte le congetture desunte in tal proposito dai documenti deliaci. Delo, santuario neutrale in mezzo al mare conteso dalle armate avversarie, avrebbe accolto imparzialmente i doni votivi e le fondazioni sacre di entrambi i contendenti. Tale teoria è combattuta con validi argomenti dal Dr. Pozzi nella memoria su cui abbiamo l'onore di riferire a questa R. Accademia. Ma se anche fosse accettabile, come non pare che sia, non infirmerebbe l'evidente carattere commemorativo che hanno in massima le fondazioni deliache, carattere su cui il Pozzi insiste ben a ragione, nè quindi varrebbe a dimostrare ingiustificato il servirsene per ricostituire gli avvenimenti storici di cui l'Egeo fu il teatro.

Senonchè la cronologia degli arconti deliaci fissata dall'Homolle, la quale permetteva di datare le fondazioni sacre dei principi ellenistici in Delo e, per loro mezzo, gli avvenimenti con cui si collegano, è rimasta alquanto scossa dalle epigrafi delie recentemente pubblicate e dal commento che ne ha fatto lo Schulhof. Il Pozzi pertanto, esaminando e discutendo con ogni cura i nuovi documenti, cerca di determinare con precisione la misura delle correzioni che debbono essere portate alla cronologia homolliana.

Per tal modo egli si apre la via alla parte più interessante e più ricca di acute congetture della sua memoria, quella in cui tenta di ricostruire la storia delle lotte per la supremazia del mar Egeo nel secolo III. Anche qui non solo egli usa con pie-

nezza d'informazione tutti i documenti epigrafici scoperti fino ad ora, ma adduce nella ricerca elementi nuovi, per es. circa la lettura del passo controverso di Trogo Pompeo concernente la battaglia d'Andro. E dopo aver cercato d'assodare i fatti ne studia con molta acutezza le ragioni. Saranno lette certo con molto interesse le pagine sulla decadenza dell'autorità della Macedonia nella penisola ellenica sullo scorcio del regno d'Antigono Gonata e quelle in cui si studia di spiegare perchè declinava la potenza egiziana a partire dagli ultimi decennî del secolo III.

Non tutti forse accetteranno in materia sì controversa ogni ipotesi del Pozzi. Qualche dubbio rimarrà certo ad es. intorno alla battaglia di Andro e alle vicende del *κοινόν* delle isole negli ultimi decenni del sec. III, finchè nuovi documenti non abbiano recato luce maggiore. Tutti però, credo, riconosceranno che, per accuratezza, bontà di metodo, indipendenza di giudizio, la memoria del Pozzi sta degnamente accanto ai migliori lavori di storia ellenistica editi nelle nostre pubblicazioni accademiche, a quello ad es. del compianto Dr. Pietro Ghione sullo " Stato e e il Comune nel Regno di Pergamo ", che ebbe largo consenso d'approvazione dai critici più autorevoli.

Pertanto la Commissione ritiene che il lavoro del Pozzi possa essere ammesso alla lettura nella Classe.

Ettore Stampini.
G. De Sanctis, *relatore*.

L'Accademico Segretario
Gaetano De Sanctis.

INDICE
DEL VOLUME XLVII

PUBBLICAZIONI RICEVUTE DALL'ACCADEMIA

NB. Le pubblicazioni segnate con * si hanno in cambio;
quelle notate con ** si comprano; e le altre senza asterisco si ricevono in dono.

Dal 25 Giugno al 19 Novembre 1911.

Boccardi (G.). Conférence des éphémérides. Paris, octobre 1911. Communication; 8° (*dall'A.*).

Borghino (G. M.). Metodo generale di estrazione delle radici e di soluzione delle equazioni ecc. Torino, 1911; 8° (*Id.*).

Canalis (P.). Per l'acquedotto di Torino. Roma, 1911; 8° (*Id.*).

Coblentz (W. W.). The reflecting power of various metals. Washington, 1911; 8°.

— Selective radiation from various substances; III. Washington, 1911; 8°.

Colonnetti (G.). Sull'efflusso dei liquidi fra pareti che presentano una interruzione. Nota II. Roma, 1911; 8° (*dall'A.*).

Darwin (Sir G. H.). Scientific Papers. Vol. IV: Periodic orbits and miscellaneous Papers. Cambridge, 1911; 1 vol. 8° (*Id.*).

Dehaut (E. G.). Matériaux pour servir à l'histoire zoologique et paléontologique des îles de Corse et de Sardaigne. Paris, 1911, fasc. 1-3.

** **Eulerus** (L.). Opera Omnia, Vol. I, II. Sub auspicis Societatis scientiarum naturalium Helveticae. Ser. I. Opera mathematica, vol. I; Ser. III. Dioptrica, vol. I. Leipzig u. Berlin, 1911. 2 vol. 4°.

Gatti (E.). Corso elementare di aggiustaggio. Novara, 1 vol. 8° e Atl. (*dall'A.*).

Koerner (W.). Ueber die Bestimmung des chemischen Ortes bei den aromatischen Substanzen. Vier Abhandlungen. Leipzig, 1910; 8° (*dall'A. Socio dell'Accademia*).

Lacroix (A.). Les Syénites Néphéliniques de l'Archipel de Los et leurs minéraux. Paris, 1911; 1 vol. 4° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Leyst (E.). Ueber Erdmagnetische Ablenkungsbeobachtungen. Moscou, 1910; 8°.

— Die Variationen des Erdmagnetismus. Moscou, 1910; 8° (*dall'A.*).

Misuri (A.). Sopra un nuovo Trionichide dell'arenaria miocenica del Bellunese (*Trionyx bellunensis* Dal Piaz in sch.). Perugia, 1911; 4° (*dall'A.*).

Negri (G.). Sulla velocità media apparente dei primi tremiti preliminari di terremoti vicini. Buenos Aires, 1911; 8° (*Id.*).

Ochitowitsch (A.). Beweis des grossen Fermatschen Satzes. Kazan, 1910; 8° (*dall'A.*).
Piolti (G.). Sintesi della Smithsonite e dell'Anglesite. Torino, 1911; 8° (*Id.*).
Reymond (Carlo). Opere. Ristampate per festeggiarne il cinquantesimo anno di vita universitaria dai Colleghi, Discepoli, Ammiratori. Biella, 1911; 2 vol. 8° (*dal Comitato per le onoranze al Prof. C. Reymond*).
Oddo (G.). Sulla *Solanidina sodomacum*. Roma, 1911; 8° (*dall'A.*).
— e **Anelli** (G.). Sul peso molecolare e la formola di costituzione degli acidi solforico e nitrico. Roma, 1911, 8° (*dagli AA.*).
— e **Cesaris** (M.). Sulla solanina estratta dal *Solanum sodomaeum* Linn. Roma, 1911; 8° (*dagli AA.*).
Palazzo (L.). Meteorologia e Geodinamica. Roma, 1911; 8° (*dall'A.*).
Palladino (P.). Les composés chimiques dans l'espace. Pavia, 1911; 8° (*Id.*).
Ricart (L. C.). Algo referente à cierta clase especial de Integrales singulares. Barcelona, 1911; 8° (*Id.*).
Sacco (F.). Cenni di Geologia applicata sull'Appennino meridionale. Perugia, 1910; 8°.
— L'Appennino meridionale. Studio geologico sintetico. Roma, 1910; 8°.
— Il gruppo del Cenisio-Ambin-Frejus. Torino, 1910; 8° (*dall'A.*).
Stella Starrabba (F.). Sul rapporto esistente fra le precipitazioni atmosferiche annuali e l'attività dei vulcani Vesuvio ed Etna. Napoli, 1911; 8°.
— Sull'esistenza di bocche eruttive a Sud Est di Mompilieri, formatesi durante l'eruzione del 1669. Catania, 1911; 4° (*Id.*).
Tommasina (Th.). Sur une modification donnant plus liberté d'allure et de sûreté aux aéroplanes. Genève, 1911; 8°.
— Sur un appareil d'aviation non renversable et effectuant automatiquement le vol plané en cas d'arrêt du moteur. Genève, 1911; 8° (*Id.*).
** **Vegetation** (Die) der Erde, vol. IX (I. Bd), Die Pflanzenwelt Afrikas insbesondere seiner tropischen Gebiete. Leipzig, 1910, 2 vol. 8°.

Dal 2 Luglio al 26 Novembre 1911.

Arnò (C.). La costituzione ultima del codice " De periculo et commodo rei venditae " (Cod. 4-48-6). Palermo, 1910; 8° (*dall'A.*).
Biasiotti (G.). Le Diaconie Cardinalizie e la Diaconia " S. Viti in Macello ". Roma, 1911; 8° (*Id.*).
Bourgeois (H.). Kurze praktische Grammatik der mitteleuropäisch-zigeunerischen Sprache nebst einer kleinen Chrestomatie. Striegau, 1911; 8°.
— Un Journal Pseudo-Tachinghiané. Liverpool, 1911; 8°.
— La Chanson de Montauban en romanche Haut-Engadinais. Montpellier, 1911; 8° (*dall'A.*).
Caser (A.). Canzoni economiche. Venezia; 8° (*dall'A.*).
Catalogo descrittivo della Mostra Siamese alla Esposizione internazionale delle Industrie e del Lavoro in Torino, 1911; compilato da G. E. Gerini. Torino, 1 vol. 8°.

Commissão do Brazil na Exposição Turin-Roma. — Album Paulista delle proprietà agricole appartenenti agli Italiani nello Stato di S. Paulo-Brasile. 1911; 8° obl. — Brasilien. Die jüngste Grossmacht. Berlin, 1910; 8°. — Brazil Magazine. An. V, N. 46. Rio de Janeiro, 1910; 8°. — Le Brésil. Description physique. 1 c. in-fol. — Le Brésil. Ses richesses naturelles. Ses industries. Vol. II. Paris, 1910; 8°. Vol. III. Rio de Janeiro, 1909; 8°. — Cusano (A.). Italia d'oltre mare: impressioni e ricordi dei miei cinque anni di Brasile. Milano, 1911; 8°. — D'Atri (A.). Brasile, Faro dell'Universo. Parigi, 1910; 8°. — Exposição Nacional de 1908 (A Parahyba na). Parahyba do Norte, 1909; 8°. — Exposition Universelle de Bruxelles, 1910. Commission d'Expansion économique du Brésil. Paris, 1910; 11 fasc. 8°. — Fanuele (N.). Il Brasile. S. a. l.; 8°. — La Grande Revue. 12e An., N. 22, 25 novembre 1908. — Guida (G.). L'Italiano nel Brasile. Manuale pratico dell'emigrante e del commerciante. Nuova ediz. S. a. l.; 8°. — Latteux. A travers le Brésil. Au pays de l'or et des diamants. Paris, 1910; 8°. — Orban (V.). Anthologie française des écrivains brésiliens prosateurs et poëtes depuis les origines jusqu'à nos jours. Paris, 1910; 8°. — Pereira (H.). Appunti sui legnami dello Stato di San Paolo. San Paolo, 1910; 8°. — Pestana (N. R.). Comment on assainit un pays. Paris, 1910; 8°. — I Prodotti dello Stato di San Paolo. São Paulo; 8°. — Runge (E.). Wie wandere ich nach Südamerika aus? Teil I, Brasilien, Berlin; 8°. — Gli Stati Uniti del Brasile all' Esposizione di Torino. Rivista, 1911, N. 1; 8°. — Studio comparativo sull'intercambio fra l'Italia, il Brasile e lo Stato di San Paolo. São Paulo-Brazil, 1911; 4°. — Walle (P.). Au Brésil: de l'Uruguay au Rio São Francisco. Paris; 8°. — Id., L'État de Rio Grande do Sol. Paris; 8°. — Id., L'État de Rio de Janeiro. Paris; 8°. — L'État de São Paulo. Paris; 8°. — États de Goyaz et de Matto Grosso. Paris; 8°. — Wileman (J. P.). The Brazilian Year Book issued under the Patronage of the Brazilian Government, Second issue, 1909. Rio de Janeiro, London; 8°. — Wright (M. R.). The New Brazil its resources and attractions historical, descriptive and industrial. Philadelphia, London, 1907; 4° (*Omaggio*).

Dalla Vedova (G.). Filippo Porena. Commemorazione del Socio straniero Teobaldo Fischer. Roma, 1910; 8°.

— L'Oceanografia. Roma, 1911; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accad.*).

Gnesotto (A.). Cenni sulla vita di Francesco Bonatelli e un indice ordinato degli scritti di lui. Padova, 1911; 8° (*dall'A.*).

Kant (E.). Fondazione della Metafisica dei Costumi. Prima versione italiana con introduzione di G. Vidari. Parte I e II. Pavia, 1910 (*dono del Traduttore*).

Lameire (J.). Les déplacements de souveraineté en Italie pendant les guerres du XVIIIe siècle. Paris, 1911; 8° (*dall'A.*).

Marchesi (C.). La marina mercantile in Italia. Torino, 1911; 8° (*Id.*).

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 91 (fasc. 3° del T. XVII, p. 1); Fasc. 92 (fasc. 3° del T. XXVII, p. 1).

— Archivio Muratoriano. Studi e ricerche in servigio della nuova edizione dei “Rerum italicarum scriptores„. N. 10.

** **Pagliaini** (A.). Catalogo generale della libreria italiana dall'anno 1900 a tutto il 1910. Vol. I, 1.

Pappafava (V.). Giurisdizione e Rito. Verona, 1911; 8° (*dall'A.*).

Repubblica Argentina. Catalogo speciale Ufficiale dell'Esposizione della Repubblica Argentina, 1911; 1 vol. 8°. — Argentina. Ricordo della Repubblica Argentina nell'Esposizione Internazionale delle Industrie e del Lavoro di Torino, 1911; 1 Atl. in-8° cbl. — La Repubblica Argentina nel 1911. Riassunto geografico, agricolo-zootecnico, industriale ed economico. Amministrazione del Dr. R. Saenz Peña, 1 carta in-fol. — Il commercio internazionale argentino. Informazioni grafiche e statistiche. Superficie e popolazione. Agricoltura e pastorizia, 1 fasc. 8°. — L'industria delle carni frigorifere. 1911; 1 fasc. 8°. — L'Argentina quale paese di immigrazione. Agricoltura, Pastorizia, Commercio e Industria. Note ed appunti. 1911; 1 fasc. 8°. — L'Argentina Agricola. 1910; 1 Atl. 4°. — Mapa de los Ferro-Carriles en explotacion y costrucción 25 de Mayo de 1910. — Ministerio de Agricoltura. Dirección de Estadistica y Economia Rural, 1910. Superficie, Poblacion, Ferrocarriles, Cultivos y Ganados (*dono del Comitato esecutivo Argentino all'Esposizione di Torino, 1911*).

Siedel (v. A.). Wörterbuch der deutsch-japanischen Umgangssprache mit einem Abriss der Grammatik der japanischen Umgangssprache und unter Berücksichtigung der Phraseologie. Berlin, 1910.

— Deutsche Grammatik für Japaner. Berlin, Märkische Verlagsanstalt. 1911, 1 vol. 8° (*dono dell'Editore*).

Vidari (G.). Elementi di Etica. 3ª edizione. Milano, 1911; 16° (*dall'A.*).

Dal 19 Novembre al 3 Dicembre 1911.

De Toni (G. B.). Appunti dal tomo terzo dell'erbario Rauwolff conservato in Leida. Modena, 1910; in-8°.

— Spigolature Aldrovandiane, X, XI, Modena, Rovereto, 1911; in-8°.

— Nuovi documenti intorno Luigi Anguillara, primo Prefetto dell'Orto Botanico di Padova, Venezia, 1911; in-8°.

— Commemorazione del Senatore Paolo Lioy, Venezia, 1911; in-8°.

— Il carteggio degli italiani col botanico Carlo Calusio nella biblioteca Leidense, Modena, 1911, in-4° (*dall'A.*).

Guérin-Ganivet (J.) et **Legendre** (R.). Sur la Faune des roches exposées de l'Archipel des Glénans, Paris, 1909; in-8° (*dagli AA.*).

Jadanza (N.) Tavole Tacheometriche Sessagesimali, 2ª ediz., Torino, 1911; in-8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Janet (Ch.). Sur l'ontogénèse de l'insecte. Limoges, 1909; in-8°.

— Sur la morphologie de l'insecte. Limoges, 1909; in-8° (*dall'A.*).

Ogliotti (Q.) Nuovo sistema di tiro nelle armi da fuoco servendosi del moto rotatorio terrestre e di radiotelegrafia aerostatica servendosi del medesimo moto con massima velocità ed uso postelegrafico, Masserano, 1911; in-8° (*Id.*).

Venturi (A.). Gli integrali generali del moto del bipendolo in relazione a movimenti orizzontali intrinseci od estrinseci del supporto, Palermo, 1911; in-4° (*Id.*).

Dal 26 Novembre al 24 Dicembre 1911.

** **Cambridge** (The) Moderne History. Vol. XIII, Genealogical tables and lists and general index. Cambridge, 1911; 1 vol. 8°.

Muratori (L. A.). Rerum italicarum scriptores: fasc. 7 del T. XXXII, P. I (fasc. 93); fasc. 6-7 del T. XXIII, P. III (fasc. 94-95); fasc. 3 del T. III, P. XVI (fasc. 96).

Perugi (G. L.). La vita di Gottschalc. Roma, 1911; 1 vol. 4° (*dall'A.*).

Scala (R. v.). Die Anfänge geschichtlichen Lebens in Italien. München, 1911; 8° (*Id.*).

Sforza (G.). Il generale Manfredo Fanti in Liguria e lo scioglimento della Divisione Lombarda. Roma-Milano, 1911; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

— Giuseppe Bertoloni. Spezia, 1911; 8° (*Id.*).

Zocco-Rosa (A.). La tavola bronzea di Narbona. Catania, 1911; 8° (*dall'A.*).

Dal 3 al 31 Dicembre 1911.

Avogadro (A.). Opere scelte, pubblicate dalla R. Accademia delle Scienze di Torino per cura del Socio I. Guareschi. Torino, 1911; 1 vol. 4°.

Baldaque da Silva (A. A.). Le problème de la vie. Lisboa, 1911; 1 vol. 8° (*dall'A.*).

Boccardi (G.). Unitas. Conferenza delle Effemeridi astronomiche in Parigi: Ottobre 1911. Torino, 1911; (*Id.*).

Del Coral (J. J.). Nuevos métodos para resolver ecuaciones numericas. Madrid, 1912; 1 vol. 8° (*Id.*).

Labozzetta (R.). Determinazione coi dati di un solo Osservatorio dell'azimut del luogo della superficie terrestre dove s'ebbe il principio di un moto sismico. Litografato; 4° (*Id.*).

Longo (B.). Sul " Ficus Carica „ (" Annali di Botanica „, del Prof. R. Pirotta) (*Id.*).

Mangin (L.). Sur le " Peridiniopsis asymetrica „ et le " Peridinium Paulseni „. Paris, 1911; 4°.

— A propos de la division chez certains Péridiniens. Paris, 1911; 4° (*Id.*).

Mattirolo (O.). I funghi ipogei della Liguria. Genova, 1911; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Onoranze centenarie internazionali ad Amedeo Avogadro: 24 settembre 1911. Torino, 1911; 4°.

Perrier de la Bathie (Eug.). Additions à la Flore de la Maurienne. Genève, 1911 (*dall'A.*).

Perugi (G. L.). Gottschalc (*Id.*).

Serbie (La) à l'Exposition universelle de 1911 à Turin. Belgrade, 1911; 8°.

Taramelli (T.). Quelques observations sur les changements du climat post-glaciaire en Italie. Stockholm, 1910; 4° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dal 31 Dicembre 1911 all'11 Febbraio 1912.

Atti del 1° Congresso internazionale dei Patologi. Torino, 1912; 1 vol. 8°.

Bruni (A.). Ueber die evolutiven und involutiven Vorgänge der Chorda dorsalis in der Wirbelsäule mit besonderer Berücksichtung der Amnioten. Wiesbaden, 1912; 8° (*dall'A.*).

Celoria (G.) e **Gliamas** (E.). Triangolazione geodetica e cartografia ufficiale del Regno. Roma, 1911; 8° (*dal Socio corrispondente G. Celoria*).

Coblentz (W. W.). Radiometrie investigation of water of crystallization, light filters, and standard absorption bands. Washington, 1911; 8° (*dall'A.*).

De Toni (G. B.). Frammenti Vinciani. Parte V. Modena, 1911; 8° (*Id.*).

Flexner (S.). The Biological Basis of Specific Therapy. Boston-New York, 1911; 8° (*Id.*).

Fusari (R.). Carlo Giacomini nella vita e nelle opere. Torino, 1912; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Issel (A.). L'evoluzione delle rive marine in Liguria. Roma, 1911; 8°.

— Cenni intorno ai litorali italiani considerati dal punto di vista geologico (Estr. dalla Prefazione al Portolano delle Coste d'Italia).

— Origine e conseguenze delle Frane. Pavia, 1910; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Lockemann (G.). Zum hundertjährigen Jubiläum von Avogadro Hypothese. Leipzig, 1911; 8° (*dall'A.*).

Pampanini (R.). Per la protezione della Flora italiana. Firenze, 1911; 8° (*dalla Società Botanica italiana*).

Parona (C. F.). Giorgio Spezia. Torino, 1911; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Richardson (S. B.). Discoveries regarding metal their growing or self-enlargement of Bulk etc.

Sensini (P.). Recensione del libro: " Alla conquista dei poli vagabondi di G. Magnozzi Bianchi ". Prato, 1912; 8° (*dall'A.*).

Taramelli (T.). Antonio Stoppani. Conferenza. Roma, 1911; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Venturi (A.). Quarta campagna gravimetrica in Sicilia nel 1906. Roma, 1909; 8° (*dall'A.*).

Vercelli (F.). Relazione e ricerche sulle osservazioni della temperatura del lago di Como fatte negli anni 1898-1905 dai proff. M. Cantone, L. De Marchi, C. Somigliana. Milano, 1911; 4° (*Id.*).

Dal 24 Dicembre 1911 al 18 Febbraio 1912.

Barraja (E.). Bruzólo in Val di Susa e il trattato del 1610. Torino, 1911; 8° (*dall'A.*).

Bertolini (C.). Bibliografia (estr. dal " Bull. dell'Ist. di Dir. Romano ", a. XXIII). Roma, 1911; 8° (*Id.*).

Bollea (L. C.). Ferdinando Gabotto (Biografia, bibliografia ed onoranze). Torre Pellice, 1911; 8° (*Id.*).

Boselli (P.). Discorso pronunziato al terzo Congresso nazionale delle Rappresentanze provinciali. Torino.

— Discorso pronunziato alla 30° Distribuzione dei premi agli insegnanti rurali benemeriti. Torino, 1911 (*da S. E. Paolo Boselli Presidente dell'Accademia*).

Einaudi (L.). Intorno al credito industriale. Appunti. Roma, 1911; 8°.

— Le premesse dottrinali della riforma del regime fiscale delle Società per azioni. Roma, 1911; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Giunta (A.). L'esame della critica sulla Storiografia della Sicilia dei secoli XVI e XVII. Nicosia, 1911; 8° (*dall'A.*).

Marre (A.). Glossaire explicatif des mots de provenance malaise et javanais usités dans la langue française. Épinal, 1897; 24° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

** **Monumenta** Germaniae historica. Legum, Sectio IV. Constitutiones et Acta publica imperatorum et regum. T. V, pars altera. Hannoverae et Lipsiae, 1901; 4°.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. Fasc. 5° del T. XXII, p. IV (97); Fasc. 8° del T. XXXII, p. I (98); Fasc. 2° del T. XXIII, p. I (99).

Relazione sul grave problema dell'allargamento della cinta daziaria della Città di Torino, col nuovo spostamento proposto dalla Giunta. Torino, 1912; 8°.

Sforza (G.). Massimo d'Azeglio alla guerra dell'indipendenza nel '48. Documenti inediti. Modena, 1911; 8°.

— La difesa di Casale nel 1849. Documenti inediti. Torino, 1912; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).

Taglietti (G.). Discorso all'Assemblea generale del 3 gennaio 1912 sull'Amministrazione della Giustizia nella Corte di Cassazione di Torino durante l'anno 1911. Torino, 1912; 8° (*dall'A.*).

Zur Etymologie des Namens Krems. Wien, 1911; 8°.

Dal 18 Febbraio al 3 Marzo 1912.

Biasiotti (G.) e **Tomassetti** (G.). Tusculana. Roma, 1912; 8° (*da mons. Gio. Biasiotti*).

Cavazzocca Mazzanti (V.). L'isola di Trimellone (Lago di Garda). Verona, 1910; 8°.

— Illustri lazizìensi. Aleardo Gafforini, Antonio Partenio. Verona, 1910; 8° (*dall'A.*).

** **Covotti** (A.). La vita e il pensiero di Arturo Schopenhauer. Torino, 1910, 1 vol. 8°.

** **Croce** (B.). La filosofia di Giambattista Vico. Bari, 1911; 8°.

— Filosofia della pratica. Economica ed Etica. Bari, 1909; 8°.

** **Della Valle** (G.). Le leggi del lavoro mentale. Torino, 1910; 1 vol. 8°.

Grassi Bertazzi (G.). Giordano Bruno, il suo spirito e i suoi tempi. Milano-Palermo-Napoli, 1910; 1 vol. 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Filosofia*).

** **Pagliaini** (A.). Catalogo generale della Libreria italiana dall'anno 1900-910; Primo supplemento, vol. I, fasc. 2-4. Milano; 4°.

** **Pastore** (A.). Sillogismo e proporzione. Contributo alla teoria e alla storia della Logica pura. Torino, 1910; 1 vol. 8°.

** **Varisco** (B.). I massimi problemi. Milano, 1910; 1 vol. 8°.

Dall'11 Febbraio al 24 Marzo 1912.

Backhouse (T. W.). Catalogue of 9842 Stars or all Stars very conspicuous to naked eye, for the epoch of 1900. Sunderland, 1911; 1 vol. 4° (*dall'A.*).

Colomba (Luigi). Sopra alcune esperienze riguardanti la struttura della leucite. Padova, 1911; 8° (*Id.*).

Eijkman (P. H.). L'Internationalisme Scientifique (Sciences pures et Lettres). La Haye, 1911; 1 vol. 8° (*dono del Bureau préliminaire de la Fondation pour l'Internationalisme*).

Garrigos (V.). Nuove curve (V) e loro proprietà. Roma, 1910; 4° (*dall'A.*).

Giuffrida-Ruggeri (V.). L'Uomo come specie collettiva. Discorso. Napoli, 1912; 8° (*Id.*).

Keindorff (A.). Ableitung der Spannkraftsgleichung gesättigter Dämpfe; das Flussigkeitsvolum und spezifische Dampfvolum. Magdeburg, 1912; 8° (*Id.*).

Relazione di perizia nella causa sommaria di Garroni marchese sen. Camillo contro Società Anonima di lavorazione dei carboni fossili e loro sottoprodotti. Torino, 1911; 4° (*dono del Socio residente O. Mattirolo, Relatore per la parte botanica*).

Dal 24 Marzo al 14 Aprile 1912.

Beiträge zur Chemischen Physiologie und Pathologie. VIII. Bd., N. 8-12 (*dal Prof. F. Hofmeister a complemento del Vol.*).

** **Euleri** (Leonhardi) Opera omnia: Dioptrice Volume posterius continens libri secundi sectionem tertiam et appendicem librum tertium. Lipsiae et Berolini, 1912; 1 vol. 4°.

Kilian (W.). Liste des publications scientifiques de M. W. Kilian. Grenoble, 1910; 8°.

— Contributions à la connaissance de l'hauterivien du sud-est de la France. Paris, 1910; 8°.

— Sur les " seuil de débordement „ glaciaires et sur une phase importante dans la succession des oscillations glaciaires dans les Alpes françaises. Paris, 1911; 8°.

— Sur le genre Ammonitoceras. Paris, 1910.

— Notice biographique et resumé des recherches scientifiques de M. W. Kilian (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Liebisch (Th.). Ueber die Fluoreszenz der Sodalith- und Willemitgruppe im ultravioletten Licht. Berlin, 1912; 8°.

— Ueber den Schichtenbau und die elektrischen Eigenschaften des Zinnerzes. Berlin, 1911; 8° (*dall'A.*).

Mattirolo (O.). Ciò che hanno fatto i botanici italiani nell'ultimo cinquantennio e ciò che dovrebbero fare. Roma, 1912; 8°.
— L'attività della R. Accademia di Agricoltura nell'estate 1911. Relazione. Torino, 1912; 8°.
— Gastone Gautier e l'opera sua. Torino, 1912; 8° (*dall'A. Socio residente dell'Accademia*).
Reboul (P.) et **Kilian** (W.). Sur un gisement fossilifère du Valanginien moyen dans le Nord du Massif de la Grande-Chartreuse. Paris, 1910; 8° (*dal Prof. W. Kilian Socio corrispondente dell'Accademia*).
Schelenz (H.). Zur Geschichte der pharmazeutisch-chemischen Destilliergeräte. Leipzig; 8° (*dall'A.*).
** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe. I. Fauna palaeartica, fasc. 28-56. II. Fauna exotica, fasc. 15-39. Stuttgart; 4°.
Volterra (V.), **Loria** (G.) e **Gambioli** (G.). Opere matematiche del marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano, pubblicate sotto gli auspici della Società italiana per il progresso delle scienze. Milano-Roma-Napoli, 1911-1912; 3 vol. 8° (*dono del Prof. G. Loria*).

Dal 3 Marzo al 5 Maggio 1912.

Bervaldi (G.). Alcune osservazioni ai due ultimi opuscoli del sac. Pietro Kaer e del P. G. M. intorno a S. Doimo vescovo e martire di Salona. Fiume, 1910; 8° (*dono della Direzione del Bull. di Archeologia Dalmata*).
Gautero (F.). Giustizia e proprietà fondiaria in Tunisia ed Algeria. Relazione a S. E. il Ministro di Grazia e Giustizia. Roma, 1912; 4° (*dall'A.*).
Girola (C. D.). L'Argentina agricola. Torino, 1912; 1 vol. 8° (*Id.*).
Helssig (v. R.). Der Erwerb des Codex Utinensis und einer anderen Julianhandschrift durch Gustav Hänel. Leipzig, 1912; 8° (*Id.*).
Lanificio Scuola " Felice Piacenza ". Biella; 8°.
Monceaux (P.). Histoire littéraire de l'Afrique chrétienne depuis les origines jusqu'à l'invasion arabe. T. 4e: Le Donatisme. Paris, 1912; 8° (*dall'A.*).
** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. T. XVII, p. 3a, fasc. unico (fasc. 100).
Patetta (F.). Nuove ipotesi sulla patria della così detta *Lombarda*. Weimar; 8°.
— Gli " ex libris " di Giacomo Francesco Arpino, medico piemontese del secolo XVII. Torino, 1912; 4° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).
Pichon (R.). Les sources de Lucan. Paris, 1912; 1 vol. 4° (*dall'A. pel concorso al premio Vallauri*).
Report on higher education in the State of New-York for the school year ending July 31, 1910. Albany, 1911, 1 vol. 8° (*dall'Education Department*).
Rotta (P.). La filosofia del linguaggio nella patristica e nella scolastica. Torino, 1909; 1 vol. 8°.
— Il pensiero di Nicolò da Cusa nei suoi rapporti storici. Torino, 1911, 1 vol. 8° (*dall'A. per concorrere al premio Gautieri per la Filosofia*).
Ruffini (F.). La giovinezza del Conte di Cavour. Saggi storici secondo lettere e documenti inediti. Torino, 1912; 2 vol. 8° (*dall'A.*).

Dal 14 Aprile al 16 Giugno 1912.

Cauchy (A.). Œuvres complètes. 1re sér., T. III (*dono del Ministero dell'Istruzione Pubblica di Francia*).

Colonnetti (G.). Sul principio di reciprocità. Roma, 1912; 8° (*dall'A.*).

Grassi (G. B.). Contributo alla conoscenza delle fillosserine ed in particolare della fillossera della vite, seguìto da un riassunto teorico-pratico della Biologia della fillossera della vite della Dr. Anna Foà. Roma, 1912; 1 vol. 4° (*dono del Ministero di Agricol. Ind. e Comm.*).

Guareschi (I.). Discorso inaugurale del II Congresso Nazionale di Chimica applicata (23 settembre 1911). Torino, 1912; 8°.

— Biografia di Carlo Guglielmo Scheele. Torino, 1912; in-8° (*dall'A. Socio naz. residente dell'Accademia*).

Helmert (I. R.). Die Erfahrungsgrundlagen der Lehre vom allgemeinen Gleichgewichtszustande der Massen der Erdkruste. Berlin, 1912; 8° (*dall'A. Socio straniero dell'Accademia*).

In Memoria di G. V. Ciaccio nel X anniversario della sua morte. Torino, 1912; 8° (*dono di Giuseppina e Lisetta Motta-Ciaccio*).

Kernbaum (M.). Sur la décomposition de l'eau par les rayons solaires. Cracovie, 1911; 8° (*dall'A.*).

Lacroix (A.). Le volcan de la Réunion. Paris, 1912; 4°.

— Les laves du volcan actif de la Réunion. Paris, 1912; 4°.

— Les volcans du centre de Madagascar: Le massif de l'Ilasy. Paris, 1912; 4°.

— Id. Id. Le massif de l'Ankaratra. Paris, 1912; 4°.

— Les roches grenues, intrusives dans les bréches basaltiques de la Réunion: leur importance pour l'interprétation de l'origine des enclaves homœogènes des roches volcaniques. Paris, 1912; 4°.

— Sur les gisements de corindon de Madagascar. Paris, 1912; 4°.

— Les niobotantalotitanates uranifères (radioactifs) des pegmalites de Madagascar; leur association fréquente à des minéraux bismuthifères. Paris, 1912; 4°.

Lorenzoni (G.) e **Silva** (G.). Il supporto bipendolare " Mioni " a recipienti pneumatici. Padova, 1912; 4° (*dagli AA.*).

Mattirolo (O.). Nuova stazione sarda del " Colus hirudinosus " Caval. et Séch. Roma, 1912; 8° (*dall'A. Socio nazionale residente dell'Accademia*).

Schaller (I. G.). Beweis der Richtigkeit des " grossen Fermatschen Satzes ". Grabow i Meckl., 1912; 8° (*dall'A.*).

** **Seitz** (A.). Les Macrolépidoptères du Globe : I. Fauna paleartica, livrs 57-58. — II. Exotica, I Sect. Fauna americana, livr. 12-14, 42. 46, 48. II Sect. Fauna indoaustralica, livr. 26-31, 40, 41, 43, 44, 45, 47).

Taramelli (T.). Sulle valli sommerse del Golfo Ligure. Pavia, 1912; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Dal 5 Maggio al 23 Giugno 1912.

Bertacchi (C.). Bologna e la geografia. Prolusione al corso di Geografia letta nella R. Università di Bologna il 5 dicembre 1910. Firenze, 1912; 8° (*dall'A. Socio corrispondente dell'Accademia*).

Boselli (P.). Commemorazione dei Soci defunti fatta alla R. Deputazione di Storia patria dal suo Presidente. Torino, 1912; 8°.

— Discours prononcé à l'occasion de l'inauguration des travaux d'amélioration à l'Hôpital Mauricien d'Aoste le 4 décembre 1911. Aoste, 1912; 8° (*da S. E. Boselli Presidente dell'Accademia*).

Bourgeois (H.). Notice sur la langue et la littérature Concan. Bruxelles, 1911; 8° (*dall'A.*).

Caetani (L.). Annali dell'Islam. Vol. I. Milano, 1905; 16 (*Id.*).

Cagiati (M.). Le monete del reame delle Due Sicilie da Carlo I d'Angiò a Vittorio Emanuele II. Supplemento N. 2-4. Napoli, 1912; 8° (*Id.*).

Carnevale (E.). Sulla natura giuridica degli ex-feudi posseduti dal Comune di Mistretta. Roma, 1908; 8°.

— I demani e gli usi civici in Sicilia. Roma, 1910; 4°.

— La libertà delle terre di Lipari e il preteso dominio del Vescovo. Ragioni esposte in difesa del Comune. Siena, 1911; 8°.

— Ancora dei limiti morali nella repressione del furto. Roma, 1912; 8°.

— Il diritto dei Municipi sui demani comunali. Roma; 8° (*Id.*).

Grassi Bertazzi (G. B.). La filosofia di Hugo da S. Vittore. Roma-Milano, 1912; 1 vol. 8° (*Id.*).

Incisa (S.). Il ritorno dei Reali di Savoia dall'esilio. Soggiorno in Asti negli anni 1814-1815. Con prefazione di N. Gabiani. Asti, 1912; 8° (*dono del sig. Gabiani*).

Leardi (A.). Lettere, attestazioni, onoranze. Tortona, 1906; 8°.

— Scritti postumi. Tortona, 1909; 2 vol. 8°.

— Scritti politici ed economici e discorsi parlamentari. Tortona, 1912; 1 vol. 8° (*dono della signora D. Faustina Leardi Bellingeri*).

Lucchetti (P.). L'origine degli Albanesi e dei Greci. Dalla preistoria alla Storia. Cremona, 1912; 8° (*dall'A.*).

Monumenta Germaniae historica. Epistolarum, T. VI, pars alterius, fasc. I; Karolini aevi, IV, 1912; 1 vol. 4°.

** **Muratori** (L. A.). Rerum italicarum scriptores. T. XXIII, fasc. 1°, parte II (fasc. 102); XXIV, fasc. 3°, parte I (fasc. 101).

Prato (G.). Le Protectionnisme ouvrier; traduit de l'italien par G. Bourgin. Paris, 1912; 1 vol. 8°.

— L'espansione commerciale inglese nel primo settecento in una relazione di un inviato Sabaudo. Torino, 1911; 8° (*dall'A.*).

SOMMARIO

Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali.

Classi Unite.

Classe di Scienze Morali, Storiche e Filologiche.

Tip. Vincenzo Bona - Torino